



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC — 2018

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Notations et rappels

La série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$$

converge si et seulement si $x > 1$.

Pour $x > 1$, on pose

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

On admet que $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

Toutes les variables aléatoires du problème sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Pour un événement R , on note $\overline{R}$ son événement contraire. Les réunions et intersections dénombrables d'événements sont des événements.

L'objet du problème est l'étude de la convergence de séries dont les termes sont des variables aléatoires. Une série

$$\sum_{n \geq 1} U_n$$

converge en loi, ou en probabilité, lorsque la suite de ses sommes partielles

$$\left(\sum_{k=1}^n U_k \right)_{n \geq 1}$$

converge dans le sens considéré.

Partie I. Séries télescopiques

On considère une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes, de même loi qu'une variable de référence X , et on étudie la série aléatoire :

$$\sum_{n \geq 1} \left(\frac{X_n}{n} - \frac{X_{n+1}}{n+1} \right).$$

1. (a) Justifier la convergence de la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Calculer sa somme.

1. (b) Dans cet exemple, quelle est la loi de la variable aléatoire de référence X ?
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit Y_n une variable aléatoire admettant pour densité la fonction f_n définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\frac{1}{n+1} \text{ ou } x > 1, \\ 1 + (n+1)x & \text{si } -\frac{1}{n+1} \leq x \leq 0, \\ c_n & \text{si } 0 < x < \frac{n}{n+1}, \\ (n+1)(1-x) & \text{si } \frac{n}{n+1} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

avec c_n une constante strictement positive.

2. (a) Calculer c_n et représenter graphiquement f_3 dans un repère orthonormé.
2. (b) Déterminer la fonction de répartition F_n de Y_n . La fonction F_n est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

2. (c) Montrer que $(Y_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable Y dont on précisera la loi.
3. Dans cette question, on suppose que X possède une densité f bornée. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$D_n = X_1 - \frac{X_{n+1}}{n+1}.$$

3. (a) Montrer que $\left(\frac{X_{n+1}}{n+1}\right)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers 0.
3. (b) En déduire que $(D_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers X .
3. (c) Justifier que D_n admet une densité f_{D_n} donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{D_n}(x) = (n+1) \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f((n+1)(t-x)) \, dt.$$

3. (d) En déduire une nouvelle démonstration du résultat de la question 2(c).
4. Dans cette question, X suit la loi normale centrée réduite. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$U_n = \frac{X_n}{n} - \frac{X_{n+1}}{n+1}, \quad T_n = \sum_{k=1}^n U_k.$$

4. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de U_n .
4. (b) Justifier la convergence en loi de la série

$$\sum_{n \geq 1} U_n.$$

4. (c) Soit $(U'_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que U'_n et U_n ont la même loi pour tout n . On pose

$$T'_n = \sum_{k=1}^n U'_k.$$

4. (c)(i) Justifier que (T'_n) converge en loi vers une variable normale centrée de variance $\frac{\pi^2}{3} - 1$.
4. (c)(ii) Pourquoi ce résultat ne contredit-il pas ceux obtenus aux questions 3(b) et 4(b) ?

Partie II. Séries harmoniques lacunaires

On étudie des séries numériques obtenues à partir de la série harmonique divergente

$$\sum_{n \geq 1} 1/n$$

en effaçant certains termes.

Pour $\mathcal{G} \subset \mathbb{N}^*$, la fonction indicatrice $\mathbf{1}_{\mathcal{G}}$ est définie par $\mathbf{1}_{\mathcal{G}}(k) = 1$ si $k \in \mathcal{G}$, et 0 sinon.

Pour $n \geq 1$, on pose

$$h_n(\mathcal{G}) = \sum_{k=1}^n \frac{\mathbf{1}_{\mathcal{G}}(k)}{k}.$$

5. On pose $\mathcal{D} = \{n^2 : n \in \mathbb{N}^*\}$ et $\mathcal{T} = \{n^3 : n \in \mathbb{N}^*\}$.

5. (a) Exprimer $h_n(\mathcal{D})$ à l'aide d'une somme partielle de la série

$$\sum_{n \geq 1} 1/n^2.$$

5. (b) En déduire la convergence de $(h_n(\mathcal{D}))$ et calculer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathbf{1}_{\mathcal{D}}(n)}{n}.$$

5. (c) Justifier que $\mathcal{D} \cap \mathcal{T}$ est l'ensemble des entiers m tels que $m^{1/6} \in \mathbb{N}^*$.

On admet pour cette question que la racine carrée d'un entier naturel qui n'est pas un carré parfait est irrationnelle, c'est-à-dire qu'elle ne peut s'écrire comme le quotient de deux entiers.

5. (d) Montrer que $(h_n(\mathcal{D} \cup \mathcal{T}))$ converge et exprimer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathbf{1}_{\mathcal{D} \cup \mathcal{T}}(n)}{n}$$

à l'aide de certaines valeurs de ζ .

6. On note $\mathcal{I} = \{2n - 1 : n \in \mathbb{N}^*\}$ l'ensemble des entiers naturels impairs. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2t-1} \right) dt.$$

6. (a) Établir $0 \leq u_n \leq \frac{2}{(2n-1)^2}$.

6. (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$h_n(\mathcal{J}) = \sum_{k=1}^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} u_k + \int_1^{\lfloor (n+3)/2 \rfloor} \frac{1}{2t-1} dt.$$

6. (c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, justifier :

$$0 \leq \ln \left(\frac{1}{n} \left(2 \left\lfloor \frac{n+3}{2} \right\rfloor - 1 \right) \right) \leq \frac{2}{n}.$$

6. (d) Montrer que

$$\sum_{n \geq 1} u_n$$

converge. En posant

$$\delta = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n,$$

établir :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (h_n(\mathcal{J}) - \ln(\sqrt{n})) = \delta.$$

6. (e) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq \frac{1}{2n-1}.$$

6. (f) Pour $n \geq 3$, établir :

$$-\frac{1}{n} \leq \delta - (h_n(\mathcal{J}) - \ln(\sqrt{n})) \leq \frac{1}{n-2}.$$

6. (g) La fonction Python incomplète suivante calcule une valeur approchée de δ en calculant successivement des valeurs de $h_n(\mathcal{J}) - \ln(\sqrt{n})$. On suppose $\text{eps} > 0$.

Python

```
import numpy as np

def delta(eps):
    n = 3
    s = 1 + 1 / 3 - np.log(3) / 2
    while 1 / (n - 2) > eps:
        n = n + 2
        s = s + 1 / n + ...
    return s
```

6. (g)(i) Quelles valeurs de $h_n(\mathcal{J}) - \ln(\sqrt{n})$ sont successivement affectées à s pour $\text{eps} = 0.2$?
6. (g)(ii) Compléter la ligne contenant les points de suspension.
6. (g)(iii) Pourquoi cet algorithme peut-il assurer une précision arbitraire pour le calcul approché de δ ?

Partie III. Séries de Riemann alternées

On considère une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes telles que

$P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = 1/2$. On pose

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k.$$

7. Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite réelle et

$$s_n = \sum_{k=1}^n x_k.$$

On suppose qu'il existe $\alpha \geq 0$ et $M > 0$ tels que $|s_n| \leq Mn^\alpha$ pour tout $n \geq 1$.

7. (a) Soit $\beta > \alpha$.

7. (a)(i) Pour $n \geq 2$, montrer que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{k^\beta} = \frac{s_n}{n^\beta} + \sum_{k=1}^{n-1} s_k \left(\frac{1}{k^\beta} - \frac{1}{(k+1)^\beta} \right).$$

7. (a)(ii) En déduire que

$$\sum_{n \geq 1} x_n / n^\beta$$

converge.

7. (b) Justifier que, pour tout $x > 0$, la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^x}$$

converge.

8. Soient $s, t > 0$ et $n \geq 1$.

8. (a) Calculer $E(e^{tS_n})$.

8. (b) En écrivant l'exponentielle comme somme d'une série, établir :

$$\frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) \leq e^{t^2/2}.$$

8. (c) À l'aide de l'inégalité de Markov, montrer que :

$$P(S_n > s) \leq \exp\left(\frac{nt^2}{2} - ts\right).$$

8. (d) Justifier :

$$P(|S_n| > s) \leq 2 \exp\left(-\frac{s^2}{2n}\right).$$

9. Pour $\alpha \geq 0$, on pose :

$$\mathcal{C}_\alpha = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} [|S_k| > k^\alpha] \right).$$

9. (a) Justifier que $\mathcal{C}_\alpha$ est un événement.

9. (b) Si $\alpha > 1/2$, montrer que

$$\sum_{n \geq 1} P(|S_n| > n^\alpha)$$

converge.

9. (c) En déduire que $P(\mathcal{C}_\alpha) = 0$ pour tout $\alpha > 1/2$.

10. On étudie la série aléatoire

$$\sum_{n \geq 1} X_n/n.$$

On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des $\omega \in \Omega$ pour lesquels

$$\sum_{n \geq 1} X_n(\omega)/n$$

converge. On pose

$$K_n = \sum_{k=1}^n X_k/k$$

et :

$$K(\omega) = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} K_n(\omega) & \text{si } \omega \in \mathcal{C}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On admet que $\mathcal{C}$ est un événement et que K est une variable aléatoire.

10. (a) En utilisant 7(a), montrer que, si $0 < \alpha < 1$, alors $\overline{\mathcal{C}_\alpha} \subset \mathcal{C}$.

10. (b) À l'aide de 9, montrer que $P(\mathcal{C}) = 1$.

10. (c) Pour $\varepsilon > 0$, on considère :

$$E(\varepsilon) = \bigcap_{N=1}^{+\infty} \left(\bigcup_{n=N}^{+\infty} [|K - K_n| > \varepsilon] \right).$$

Montrer que $P(E(\varepsilon)) = 0$ et en déduire que (K_n) converge en probabilité vers K .

On admet que cette convergence en probabilité entraîne ici la convergence en loi vers K .

Dans les questions 11 et 12, les variables $(B_n)_{n \geq 1}$ sont indépendantes et suivent la loi de Bernoulli de paramètre $1/2$. On pose

$$H_n = \sum_{k=1}^n B_k/k.$$

11. (a) Déterminer l'espérance et la variance de H_n et leurs limites lorsque $n \rightarrow +\infty$.

11. (b) Montrer que, pour tout $r > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(H_n \leq r) = 0$.

11. (c) La fonction Python incomplète suivante effectue p simulations de $H_n - h_n(\mathcal{J})$, où $h_n(\mathcal{J})$ a été défini dans la partie II.

Python

```
import numpy as np

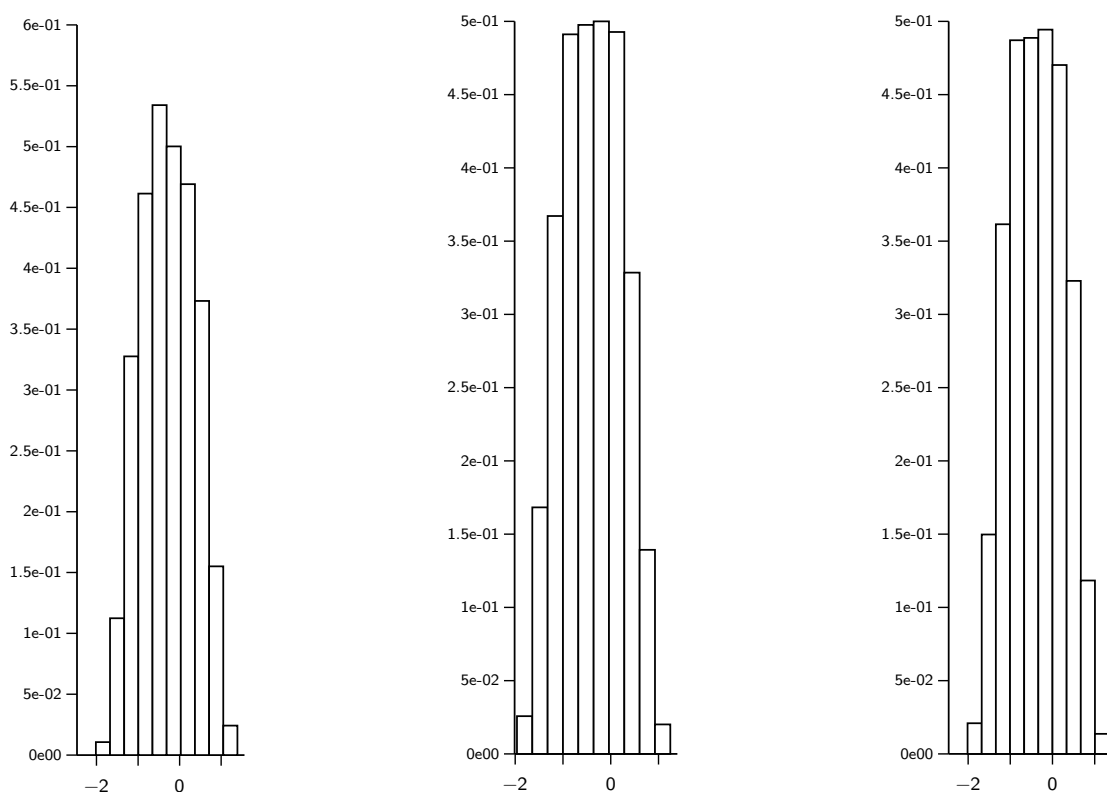
import numpy.random as rd

def simul(n, p):
    y = np.zeros(p)
    for i in range(p):
        for k in range(1, n + 1):
            y[i] = y[i] + (rd.binomial(1, 0.5) + ...) / k
    return y
```

11. (c)(i) Compléter la ligne contenant les points de suspension.

11. (c)(ii) Les trois histogrammes ci-dessous représentent des simulations de $H_n - h_n(\mathcal{J})$ pour $n = 50$, $n = 100$ et $n = 200$, dans cet ordre. Par quelles instructions Python peut-on obtenir de tels histogrammes ?

Pour la représentation, `plt.hist(y, bins=10, density=True, edgecolor='black', facecolor='white')` construit dix classes et normalise les hauteurs pour que l'aire totale soit 1. `edgecolor` et `facecolor` précisent les couleurs des contours et des intérieurs des barres. `plt.figure()` ouvre une nouvelle figure. Le nombre de simulations utilisé pour les figures originales n'est pas indiqué.



11. (c)(iii) Pourquoi ces histogrammes suggèrent-ils une convergence en loi de $(H_n - h_n(\mathcal{J}))$?

12. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $B'_n = \frac{1 + X_n}{2}$.

12. (a) Justifier :

$$\sum_{k=1}^n \frac{B'_k}{k} - h_n(\mathcal{J}) = \frac{K_n}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{2k}.$$

12. (b) En déduire que $(H_n - h_n(\mathcal{I}))$ converge en loi vers une variable de la forme $\lambda K + \mu$, où λ, μ sont des réels dont on précisera les valeurs.