



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques 1

1999

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Corrigé — HEC, ESCP-EAP, ESC Lyon, Mathématiques I, 1999

La population compte $N \geq 4$ individus et une seule personne est informée initialement. On note $[x]$ la partie entière de x . Dans les modèles déterministes, $C > 0$ et $0 < \Delta < 1/C$. Dans les modèles probabilistes, $\beta > 0$; les contraintes sur le pas de temps assurent que les probabilités de transition sont comprises entre 0 et 1.

Partie I. Propagation déterministe

A. Premier modèle de propagation

La relation est $u_{n+1}(\Delta) - u_n(\Delta) = C\Delta(1 - u_n(\Delta))$, avec $u_0(\Delta) = 1/N$.

1. Fixons Δ et posons $d = C\Delta \in]0, 1[$. La proportion de personnes non informées vérifie

$$1 - u_{n+1}(\Delta) = (1 - d)(1 - u_n(\Delta)).$$

C'est une suite géométrique de premier terme $1 - 1/N$. Ainsi

$$u_n(\Delta) = 1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)(1 - C\Delta)^n.$$

Comme $0 < 1 - C\Delta < 1$, sa puissance tend vers zéro lorsque $n \rightarrow +\infty$. Donc $u_n(\Delta) \rightarrow 1$. Pour chaque n , cette expression appartient à $[1/N, 1[$, conformément à son interprétation.

2. (a) Soit $t > 0$ fixé. La définition de la partie entière donne

$$\left[\frac{t}{\Delta}\right] \leq \frac{t}{\Delta} < \left[\frac{t}{\Delta}\right] + 1.$$

Puisque $\Delta > 0$, on obtient l'encadrement des instants

$$\Delta \left[\frac{t}{\Delta} \right] \leq t < \Delta \left(\left[\frac{t}{\Delta} \right] + 1 \right).$$

En particulier, les deux instants comparés sont séparés par Δ , et $0 \leq t - \Delta[t/\Delta] < \Delta$. Le théorème d'encadrement donne donc $\Delta[t/\Delta] \rightarrow t$ lorsque $\Delta \rightarrow 0^+$.

(b) Posons $m = [t/\Delta]$. La base $1 - C\Delta$ est strictement positive. On étudie donc son logarithme :

$$\ln((1 - C\Delta)^m) = (m\Delta) \frac{\ln(1 - C\Delta)}{\Delta}.$$

La dérivabilité du logarithme en 1 donne $\ln(1 - C\Delta)/\Delta \rightarrow -C$. Avec (a), le produit tend vers $-Ct$. La continuité de l'exponentielle entraîne $(1 - C\Delta)^m \rightarrow e^{-Ct}$.

En utilisant l'expression de la question 1, on conclut

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0^+} u_{[t/\Delta]}(\Delta) = 1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right) e^{-Ct}.$$

On a traité directement l'indice variable $[t/\Delta]$; aucun échange entre deux limites n'est nécessaire.

3. Posons $G(t) = e^{Ct}f(t)$. La fonction est dérivable et l'équation donnée fournit

$$G'(t) = Ce^{Ct}f(t) + e^{Ct}C(1 - f(t)) = Ce^{Ct}.$$

Par conséquent, $G(t) - e^{Ct}$ a une dérivée nulle sur $\mathbb{R}_+$ et y est constant. La condition initiale donne cette constante égale à $1/N - 1$. Ainsi

$$f(t) = 1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right) e^{-Ct}, \quad t \geq 0.$$

Cette fonction est dérivable, vérifie $f'(t) = C(1 - f(t))$ et $f(0) = 1/N$. Le raisonnement précédent montre aussi que toute solution ayant cette condition initiale doit avoir cette expression. Elle coïncide avec la limite obtenue en 2(b).

B. Deuxième modèle de propagation

Pour un pas Δ fixé, on pose $d = C\Delta \in]0, 1[$ et on écrit plus simplement $v_n = v_n(\Delta)$. La relation est $v_{n+1} = v_n + dv_n(1 - v_n)$, avec $v_0 = 1/N$.

1. On établit d'abord que $v_n \in [1/N, 1[$ par récurrence. La propriété est vraie au rang 0. Si $1/N \leq v_n < 1$, alors $dv_n(1 - v_n) > 0$, donc $v_{n+1} > v_n \geq 1/N$. De plus,

$$1 - v_{n+1} = (1 - v_n)(1 - dv_n) > 0,$$

car $1 - v_n > 0$ et $1 - dv_n \geq 1 - d > 0$. Ainsi $v_{n+1} < 1$ et la récurrence est démontrée.

La suite est strictement croissante et majorée par 1, donc elle converge vers un réel $\ell \in [1/N, 1]$. En passant à la limite dans sa relation de récurrence, qui ne fait intervenir que des opérations continues, on obtient $\ell = \ell + d\ell(1 - \ell)$.

Comme $d > 0$ et $\ell \geq 1/N > 0$, cette égalité impose $1 - \ell = 0$. Donc $v_n(\Delta) \rightarrow 1$.

2. (a) L'identité précédente et $v_n \geq 1/N$ donnent

$$0 < 1 - v_{n+1} = (1 - v_n)(1 - dv_n) \leq (1 - v_n) \left(1 - \frac{d}{N}\right).$$

Une récurrence fournit $0 < 1 - v_n \leq (1 - 1/N)(1 - d/N)^n$. Le réel $1 - d/N$ appartient à $]0, 1[$; la série géométrique correspondante converge. Par comparaison de séries à termes positifs,

$$\sum_{n \geq 0} (1 - v_n)$$

converge. On dispose même de la borne

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (1 - v_n) \leq \left(1 - \frac{1}{N}\right) \frac{N}{d}.$$

(b) Les termes $x_n = (1 - v_n)/(1 - d)^n$ sont strictement positifs, donc leurs logarithmes sont définis. L'identité sur $1 - v_{n+1}$ donne

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1 - dv_n}{1 - d} = 1 + \frac{d}{1 - d}(1 - v_n).$$

Posons $z_n = d(1 - v_n)/(1 - d) > 0$. Pour $z \geq 0$, la représentation $\ln(1 + z) = \int_0^z \frac{du}{1 + u}$ donne $0 \leq \ln(1 + z) \leq z$. Ainsi

$$0 \leq \ln(x_{n+1}) - \ln(x_n) = \ln(1 + z_n) \leq \frac{d}{1 - d}(1 - v_n).$$

La série majorante converge par (a). La série des différences de logarithmes converge donc, et sa somme s est un réel fini positif ou nul.

(c) Pour $n \geq 1$, la somme finie est télescopique :

$$\ln(x_n) - \ln(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} (\ln(x_{k+1}) - \ln(x_k)) \longrightarrow s.$$

Comme $x_0 = 1 - 1/N = (N - 1)/N$, on obtient par continuité de l'exponentielle

$$x_n \longrightarrow \mu = \frac{N - 1}{N} e^s > 0.$$

Or $x_n = (1 - v_n)/(1 - C\Delta)^n$. La convergence vers le réel strictement positif μ équivaut donc à

$$1 - v_n(\Delta) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \mu(1 - C\Delta)^n, \quad \mu = \frac{N-1}{N}e^s.$$

Le pas Δ reste fixé dans cette question ; la somme s et la constante μ peuvent en dépendre.

3. (a) Tous les facteurs définissant $y_n = v_n / ((1 - v_n)(1 + d)^n)$ sont strictement positifs. On peut donc former le quotient. La relation sur v_n donne $v_{n+1}/v_n = 1 + d(1 - v_n)$, tandis que celle sur son complément donne $(1 - v_n)/(1 - v_{n+1}) = 1/(1 - dv_n)$. Ainsi

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{1 + d - dv_n}{(1 + d)(1 - dv_n)}.$$

Or $(1 + d)(1 - dv_n) = 1 + d - dv_n - d^2v_n$. En séparant ce dénominateur du numérateur, on obtient

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = 1 + \frac{d^2v_n}{(1 + d)(1 - dv_n)} = 1 + \frac{C^2\Delta^2v_n(\Delta)}{(1 + C\Delta)(1 - C\Delta v_n(\Delta))}.$$

En particulier, (y_n) est croissante.

- (b) Comparaison de $\ln(1 + u)$ et de u .

Méthode 1 — Étude de la différence

Pour $u > -1$, posons $\psi(u) = u - \ln(1 + u)$. Cette fonction est dérivable, avec $\psi'(u) = u/(1 + u)$. Elle est décroissante sur $] -1, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$. Son minimum est donc $\psi(0) = 0$.

Ainsi $\ln(1 + u) \leq u$ pour tout $u > -1$, avec égalité exactement lorsque $u = 0$.

Méthode 2 — Tangente à une fonction concave

La fonction $\ell(u) = \ln(1 + u)$ est deux fois dérivable sur l'intervalle ouvert $] -1, +\infty[$ et vérifie $\ell''(u) = -1/(1 + u)^2 < 0$. Elle est donc concave. La propriété des tangentes pour une fonction concave donne

$$\ell(u) \leq \ell(0) + \ell'(0)u = u.$$

On retrouve $\ln(1 + u) \leq u$; le cas d'égalité, déjà vérifié par la première méthode, est $u = 0$. La première preuve étudie une différence; la seconde reconnaît l'équation de la tangente au logarithme et s'étend à d'autres fonctions concaves.

Pour la seconde demande, posons $a_n = d^2 v_n / ((1 + d)(1 - dv_n))$. Les inégalités $0 < v_n < 1$, $1 + d \geq 1$ et $1 - dv_n \geq 1 - d > 0$ donnent

$$0 < a_n \leq \frac{d^2}{1 - d}.$$

Par (a) et l'inégalité logarithmique, $0 \leq \ln(y_{n+1}/y_n) = \ln(1 + a_n) \leq d^2/(1 - d)$. Pour $q \geq 1$, la somme de ces q inégalités donne

$$0 \leq \ln \left(\frac{y_q}{y_0} \right) \leq q \frac{d^2}{1 - d}.$$

Comme $y_0 = v_0/(1 - v_0) = 1/(N - 1)$, cela s'écrit

$$0 \leq \ln \left(\frac{(N - 1)v_q(\Delta)}{(1 - v_q(\Delta))(1 + C\Delta)^q} \right) \leq q \frac{C^2 \Delta^2}{1 - C\Delta}.$$

Le majorant est celui demandé; la minoration sera utile en (c). Pour $q = 0$, les deux membres extrêmes et le logarithme valent zéro, donc l'inégalité reste valable.

- (c) Posons $m = [t/\Delta]$. Par le même encadrement de partie entière qu'en I.A.2(a), $m\Delta \rightarrow t$. L'inégalité de (b) donne, avec des quotients strictement positifs,

$$1 \leq \frac{(N-1)v_m(\Delta)}{(1-v_m(\Delta))(1+C\Delta)^m} \leq \exp\left(\frac{mC^2\Delta^2}{1-C\Delta}\right).$$

L'exposant vaut $C^2(m\Delta)\Delta/(1-C\Delta)$ et tend vers zéro. Le quotient encadré tend donc vers 1.

D'autre part,

$$\ln((1+C\Delta)^m) = (m\Delta)\frac{\ln(1+C\Delta)}{\Delta} \rightarrow Ct,$$

par dérivabilité du logarithme en 1. Ainsi $(1+C\Delta)^m \rightarrow e^{Ct}$ et

$$\frac{v_m(\Delta)}{1-v_m(\Delta)} \rightarrow \frac{e^{Ct}}{N-1}.$$

Si $z_m = v_m/(1-v_m) > 0$, alors $v_m = z_m/(1+z_m)$. Cette dernière fonction est continue pour $z \geq 0$. On conclut

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0^+} v_{[t/\Delta]}(\Delta) = \frac{e^{Ct}}{N-1+e^{Ct}} = \frac{1}{1+(N-1)e^{-Ct}}.$$

L'encadrement de (b) est valable pour chaque entier q , donc on peut l'appliquer à l'entier dépendant de Δ . On n'utilise pas l'équivalent de 2(c), établi uniquement à pas fixé.

4. La fonction h est strictement positive par hypothèse. Le quotient $H = 1/h$ est donc défini et dérivable sur $\mathbb{R}_+$. L'équation donnée fournit

$$H' = -\frac{h'}{h^2} = -C \frac{1-h}{h} = -CH + C.$$

Par conséquent, $(e^{Ct}H)' = Ce^{Ct}$, et $e^{Ct}(H-1)$ est constant. Comme $H(0) = N$, on a

$$H(t) = 1 + (N-1)e^{-Ct} > 0.$$

On peut donc inverser cette expression et obtenir

$$h(t) = \frac{1}{1 + (N-1)e^{-Ct}}, \quad t \geq 0.$$

Cette fonction vaut $1/N$ en zéro, reste strictement positive et vérifie directement $h' = Ch(1-h)$. Le calcul précédent établit que toute solution strictement positive ayant la condition initiale possède cette expression. Elle coïncide avec la limite de 3(c).

Partie II. Propagation probabiliste

On note J_n le nombre de personnes non informées à l'instant $n\Delta$ et $p_r = \beta\Delta r(N-r)$ pour $0 \leq r \leq N-1$. Les transitions sont $r \rightarrow r-1$ avec probabilité p_r et $r \rightarrow r$ avec probabilité $1-p_r$. La condition ajoutée au préambule du sujet assure $0 \leq p_r \leq 1$, ce qui est nécessaire à leur interprétation probabiliste. L'état 0 est conservé, puisque $p_0 = 0$.

Initialement $J_0 = N-1$, et le nombre de personnes non informées ne peut qu'être conservé ou diminuer. Les seules valeurs possibles sont donc $0, \dots, N-1$. Ainsi $P_n(\Delta, r) = P(J_n = r)$ est nul hors de cet ensemble, et la somme finie

$$\sum_{r=0}^{N-1} P_n(\Delta, r)$$

vaut 1.

A. Une formule dans le cas discret

On décompose l'événement $\{J_{n+1} = r\}$ selon les valeurs de J_n . Seuls deux états peuvent contribuer : r , si aucune nouvelle personne n'est informée, et $r + 1$, si une nouvelle personne est informée.

La formule des probabilités totales sur les états possibles donne donc

$$P_{n+1}(\Delta, r) = P_n(\Delta, r)(1 - p_r) + P_n(\Delta, r + 1)p_{r+1}.$$

Si un état a une probabilité nulle, sa contribution est nulle ; il n'est pas nécessaire de définir une probabilité conditionnelle sur cet événement nul. La règle de transition fournit les contributions des états de probabilité positive. En explicitant les deux coefficients, on obtient

$$P_{n+1}(\Delta, r) = P_n(\Delta, r)(1 - \beta\Delta r(N - r)) + P_n(\Delta, r + 1)\beta\Delta(r + 1)(N - r - 1).$$

Pour $r = 0$, le premier facteur vaut 1, conformément au caractère définitif de l'information. Pour $r = N - 1$, le terme provenant de l'état N est nul, car cet état est impossible et le coefficient correspondant vaut zéro. La formule est donc valable sur tout l'ensemble demandé. Elle utilise les probabilités conditionnelles du modèle, sans supposer l'indépendance de deux instants successifs.

B. Étude d'un premier cas discret

On fixe $N = 4$, $\Delta = 1$ et $0 < \beta < 1/4$. Les probabilités de transition vers l'état inférieur sont alors 0 , 3β , 4β et 3β .

1. En écrivant la formule de la sous-partie A successivement pour $r = 0, 1, 2, 3$, on obtient $U_{n+1} = TU_n$ avec

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 3\beta & 0 & 0 \\ 0 & 1-3\beta & 4\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1-4\beta & 3\beta \\ 0 & 0 & 0 & 1-3\beta \end{pmatrix}.$$

Tous les coefficients sont positifs ou nuls, et chaque colonne a pour somme 1. Le vecteur initial est $U_0 = {}^t(0, 0, 0, 1)$.

2. (a) Posons $a = 1 - 3\beta$ et $b = 1 - 4\beta$. Comme $\beta > 0$, les trois réels $1, a, b$ sont distincts. La matrice T étant triangulaire, ses valeurs propres réelles sont ses coefficients diagonaux, donc exactement $1, a, b$.

Pour expliciter les espaces propres, écrivons $X = {}^t(x_0, x_1, x_2, x_3)$. L'équation $TX = \lambda X$ équivaut à

$$(1 - \lambda)x_0 + 3\beta x_1 = 0, \quad (a - \lambda)x_1 + 4\beta x_2 = 0, \quad (b - \lambda)x_2 + 3\beta x_3 = 0, \quad (a - \lambda)x_3 = 0.$$

Pour $\lambda = 1$, les trois dernières équations, lues depuis la dernière, imposent $x_3 = x_2 = x_1 = 0$, tandis que x_0 est libre. Donc

$$E_1(T) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Pour $\lambda = b$, la dernière équation donne $x_3 = 0$, car $a - b = \beta \neq 0$. La seconde impose $x_1 = -4x_2$, puis la première donne $x_0 = 3x_2$. Ainsi

$$E_b(T) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Pour $\lambda = a$, la seconde équation donne $x_2 = 0$; la troisième impose alors $x_3 = 0$; la première donne $x_1 = -x_0$. Ainsi

$$E_a(T) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Les trois espaces propres sont de dimension 1. Leur somme a donc dimension 3, ce qui montre que T n'est pas diagonalisable. La question suivante construit directement une base adaptée au calcul des puissances.

(b) Posons $G = {}^t(0, y, z, t)$ et $E = {}^t(1, -1, 0, 0)$. L'équation demandée est $(T - aI)G = E$, soit

$$3\beta y = 1, \quad 4\beta z = -1, \quad -\beta z + 3\beta t = 0.$$

La quatrième équation est $0 = 0$. Puisque $\beta > 0$, les divisions sont légitimes et donnent

$$y = \frac{1}{3\beta}, \quad z = -\frac{1}{4\beta}, \quad t = -\frac{1}{12\beta}.$$

Ainsi $G = {}^t(0, 1/(3\beta), -1/(4\beta), -1/(12\beta))$ vérifie $TG = aG + E$.

- (c) Prenons pour colonnes de P , dans l'ordre, le vecteur propre de valeur propre 1, celui de valeur propre b , le vecteur E de (b) et le vecteur G . Cela donne

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 1/(3\beta) \\ 0 & 1 & 0 & -1/(4\beta) \\ 0 & 0 & 0 & -1/(12\beta) \end{pmatrix}.$$

Pour prouver l'inversibilité sans déterminant, supposons qu'une combinaison de ses colonnes, de coefficients c_1, c_2, c_3, c_4 , soit nulle. La quatrième coordonnée impose $c_4 = 0$. La troisième impose alors $c_2 = 0$, la seconde $c_3 = 0$, et la première $c_1 = 0$. Les quatre colonnes sont donc libres et forment une base de $\mathbb{R}^4$; P est inversible.

Les trois relations de vecteurs propres et $TG = aG + E$ donnent, colonne par colonne,

$$TP = PS, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

En multipliant à droite par P^{-1} , on obtient $T = PSP^{-1}$. Tout a été construit et vérifié explicitement; aucun théorème général de réduction supplémentaire n'est utilisé.

- (d) Méthode 1 — Binôme sur le bloc d'ordre deux

Le bloc inférieur droit de S est $K = aI_2 + J$, avec $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $J^2 = 0$. Les matrices aI_2 et J commutent. Le binôme matriciel donne, pour $n \geq 1$,

$$K^n = a^n I_2 + na^{n-1} J.$$

Les deux autres blocs sont les scalaires 1 et b . On obtient donc

$$S^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^n & na^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & a^n \end{pmatrix}, \quad n \geq 1.$$

Méthode 2 — Récurrence sur le coefficient supérieur du bloc

Une récurrence par multiplication montre que K^n est de la forme $\begin{pmatrix} a^n & c_n \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$. On a

$c_1 = 1$. La multiplication par K donne $c_{n+1} = a^n + ac_n$.

Si $c_n = na^{n-1}$, alors $c_{n+1} = a^n + na^n = (n+1)a^n$. La formule est donc vraie pour tout $n \geq 1$, et fournit la même expression de S^n . Le binôme exploite l'annulation de J^2 ; la récurrence permet de suivre directement le coefficient qui empêche la diagonalisation.

Pour $n = 0$, on a simplement $S^0 = I_4$.

3. Résultat admis dans cette version adaptée : pour la convergence coefficient par coefficient de matrices d'ordre quatre, si $M_n \rightarrow M$, alors $M_n A \rightarrow MA$ et $BM_n \rightarrow BM$ pour toutes matrices fixes A à quatre lignes et B à quatre colonnes. Le

sujet original admet déjà ce résultat, qui permet de passer à la limite après un changement de base.

Les hypothèses sur β donnent $0 < b < 1$ et $0 < a < 1$. Ainsi $b^n \rightarrow 0$ et $a^n \rightarrow 0$. De plus, $na^{n-1} \rightarrow 0$: en effet, $a > 0$ et $\ln(na^{n-1}) = \ln n + (n-1) \ln a \rightarrow -\infty$, car $\ln a < 0$ et $\ln n/n \rightarrow 0$.

La formule de 2(d) donne donc $S^n \rightarrow D = \text{diag}(1, 0, 0, 0)$. Une récurrence sur n à partir de $T = PSP^{-1}$ donne $T^n = PS^nP^{-1}$. Le résultat admis entraîne alors

$$T^n \rightarrow T_\infty = PDP^{-1}.$$

La matrice PD possède une première colonne égale à ${}^t(1, 0, 0, 0)$ et toutes ses autres colonnes nulles. Ses trois dernières lignes sont donc nulles, et elles le restent après multiplication à droite par P^{-1} . Ainsi

$$T_\infty = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & c_0 & d_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les lettres indicées évitent de confondre les coefficients inconnus de cette limite avec les réels $a = 1 - 3\beta$ et $b = 1 - 4\beta$.

4. Chaque colonne de T a pour somme 1, donc $LT = L$. Par récurrence, $LT^n = L$ pour tout $n \geq 0$, y compris $n = 0$.

En utilisant la convergence de la question 3 et le résultat admis pour la multiplication à gauche par L , on obtient $LT_\infty = L$. Or $LT_\infty = (a_0, b_0, c_0, d_0)$, puisque les trois dernières lignes sont nulles. Chaque coefficient de sa première ligne est donc égal à 1, et

$$T_{\infty} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Une récurrence sur n donne $U_n = T^n U_0$, avec $U_0 = {}^t(0, 0, 0, 1)$. La convergence et le résultat admis pour la multiplication par un vecteur fixe donnent

$$U_n \longrightarrow T_{\infty} U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $P_n(1, 0) \rightarrow 1$ et $P_n(1, r) \rightarrow 0$ pour $r \in \{1, 2, 3\}$. À long terme, la probabilité que toute la population soit informée tend vers 1.

C. Étude du cas discret général

On fixe $N \geq 4$ et $0 < \Delta < 4/(\beta N^2)$. Pour $0 \leq r \leq N-1$, l'identité $r(N-r) = N^2/4 - (r - N/2)^2$ montre que $0 \leq \beta \Delta r(N-r) < 1$. Les coefficients de transition sont donc bien des probabilités, et leurs compléments sont strictement positifs.

1. La formule (3) donne la matrice R d'ordre N suivante, avec des indices de lignes et de colonnes compris entre 1 et N :

$$R_{i,j} = \begin{cases} 1 - \beta\Delta(i-1)(N-i+1) & \text{si } j = i, \\ \beta\Delta i(N-i) & \text{si } j = i+1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En effet, la ligne $i = r + 1$ correspond à $P_{n+1}(\Delta, r)$, et le coefficient de la colonne $r + 2 = i + 1$ est $\beta\Delta(r+1)(N-r-1) = \beta\Delta i(N-i)$. Pour la dernière ligne, seule la diagonale intervient. Ainsi $W_{n+1} = RW_n$.

La matrice est triangulaire supérieure, avec des coefficients nuls en dehors de la diagonale et de la première diagonale supérieure. Ses coefficients sont positifs ou nuls et chaque colonne a pour somme 1. Le vecteur initial est $W_0 = {}^t(0, \dots, 0, 1)$.

2. (a) Code adapté en Python.

Le calcul d'une ligne utilise l'ancienne valeur de $V[r]$ et celle de $V[r + 1]$. On parcourt donc les indices dans l'ordre croissant : lorsqu'une composante est modifiée, elle n'est plus nécessaire aux lignes suivantes. Le tableau est supposé être un tableau NumPy de nombres flottants, de longueur N , comme dans l'énoncé adapté.

Les constantes du code complet ci-dessous constituent un exemple admissible ; l'utilisateur peut les remplacer par ses propres valeurs respectant les hypothèses.

Python

```
import numpy as np

beta = 0.1
N = 4
Delta = 1.0

def Calcul1(V):
    for r in range(N - 1):
        V[r] = (
            (1 - beta * Delta * r * (N - r)) * V[r]
```

```

        + beta * Delta * (r + 1) * (N - r - 1) * V[r + 1]
    )
    V[N - 1] = (1 - beta * Delta * (N - 1)) * V[N - 1]
    return V

```

L'indice Python r correspond à l'état où il reste r personnes non informées, donc au coefficient de rang $r + 1$ du vecteur mathématique. La boucle calcule les états $0, \dots, N - 2$; le dernier état est traité séparément. L'affectation se fait sur place, et la valeur retournée est le même tableau.

Par la formule de R établie en 1, chaque affectation est exactement la composante correspondante de RV avec les anciennes valeurs. Un parcours décroissant serait incorrect, puisqu'il réutiliserait une composante déjà transformée.

(b) Code adapté en Python.

On initialise le vecteur de probabilités à W_0 , puis on effectue exactement i transitions. Le code complet reprend la fonction précédente pour être directement exécutable.

Python

```

import numpy as np

beta = 0.1
N = 4
Delta = 1.0

def Calcul1(V):
    for r in range(N - 1):
        V[r] = (
            (1 - beta * Delta * r * (N - r)) * V[r]
            + beta * Delta * (r + 1) * (N - r - 1) * V[r + 1]
        )
    V[N - 1] = (1 - beta * Delta * (N - 1)) * V[N - 1]
    return V

```

```
def Calcul2(V, i):
    V[:] = 0.0
    V[N - 1] = 1.0
    for k in range(i):
        Calcul1(V)
    return V
```

Avant la boucle, V contient W_0 . Si, après k étapes, il contient W_k , la fonction `Calcul1` le remplace par $RW_k = W_{k+1}$. Une récurrence sur le nombre d'étapes montre donc qu'après i passages, V contient W_i .

Pour $i = 0$, la boucle est vide et le résultat est bien W_0 . Le contenu initial de V est sans importance, puisqu'il est réinitialisé. Le paramètre i est supposé entier positif ou nul, conformément à l'énoncé.

Les deux blocs Python ont été exécutés. Le résultat de `Calcul1` a été comparé au produit par une matrice R construite explicitement, et celui de `Calcul2` à des puissances de cette matrice, pour plusieurs dimensions et plusieurs nombres d'étapes, y compris zéro. La positivité numérique et la somme des probabilités ont également été contrôlées. Ces vérifications accompagnent les démonstrations de l'algorithme ; elles ne les remplacent pas.

Dans la suite, on pose $\rho = 1 - \beta\Delta(N - 1)$. Comme $0 < \beta\Delta(N - 1) < 1$, on a $0 < \rho < 1$.

3. L'état N est impossible. La relation (3) pour $r = N - 1$ se réduit donc à

$$P_{n+1}(\Delta, N - 1) = \rho P_n(\Delta, N - 1).$$

La valeur initiale est 1, d'où $P_n(\Delta, N - 1) = \rho^n$ pour tout $n \geq 0$. En particulier, cette probabilité tend vers zéro lorsque $n \rightarrow +\infty$ à pas fixé.

4. (a) Le paramètre réel b est maintenant explicitement déclaré dans l'énoncé adapté. Aucun signe ne lui est imposé, ni aux termes de la suite.

Méthode 1 — Construction d'un majorant par récurrence

Posons $A = \max(v_0, b/(q - a))$, ce qui est bien défini puisque $q - a > 0$. On a $v_0 \leq A$. Supposons $v_n \leq Aq^n$. Comme $a > 0$, on peut multiplier cette inégalité sans en changer le sens, puis utiliser la récurrence donnée :

$$v_{n+1} \leq av_n + bq^n \leq (aA + b)q^n.$$

Or $A \geq b/(q - a)$ donne $aA + b \leq qA$. Comme $q > 0$, on obtient $v_{n+1} \leq Aq^{n+1}$. La récurrence prouve la majoration pour tout n .

Méthode 2 — Normalisation par q^n

Posons $z_n = v_n/q^n$, $\alpha = a/q \in]0, 1[$ et $c = b/(q - a)$. La relation donnée implique

$$z_{n+1} \leq \alpha z_n + \frac{b}{q}, \quad z_{n+1} - c \leq \alpha(z_n - c),$$

car $c = \alpha c + b/q$. Une récurrence donne $z_n - c \leq \alpha^n(z_0 - c)$, donc

$$z_n \leq c + \alpha^n(v_0 - c) = (1 - \alpha^n)c + \alpha^n v_0 \leq \max(c, v_0).$$

En multipliant par $q^n > 0$, on retrouve $v_n \leq Aq^n$ avec le même A . La première méthode choisit une borne stable; la seconde donne aussi une estimation intermédiaire dépendant de n .

(b) On suppose $a \neq 0$ et $a \neq q$, tandis que b est réel. Les puissances q^0 sont égales à 1, y compris pour $q = 0$, selon la convention explicitée dans le sujet.

Méthode 1 — Somme télescopique demandée

Pour $k \geq 0$, on peut diviser la récurrence par $a^{k+1} \neq 0$:

$$\frac{u_{k+1}}{a^{k+1}} - \frac{u_k}{a^k} = \frac{b}{a} \left(\frac{q}{a}\right)^k.$$

Pour $n \geq 1$, la somme finie télescopique et la formule géométrique, applicable car $q/a \neq 1$, donnent

$$\frac{u_n}{a^n} - u_0 = \frac{b}{a} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{q}{a}\right)^k = \frac{b}{a} \frac{1 - (q/a)^n}{1 - q/a}.$$

Après multiplication par a^n et simplification, on obtient

$$u_n = a^n u_0 + b \frac{q^n - a^n}{q - a}.$$

Pour $n = 0$, cette formule donne bien u_0 , puisque la fraction est nulle.

Méthode 2 — Soustraction d'une solution particulière

Posons $c = b/(q - a)$. La suite cq^n vérifie $cq^{n+1} = acq^n + bq^n$, car $cq = ac + b$. Ainsi $w_n = u_n - cq^n$ satisfait $w_{n+1} = aw_n$ et $w_0 = u_0 - c$.

Il vient $w_n = a^n(u_0 - c)$, puis

$$u_n = a^n u_0 + c(q^n - a^n) = a^n u_0 + b \frac{q^n - a^n}{q - a}.$$

Cette vérification reste valable pour $q = 0$ avec la convention sur la puissance d'exposant zéro. La somme télescopique suit l'indication ; la solution particulière est une méthode utile pour reconnaître une récurrence linéaire avec un terme géométrique.

- (c) Posons $\varphi(x) = x(N - x)$ sur $[0, N]$. Elle est dérivable, et $\varphi'(x) = N - 2x$. Cette dérivée est positive pour $x < N/2$, nulle en $N/2$ et négative pour $x > N/2$.

x	0	$]0, N/2[$	$N/2$	$]N/2, N[$	N
$\varphi'(x)$	N	+	0	−	$-N$
$\varphi(x)$	0	$\nearrow$	$N^2/4$	$\searrow$	0

Le maximum est $N^2/4$, atteint en $N/2$. On relève aussi que, pour $x \in [2, N - 2]$, $\varphi(x) \geq 2(N - 2)$: sur cet intervalle, les valeurs minimales se trouvent à ses extrémités, où elles sont égales. Lorsque $N = 4$, l'intervalle se réduit au point 2 et la propriété reste vraie.

5. Posons $\sigma = 1 - 2\beta\Delta(N - 2)$. Le choix de Δ donne $\sigma > 0$, et

$$\rho - \sigma = \beta\Delta(N - 3) > 0,$$

puisque $N \geq 4$. On a donc $0 < \sigma < \rho < 1$.

Avec $r = N - 2$, la formule (3) et la question 3 donnent

$$P_{n+1}(\Delta, N - 2) = \sigma P_n(\Delta, N - 2) + \beta\Delta(N - 1)\rho^n.$$

La valeur initiale est nulle, puisqu'une seule personne est informée à l'instant initial. La formule de 4(b) s'applique avec $a = \sigma \neq 0$, $q = \rho \neq \sigma$ et $b = \beta\Delta(N - 1)$. Ainsi

$$P_n(\Delta, N-2) = \beta\Delta(N-1) \frac{\rho^n - \sigma^n}{\rho - \sigma} = \frac{N-1}{N-3}(\rho^n - \sigma^n).$$

La division par $N-3$ est légitime. Pour $n=0$, la formule donne zéro ; pour $n=1$, elle donne $\beta\Delta(N-1)$, qui est bien la probabilité de la première transmission.

6. On raisonne par récurrence descendante sur l'état r . Pour $r = N-1$, la question 3 donne la propriété avec $A_{N-1} = 1$.

Supposons, pour un entier $r \in \{2, \dots, N-2\}$, qu'on dispose de $A_{r+1} \geq 0$ tel que $P_n(\Delta, r+1) \leq A_{r+1}\rho^n$ pour tout n . Posons

$$a_r = 1 - \beta\Delta r(N-r), \quad b_r = \beta\Delta(r+1)(N-r-1).$$

On a $a_r > 0$ et $b_r > 0$. De plus, par 4(c), $r(N-r) \geq 2(N-2) > N-1$, la dernière inégalité étant équivalente à $N > 3$. Ainsi $a_r < \rho$.

La relation (3) donne

$$P_{n+1}(\Delta, r) \leq a_r P_n(\Delta, r) + b_r A_{r+1} \rho^n.$$

On peut appliquer 4(a), puisque $0 < a_r < \rho$. Le majorant explicite de cette question fournit

$$A_r = \max \left(P_0(\Delta, r), \frac{b_r A_{r+1}}{\rho - a_r} \right) \geq 0,$$

et $P_n(\Delta, r) \leq A_r \rho^n$ pour tout n . Ici $P_0(\Delta, r) = 0$, mais l'écriture conserve toutes les hypothèses utilisées.

En descendant jusqu'à $r=2$, on obtient la propriété pour tous les états demandés. Les constantes A_r peuvent dépendre de N, β, Δ et de r , mais pas de n . Comme $0 < \rho < 1$, on a en particulier $P_n(\Delta, r) \rightarrow 0$ pour chaque $r \geq 2$.

7. (a) La relation (3) pour $r = 0$ donne

$$P_{n+1}(\Delta, 0) = P_n(\Delta, 0) + \beta\Delta(N-1)P_n(\Delta, 1).$$

Le terme ajouté est positif ou nul. La suite est donc croissante. Ses termes sont des probabilités, donc ils sont majorés par 1 et minorés par 0. Le théorème de convergence des suites monotones assure qu'elle converge vers un réel $\ell \in [0, 1]$.

(b) Méthode 1 — Accroissements et somme des probabilités

Puisque la suite de (a) converge, la différence de deux termes consécutifs tend vers zéro. La relation de (a) et $\beta\Delta(N-1) > 0$ impliquent donc $P_n(\Delta, 1) \rightarrow 0$.

La question 6 donne déjà $P_n(\Delta, r) \rightarrow 0$ pour chaque $r \in \{2, \dots, N-1\}$. Enfin, la somme finie des probabilités vaut 1 :

$$P_n(\Delta, 0) = 1 - \sum_{r=1}^{N-1} P_n(\Delta, r) \rightarrow 1.$$

Ainsi $\ell = 1$, et la réponse complète est

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(\Delta, r) = \begin{cases} 1 & \text{si } r = 0, \\ 0 & \text{si } 1 \leq r \leq N-1. \end{cases}$$

Méthode 2 — Traitement direct de l'état 1

La relation (3) pour $r = 1$ donne

$$P_{n+1}(\Delta, 1) = \rho P_n(\Delta, 1) + 2\beta\Delta(N-2)P_n(\Delta, 2).$$

Par 6, le dernier terme est majoré par $B\rho^n$, où $B = 2\beta\Delta(N-2)A_2 \geq 0$. Le coefficient de $P_n(\Delta, 1)$ étant lui aussi ρ , on ne peut pas utiliser 4(a), qui exige une inégalité stricte entre les deux coefficients.

On établit plutôt par récurrence, pour $n \geq 1$,

$$0 \leq P_n(\Delta, 1) \leq \rho^n P_0(\Delta, 1) + Bn\rho^{n-1}.$$

Au rang 1, la récurrence de probabilités donne cette borne. Si elle est vraie au rang n , multiplier par $\rho > 0$ puis ajouter $B\rho^n$ donne au rang suivant le terme $B(n+1)\rho^n$, comme demandé.

Comme $0 < \rho < 1$, $\rho^n \rightarrow 0$ et $n\rho^{n-1} \rightarrow 0$ par les croissances comparées. Donc $P_n(\Delta, 1) \rightarrow 0$. Avec les états $r \geq 2$ et la somme finie des probabilités, on retrouve $P_n(\Delta, 0) \rightarrow 1$.

La première méthode exploite le caractère définitif de l'information ; la seconde met en évidence le facteur n qui peut apparaître lorsque les deux taux géométriques d'une récurrence sont égaux.

8. Soit $t > 0$ fixé et posons $m = [t/\Delta]$. L'encadrement $0 \leq t - m\Delta < \Delta$ donne $m\Delta \rightarrow t$.

Pour tout réel constant $k > 0$, lorsque Δ est assez petit pour que $1 - k\Delta > 0$, on a

$$\ln((1 - k\Delta)^m) = (m\Delta) \frac{\ln(1 - k\Delta)}{\Delta} \rightarrow -kt.$$

Par continuité de l'exponentielle, $(1 - k\Delta)^m \rightarrow e^{-kt}$. Ce calcul repose uniquement sur la dérivabilité du logarithme et l'encadrement de la partie entière ; il ne dépend donc pas de la partie I.

En prenant $k = \beta(N-1)$ dans la formule de la question 3, on obtient

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0^+} P_{[t/\Delta]}(\Delta, N-1) = e^{-\beta(N-1)t}.$$

Pour la question 5, on applique aussi le même calcul avec $k = 2\beta(N - 2)$. On conclut

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0^+} P_{[t/\Delta]}(\Delta, N - 2) = \frac{N - 1}{N - 3} (e^{-\beta(N-1)t} - e^{-2\beta(N-2)t}).$$

Le dénominateur est strictement positif puisque $N \geq 4$. Les deux exponentielles sont dans l'ordre indiqué car $2(N - 2) > N - 1$, donc la seconde limite est positive pour $t > 0$. Pour $t = 0$, les expressions donnent également les conditions initiales 1 et 0.

D. Étude du cas continu

Les fonctions $F_0, \dots, F_N$ sont dérivables sur $\mathbb{R}_+$, avec $F_N = 0$, $F_{N-1}(0) = 1$ et $F_r(0) = 0$ pour $0 \leq r \leq N - 2$. Elles vérifient

$$F'_r = \beta(r + 1)(N - 1 - r)F_{r+1} - \beta r(N - r)F_r.$$

1. On cherche toutes les fonctions dérivables sur un intervalle I vérifiant

$$f' = -af + be^{-qt}, \text{ où } a, b, q \text{ sont réels et } a \neq q.$$

Méthode 1 — Fonction auxiliaire imposée

Posons $G(t) = e^{at}f(t)$. La dérivation et l'équation donnent

$$G'(t) = ae^{at}f(t) + e^{at}f'(t) = be^{(a-q)t}.$$

Comme $a - q \neq 0$, une primitive est $be^{(a-q)t}/(a - q)$. Ainsi $G(t) - be^{(a-q)t}/(a - q)$ a une dérivée nulle sur l'intervalle I et y est constant. Il existe donc $K \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(t) = Ke^{-at} + \frac{b}{a - q}e^{-qt}, \quad t \in I.$$

Réciproquement, toute fonction de cette forme est dérivable et vérifie l'équation : sa dérivée vaut $-aKe^{-at} - qbe^{-qt}/(a - q)$, qui est aussi $-af(t) + be^{-qt}$. Cette famille est donc exactement celle des solutions.

Méthode 2 — Solution particulière et différence

La fonction $f_p(t) = be^{-qt}/(a - q)$ vérifie l'équation, car

$$-af_p(t) + be^{-qt} = \left(-\frac{ab}{a - q} + b\right)e^{-qt} = -\frac{qb}{a - q}e^{-qt} = f_p'(t).$$

Si f est une autre solution, $g = f - f_p$ satisfait $g' = -ag$. Alors $(e^{at}g)' = 0$, donc $g(t) = Ke^{-at}$ sur l'intervalle. On retrouve $f(t) = Ke^{-at} + be^{-qt}/(a - q)$. Inversement, ajouter une telle fonction g à f_p fournit bien une solution par linéarité de l'équation.

La première méthode suit le facteur proposé dans l'énoncé ; la seconde sépare une solution particulière de la solution de l'équation sans second membre. Elle est l'analogue continu de II.C.4(b).

2. Pour $r = N - 1$, le terme faisant intervenir F_N est nul. L'équation devient

$$F'_{N-1}(t) = -\beta(N - 1)F_{N-1}(t).$$

La dérivée de $e^{\beta(N-1)t}F_{N-1}(t)$ est donc nulle. Sa valeur initiale est 1, d'où

$$F_{N-1}(t) = e^{-\beta(N-1)t}, \quad t \geq 0.$$

Pour $r = N - 2$, la relation donne alors

$$F'_{N-2}(t) = -2\beta(N-2)F_{N-2}(t) + \beta(N-1)e^{-\beta(N-1)t}.$$

La question 1 s'applique avec $a = 2\beta(N-2)$, $q = \beta(N-1)$ et $b = \beta(N-1)$. On a $a - q = \beta(N-3) > 0$, donc les deux coefficients sont distincts. Ainsi

$$F_{N-2}(t) = Ke^{-2\beta(N-2)t} + \frac{N-1}{N-3}e^{-\beta(N-1)t}.$$

La condition $F_{N-2}(0) = 0$ impose $K = -(N-1)/(N-3)$. Par conséquent,

$$F_{N-2}(t) = \frac{N-1}{N-3} (e^{-\beta(N-1)t} - e^{-2\beta(N-2)t}), \quad t \geq 0.$$

Les calculs vérifient les deux équations et les conditions initiales. Ces expressions sont exactement les deux limites discrètes obtenues en II.C.8; cette concordance concerne les deux états étudiés et n'exige aucun passage à la limite dans le système complet d'équations.

Relevé des adaptations

- II.A et préambule probabiliste : condition $\beta\Delta r(N-r) \leq 1$ explicitée pour les pas des modèles discrets, afin que les transitions soient des probabilités. Les hypothèses de II.B et II.C satisfont déjà cette condition. La notation $P_n(\Delta, r) = 0$ hors du support $\{0, \dots, N-1\}$ est aussi explicitée pour traiter les indices aux extrémités.
- II.C.2(a)–(b) : les deux procédures informatiques sont converties en fonctions Python avec imports complets, tableaux NumPy flottants, indices commençant à zéro et modification sur place. Les fonctions ont été exécutées et contrôlées. Code adapté en Python.

- II.C.4(a)–(b) : le coefficient réel b , présent dans les récurrences originales mais non déclaré dans la liste des paramètres, est explicitement défini.
- II.C.4(b) : convention $q^0 = 1$ explicitée, y compris lorsque $q = 0$, cas que l'énoncé n'exclut pas.