



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC — 2018

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Partie I. Séries télescopiques

1. (a) Méthode 1 — Télescopage

Pour tout $n \geq 1$:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Ainsi, pour $N \geq 1$:

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{N+1}.$$

La somme partielle tend vers 1. La série converge et sa somme vaut 1.

Méthode 2 — Convergence par comparaison, puis calcul

On a $0 \leq 1/(n(n+1)) \leq 1/n^2$. La série de Riemann d'exposant 2 converge, donc la série étudiée converge par comparaison. Pour calculer sa somme, la décomposition $1/(n(n+1)) = 1/n - 1/(n+1)$ donne de nouveau la somme partielle $1 - 1/(N+1)$, puis la somme 1.

1. (b) La série numérique correspond au cas où $X_n = 1$ presque sûrement pour tout n , puisque :

$$\frac{X_n}{n} - \frac{X_{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} \text{ p.s.}$$

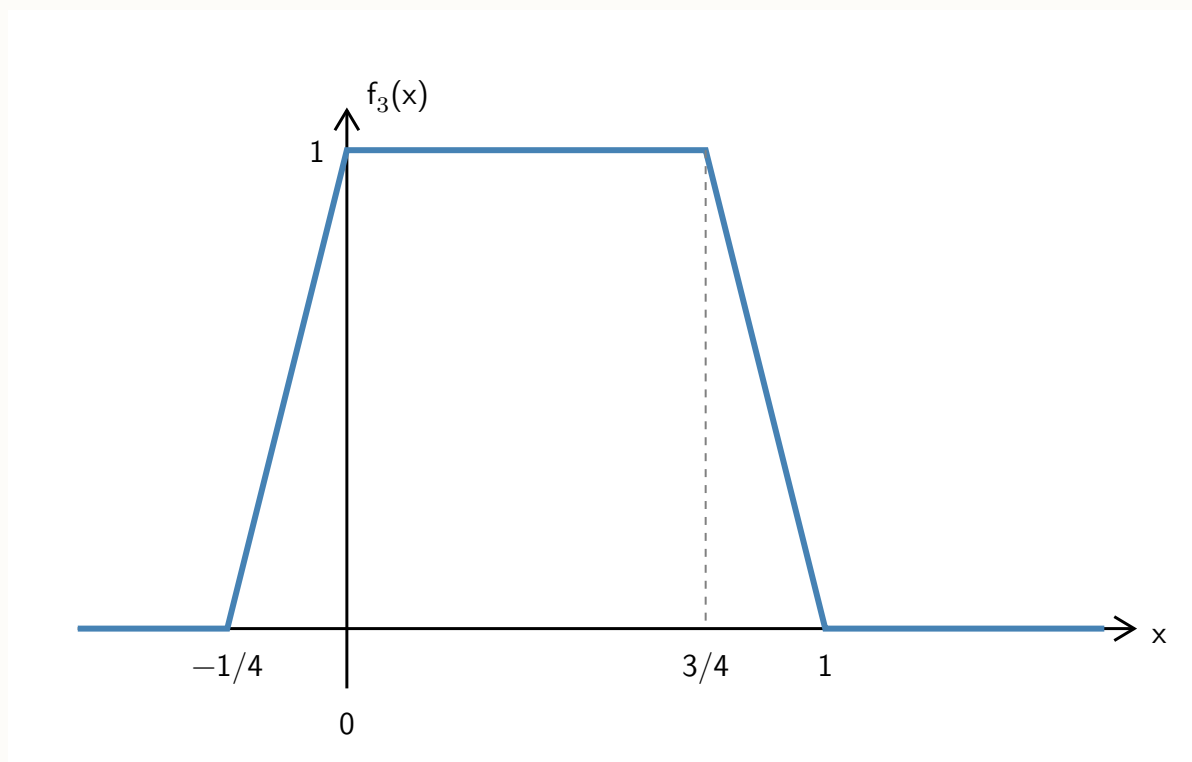
La variable de référence X suit donc la loi certaine de valeur 1. Des variables constantes sont indépendantes ; cette interprétation respecte les hypothèses de la partie I.

2. (a) Puisque f_n est une densité, son intégrale sur $\mathbb{R}$ vaut 1. Les deux morceaux affines ont chacun une aire $1/(2(n+1))$. Le morceau constant a une longueur $n/(n+1)$. Par conséquent :

$$1 = \frac{1}{2(n+1)} + c_n \frac{n}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)} = \frac{1 + nc_n}{n+1}.$$

Il en résulte $nc_n = n$, donc $c_n = 1$ pour tout $n \geq 1$.

La fonction f_3 est nulle en dehors de $[-1/4, 1]$. Son graphe monte linéairement de $(-1/4, 0)$ à $(0, 1)$, est horizontal jusqu'à $(3/4, 1)$, puis descend linéairement jusqu'à $(1, 0)$. Les raccordements sont continus.



2. (b) Posons $a_n = 1/(n+1)$ et $b_n = n/(n+1)$. Pour $-a_n \leq x \leq 0$:

$$F_n(x) = \int_{-a_n}^x (1 + (n+1)t) dt = \frac{n+1}{2}(x + a_n)^2.$$

En particulier $F_n(0) = 1/(2(n+1))$. Pour $0 \leq x \leq b_n$, le morceau de densité constant égal à 1 donne :

$$F_n(x) = x + \frac{1}{2(n+1)}.$$

Pour $b_n \leq x \leq 1$, il est plus simple de calculer la probabilité de la queue supérieure :

$$1 - F_n(x) = \int_x^1 (n+1)(1-t) dt = \frac{n+1}{2}(1-x)^2.$$

Finalement :

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -a_n, \\ \frac{n+1}{2}(x+a_n)^2 & \text{si } -a_n \leq x \leq 0, \\ x + \frac{1}{2(n+1)} & \text{si } 0 \leq x \leq b_n, \\ 1 - \frac{n+1}{2}(1-x)^2 & \text{si } b_n \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Les formules coïncident aux points communs des intervalles. Après le calcul de c_n, f_n est continue sur tout $\mathbb{R}$: ses valeurs aux raccordements $-a_n, 0, b_n, 1$ sont respectivement 0, 1, 1, 0. Le théorème fondamental du calcul intégral donne $F'_n = f_n$ partout. Donc F_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2. (c) La fonction de répartition de la loi uniforme sur $[0, 1]$ est :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ x & \text{si } 0 < x < 1, \\ 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$. Si $x < 0$, pour n assez grand on a $x < -a_n$, donc $F_n(x) = 0$. Pour $x = 0$, $F_n(0) = 1/(2(n+1)) \rightarrow 0$.

Si $0 < x < 1$, alors $b_n \rightarrow 1$ et, pour n assez grand, $x < b_n$. Donc

$F_n(x) = x + 1/(2(n+1)) \rightarrow x$. Pour $x \geq 1$, $F_n(x) = 1$.

Ainsi $F_n(x) \rightarrow F(x)$ en tout réel x , donc en tout point de continuité de F . Par définition, Y_n converge en loi vers une variable $Y \sim \mathcal{U}([0, 1])$.

3. (a) Posons $Z_n = X_{n+1}/(n+1)$. Pour $\varepsilon > 0$, les variables X_{n+1} et X ont même loi, donc :

$$P(|Z_n| > \varepsilon) = P(|X| > (n+1)\varepsilon).$$

L'événement à droite est inclus dans $[X > (n+1)\varepsilon] \cup [X \leq -(n+1)\varepsilon]$. D'où :

$$0 \leq P(|Z_n| > \varepsilon) \leq 1 - F_X((n+1)\varepsilon) + F_X(-(n+1)\varepsilon) \rightarrow 0.$$

Les limites usuelles d'une fonction de répartition suffisent ; aucune hypothèse d'existence d'un moment n'est utilisée. Ainsi $Z_n \rightarrow 0$ en probabilité.

3. (b) Méthode 1 — Encadrer les fonctions de répartition

On a $D_n = X_1 - Z_n$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $\eta > 0$:

$$[X_1 \leq x - \eta] \cap [|Z_n| \leq \eta] \subset [D_n \leq x],$$

et :

$$[D_n \leq x] \cap [|Z_n| \leq \eta] \subset [X_1 \leq x + \eta].$$

Ainsi :

$$F_X(x - \eta) - P(|Z_n| > \eta) \leq F_{D_n}(x) \leq F_X(x + \eta) + P(|Z_n| > \eta).$$

Fixons x et $\varepsilon > 0$. Comme X possède une densité, F_X est continue en x . On choisit donc $\eta > 0$ tel que $F_X(x) - F_X(x - \eta) < \varepsilon/2$ et $F_X(x + \eta) - F_X(x) < \varepsilon/2$. D'après 3(a), pour n assez grand, $P(|Z_n| > \eta) < \varepsilon/2$.

Les deux inégalités donnent alors $|F_{D_n}(x) - F_X(x)| < \varepsilon$. Donc $F_{D_n}(x) \rightarrow F_X(x)$ pour tout réel x et D_n converge en loi vers X .

Méthode 2 — Exploiter la densité bornée

Soit $M > 0$ tel que $0 \leq f \leq M$. Pour $a < b$:

$$F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f(t) \, dt \leq M(b - a).$$

Les inclusions précédentes donnent alors directement :

$$|F_{D_n}(x) - F_X(x)| \leq M\eta + P(|Z_n| > \eta).$$

Pour une précision $\varepsilon > 0$, prenons $\eta = \varepsilon/(2M)$, puis n assez grand pour que le dernier terme soit inférieur à $\varepsilon/2$. On obtient la convergence voulue, et même un contrôle uniforme en x . Les deux preuves reposent sur des encadrements particuliers et n'utilisent aucun théorème de substitution dans une convergence en loi.

3. (c) La variable $W_n = -X_{n+1}/(n+1)$ admet, par transformation affine, la densité :

$$q_n(z) = (n+1)f(-(n+1)z).$$

Les variables X_1 et W_n sont indépendantes, car X_1 et X_{n+1} sont indépendantes et W_n est une fonction de la seconde. On peut donc appliquer le résultat de convolution pour la somme de deux variables à densité indépendantes. Le produit sous l'intégrale est intégrable pour chaque x , puisque :

$$0 \leq f(t)q_n(x-t) \leq (n+1)Mf(t), \quad \int_{\mathbb{R}} (n+1)Mf(t) dt = (n+1)M < +\infty.$$

La convolution donne une densité de $D_n = X_1 + W_n$:

$$\begin{aligned} f_{D_n}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)q_n(x-t) dt \\ &= (n+1) \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f(-(n+1)(x-t)) dt \\ &= (n+1) \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f((n+1)(t-x)) dt. \end{aligned}$$

C'est la formule demandée. Le seul résultat utilisé pour la somme est la convolution autorisée ; aucun calcul par densité jointe ni échange d'intégrales n'intervient.

3. (d) Prenons $X \sim \mathcal{U}([0, 1])$, avec $f = \mathbf{1}_{[0,1]}$ comme densité. Elle est bornée par 1. La formule de 3(c) donne :

$$f_{D_n}(x) = (n+1) \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[0,1]}(t)\mathbf{1}_{[0,1]}((n+1)(t-x)) dt.$$

L'intégrale est la longueur de l'intersection $[0, 1] \cap [x, x + 1/(n+1)]$. Posons $a = 1/(n+1)$.

Si $x < -a$ ou $x > 1$, cette longueur est nulle. Si $-a \leq x \leq 0$, elle vaut $x + a$, donc la densité vaut $1 + (n+1)x$. Si $0 \leq x \leq 1 - a$, elle vaut a , donc la densité vaut 1. Si $1 - a \leq x \leq 1$, elle vaut $1 - x$, donc la densité vaut $(n+1)(1 - x)$.

Cette densité est exactement f_n de la question 2, où $c_n = 1$. Les variables D_n et Y_n ont donc la même loi. Par 3(b), D_n converge en loi vers $X \sim \mathcal{U}([0, 1])$, donc Y_n converge en loi vers cette même loi, comme en 2(c).

4. (a) Les variables X_n/n et $-X_{n+1}/(n+1)$ sont indépendantes et normales centrées, de variances respectives $1/n^2$ et $1/(n+1)^2$. La stabilité des lois normales par somme de variables indépendantes donne :

$$U_n \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}\right).$$

La deuxième coordonnée de $\mathcal{N}$ est ici la variance.

4. (b) Les sommes partielles sont télescopiques :

$$T_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{X_k}{k} - \frac{X_{k+1}}{k+1} \right) = X_1 - \frac{X_{n+1}}{n+1}.$$

La densité normale centrée réduite est bornée par $1/\sqrt{2\pi}$. La question 3(b) s'applique et donne $T_n \rightarrow X$ en loi, avec $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Par la définition donnée en préambule, la série

$$\sum_{n \geq 1} U_n$$

converge donc en loi vers cette loi normale.

On peut également vérifier cette conclusion directement : T_n est normale centrée de variance $1 + 1/(n+1)^2$, et sa fonction de répartition vaut $\Phi(x/\sqrt{1 + 1/(n+1)^2})$, qui tend vers $\Phi(x)$ par continuité de Φ .

4. (c)(i) Les U'_k sont indépendantes et normales centrées. Leur somme T'_n est donc normale centrée, de variance :

$$v_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k^2}.$$

Les deux séries de Riemann convergent. Ainsi :

$$v_n \longrightarrow \zeta(2) + (\zeta(2) - 1) = 2\zeta(2) - 1 = \frac{\pi^2}{3} - 1 =: v.$$

Le nombre v est strictement positif : c'est la somme d'une série positive dont le premier terme vaut $1 + 1/4$. Pour tout réel x , $F_{T'_n}(x) = \Phi(x/\sqrt{v_n}) \rightarrow \Phi(x/\sqrt{v})$ par continuité. La fonction limite est celle de $\mathcal{N}(0, v)$ et est continue. Donc :

$$T'_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{\pi^2}{3} - 1\right).$$

4. (c)(ii) L'égalité des lois de chaque terme ne suffit pas à donner l'égalité des lois des sommes : la dépendance entre les termes compte. Les U'_n sont indépendantes par hypothèse, contrairement aux U_n .

Pour le vérifier, U_n et U_{n+1} partagent la variable X_{n+1} , avec des coefficients opposés. Par bilinéarité de la covariance et indépendance des X_k distinctes :

$$\text{Cov}(U_n, U_{n+1}) = -\frac{\mathbb{V}(X_{n+1})}{(n+1)^2} = -\frac{1}{(n+1)^2} \neq 0.$$

Ils ne sont donc pas indépendants. Le télescopage donne pour T_n une variance tendant vers 1, tandis que l'indépendance donne pour T'_n une variance tendant vers $\pi^2/3 - 1$. Il n'y a aucune contradiction avec 3(b) ni 4(b).

Partie II. Séries harmoniques lacunaires

5. (a) Les carrés parfaits inférieurs ou égaux à n sont j^2 , pour $1 \leq j \leq \lfloor \sqrt{n} \rfloor$. Ainsi :

$$h_n(\mathcal{D}) = \sum_{j=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \frac{1}{j^2}.$$

5. (b) Comme $\lfloor \sqrt{n} \rfloor \rightarrow +\infty$, les sommes de 5(a) tendent vers la somme de la série de Riemann d'exposant 2. Donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(\mathcal{D}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathbf{1}_{\mathcal{D}}(n)}{n} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Le passage utilise simplement les sommes partielles d'une série convergente ; aucun réarrangement de série de signe variable n'est effectué.

5. (c) Si $m = c^6$ pour $c \in \mathbb{N}^*$, alors $m = (c^3)^2 = (c^2)^3$, donc $m \in \mathcal{D} \cap \mathcal{T}$.

Réciproquement, soit $m \in \mathcal{D} \cap \mathcal{T}$. Il existe $a, b \in \mathbb{N}^*$ tels que $m = a^2 = b^3$. Comme $b > 0$:

$$\sqrt{b} = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}.$$

Le résultat admis du sujet impose donc que b soit un carré parfait : $b = c^2$ pour un entier $c \geq 1$. Alors $m = b^3 = c^6$, donc $m^{1/6} = c \in \mathbb{N}^*$.

On a établi $\mathcal{D} \cap \mathcal{T} = \{c^6 : c \in \mathbb{N}^*\}$.

5. (d) L'identité des indicatrices donne, pour chaque entier $k \geq 1$:

$$\mathbf{1}_{\mathcal{D} \cup \mathcal{T}}(k) = \mathbf{1}_{\mathcal{D}}(k) + \mathbf{1}_{\mathcal{T}}(k) - \mathbf{1}_{\mathcal{D} \cap \mathcal{T}}(k).$$

Donc, pour chaque n :

$$h_n(\mathcal{D} \cup \mathcal{T}) = \sum_{j=1}^{\lfloor n^{1/2} \rfloor} \frac{1}{j^2} + \sum_{j=1}^{\lfloor n^{1/3} \rfloor} \frac{1}{j^3} - \sum_{j=1}^{\lfloor n^{1/6} \rfloor} \frac{1}{j^6}.$$

Les trois séries de Riemann convergent, puisque leurs exposants 2, 3, 6 sont supérieurs à 1. Le passage à la limite dans cette égalité de sommes finies donne :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathbf{1}_{\mathcal{D} \cup \mathcal{T}}(n)}{n} = \zeta(2) + \zeta(3) - \zeta(6).$$

Cela prouve aussi la convergence de $(h_n(\mathcal{D} \cup \mathcal{T}))$.

6. (a) Pour $t \in [n, n+1]$, on a $t - n \in [0, 1]$ et $2t - 1 \geq 2n - 1 > 0$. Par conséquent :

$$0 \leq \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2t-1} = \frac{2(t-n)}{(2n-1)(2t-1)} \leq \frac{2}{(2n-1)^2}.$$

L'intégration sur un segment de longueur 1 donne $0 \leq u_n \leq 2/(2n-1)^2$.

6. (b) Posons $m = \lfloor (n+1)/2 \rfloor$. Il y a exactement m entiers impairs entre 1 et n , d'où :

$$h_n(\mathcal{J}) = \sum_{k=1}^m \frac{1}{2k-1}.$$

Par définition :

$$u_k = \frac{1}{2k-1} - \int_k^{k+1} \frac{1}{2t-1} dt.$$

En sommant de 1 à m et en utilisant la relation de Chasles :

$$\sum_{k=1}^m u_k = h_n(\mathcal{J}) - \int_1^{m+1} \frac{1}{2t-1} dt.$$

Enfin $m+1 = \lfloor (n+3)/2 \rfloor$, ce qui donne la formule demandée.

6. (c) Posons $q_n = 2\lfloor (n+3)/2 \rfloor - 1$. Si $n = 2r$ est pair, $q_n = n+1$; si $n = 2r+1$ est impair, $q_n = n+2$. Dans les deux cas :

$$1 \leq \frac{q_n}{n} \leq 1 + \frac{2}{n}.$$

Pour $z \geq 0$, l'inégalité $0 \leq \ln(1+z) \leq z$ découle de l'intégrale

$\ln(1+z) = \int_0^z 1/(1+t) dt$. La croissance du logarithme et cette inégalité donnent donc :

$$0 \leq \ln(q_n/n) \leq \ln(1+2/n) \leq \frac{2}{n}.$$

6. (d) Comme $2n-1 \geq n$, la question 6(a) donne $0 \leq u_n \leq 2/n^2$. La série de Riemann d'exposant 2 converge ; par comparaison,

$$\sum_{n \geq 1} u_n$$

converge. On peut donc poser

$$\delta = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n.$$

Avec $m = \lfloor (n+1)/2 \rfloor$ et $q_n = 2m+1$, la primitive $\frac{1}{2} \ln(2t-1)$ donne :

$$\int_1^{m+1} \frac{1}{2t-1} dt = \frac{1}{2} \ln(2m+1) = \frac{1}{2} \ln q_n.$$

La question 6(b) devient :

$$h_n(\mathcal{J}) - \ln(\sqrt{n}) = \sum_{k=1}^m u_k + \frac{1}{2} \ln(q_n/n).$$

Lorsque $n \rightarrow +\infty$, $m \rightarrow +\infty$, donc la somme tend vers δ . D'après 6(c), le dernier terme est compris entre 0 et $1/n$ et tend vers 0. On obtient :

$$h_n(\mathcal{J}) - \ln(\sqrt{n}) \rightarrow \delta.$$

En particulier $h_n(\mathcal{J})$ tend vers $+\infty$, puisque $\ln(\sqrt{n})$ tend vers $+\infty$.

6. (e) Méthode 1 — Comparaison avec une intégrale

La fonction $t \mapsto 2/(2t-1)^2$ est positive et décroissante sur $[1, +\infty[$. Pour $k \geq n+1$, avec $n \geq 1$:

$$u_k \leq \frac{2}{(2k-1)^2} \leq \int_{k-1}^k \frac{2}{(2t-1)^2} dt.$$

En sommant jusqu'à $N > n$, puis en faisant tendre N vers $+\infty$:

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq \int_n^{+\infty} \frac{2}{(2t-1)^2} dt = \frac{1}{2n-1}.$$

L'intégrale impropre converge, car sa primitive est $-1/(2t-1)$ et cette primitive tend vers 0 à l'infini.

Méthode 2 — Majorant télescopique plus précis

Sur $[k, k+1]$, la décroissance de $t \mapsto 1/(2t-1)$ donne :

$$0 \leq \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2t-1} \leq \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}.$$

En intégrant sur un intervalle de longueur 1, puis en sommant de $k = n+1$ à N :

$$\sum_{k=n+1}^N u_k \leq \sum_{k=n+1}^N \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2N+1}.$$

Le passage à la limite donne la borne plus forte

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq 1/(2n+1),$$

qui implique la borne demandée $1/(2n-1)$.

6. (f) Notons $a_n = h_n(\mathcal{J}) - \ln(\sqrt{n})$ et $m = \lfloor (n+1)/2 \rfloor$. D'après 6(d) :

$$\delta - a_n = \sum_{k=m+1}^{+\infty} u_k - \frac{1}{2} \ln(q_n/n).$$

La queue de série est positive ou nulle, et $0 \leq \frac{1}{2} \ln(q_n/n) \leq 1/n$ par 6(c). Cela donne la borne inférieure $\delta - a_n \geq -1/n$.

Pour la borne supérieure, on supprime le terme logarithmique positif et on applique 6(e) à m :

$$\delta - a_n \leq \sum_{k=m+1}^{+\infty} u_k \leq \frac{1}{2m-1}.$$

Si n est pair, $2m-1 = n-1$; s'il est impair, $2m-1 = n$. Pour $n \geq 3$, ces deux nombres sont supérieurs ou égaux à $n-2 > 0$. Ainsi :

$$-\frac{1}{n} \leq \delta - a_n \leq \frac{1}{n-2}.$$

En particulier $|\delta - a_n| \leq 1/(n-2)$.

6. (g)(i) Code adapté en Python. La variable n commence à 3 puis augmente de 2. Pour $\text{eps} = 0.2$, la condition $1/(n-2) > 0.2$ est vraie à $n = 3$ et à $n = 5$, puis fausse à $n = 7$. Les valeurs successives de s , en incluant l'initialisation, sont donc a_3, a_5, a_7 :

$$a_3 = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \ln 3 \approx 0,784027,$$

$$a_5 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} \ln 5 \approx 0,728614,$$

$$a_7 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{2} \ln 7 \approx 0,703235.$$

La valeur renvoyée est a_7 .

6. (g)(ii) Après l'instruction $n = n + 2$, l'ancienne valeur de s est a_{n-2} . Comme les indices sont impairs, $h_n(\mathcal{J}) = h_{n-2}(\mathcal{J}) + 1/n$. Donc :

$$a_n = a_{n-2} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{n}{n-2} \right).$$

Le programme complet est :

Python

```
import numpy as np

def delta(eps):
    n = 3
    s = 1 + 1 / 3 - np.log(3) / 2
    while 1 / (n - 2) > eps:
        n = n + 2
        s = s + 1 / n - np.log(n / (n - 2)) / 2
    return s
```

L'invariant de boucle est $s = h_n(I) - \log(n)/2$. L'initialisation le vérifie ; la formule de mise à jour le préserve. Les logarithmes sont bien définis puisque $n \geq 5$ à chaque mise à jour et $n - 2 > 0$.

Ce code a été exécuté. Pour $\text{eps} = 0.2$, il renvoie une valeur approchée de 0,703235 ; les valeurs successives ont été contrôlées à partir de la formule explicite de a_n .

6. (g)(iii) Pour tout $\text{eps} > 0$, les valeurs de n tendraient vers $+\infty$ si la boucle se poursuivait. Or $1/(n - 2) \rightarrow 0$, donc la condition finit par être fausse : l'algorithme termine.

À l'arrêt, $1/(n - 2) \leq \text{eps}$. D'après 6(f), $|\delta - s| \leq 1/(n - 2) \leq \text{eps}$. En arithmétique exacte, on peut donc demander une précision aussi petite que souhaité. Avec les nombres flottants de Python, l'arrondi et le temps de calcul limitent les précisions effectivement réalisables ; la preuve de la borne porte sur l'algorithme mathématique.

Partie III. Séries de Riemann alternées

7. (a)(i) Posons $s_0 = 0$. Comme $x_k = s_k - s_{k-1}$:

$$\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{k^\beta} = \sum_{k=1}^n \frac{s_k}{k^\beta} - \sum_{k=1}^n \frac{s_{k-1}}{k^\beta}.$$

Dans la seconde somme, le changement d'indice $j = k - 1$ donne

$$\sum_{j=1}^{n-1} s_j / (j+1)^\beta,$$

puisque le terme s_0 est nul. On sépare le dernier terme de la première somme :

$$\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{k^\beta} = \frac{s_n}{n^\beta} + \sum_{k=1}^{n-1} s_k \left(\frac{1}{k^\beta} - \frac{1}{(k+1)^\beta} \right).$$

Cette identité porte uniquement sur des sommes finies.

7. (a)(ii) Puisque $\beta > \alpha \geq 0$, on a $\beta > 0$. L'hypothèse donne :

$$\left| \frac{s_n}{n^\beta} \right| \leq M n^{\alpha-\beta} \rightarrow 0.$$

Pour $k \geq 1$, le théorème fondamental du calcul intégral appliqué à $t \mapsto t^{-\beta}$ donne :

$$0 \leq \frac{1}{k^\beta} - \frac{1}{(k+1)^\beta} = \int_k^{k+1} \frac{\beta}{t^{\beta+1}} dt \leq \frac{\beta}{k^{\beta+1}}.$$

Ainsi :

$$\left| s_k \left(\frac{1}{k^\beta} - \frac{1}{(k+1)^\beta} \right) \right| \leq \frac{M\beta}{k^{\beta+1-\alpha}}.$$

L'exposant $\beta + 1 - \alpha$ est strictement supérieur à 1. La série du membre de droite converge, donc la série des termes $s_k(k^{-\beta} - (k+1)^{-\beta})$ converge absolument, puis converge.

Dans l'identité de 7(a)(i), le premier terme tend vers 0 et la somme restante tend vers une limite finie. La série

$$\sum_{n \geq 1} x_n / n^\beta$$

converge donc.

7. (b) Prenons $x_n = (-1)^n$. Ses sommes partielles sont $s_n = 0$ si n est pair et $s_n = -1$ si n est impair. Donc $|s_n| \leq 1 = 1 \times n^0$.

La question 7(a) s'applique avec $\alpha = 0$, $M = 1$ et $\beta = x > 0$. Elle donne la convergence de

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^n / n^x$$

pour tout $x > 0$, sans supposer connu un critère général sur les séries alternées.

8. (a) Chaque X_k vaut 1 ou -1 avec probabilité $1/2$. Donc :

$$E(e^{tX_k}) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}.$$

Puisque les X_k sont indépendantes, leurs transformations e^{tX_k} sont indépendantes. Elles sont bornées, donc leurs espérances existent et l'espérance de leur produit est le produit des espérances. Ainsi :

$$E(e^{tS_n}) = E\left(\prod_{k=1}^n e^{tX_k}\right) = \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^n.$$

8. (b) Les séries exponentielles sont absolument convergentes. En additionnant celles de e^t et e^{-t} , les termes impairs s'annulent et l'on obtient :

$$\frac{e^t + e^{-t}}{2} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{t^{2j}}{(2j)!}.$$

Pour $j \geq 1$:

$$(2j)! = \prod_{\ell=1}^j (2\ell)(2\ell-1) \geq \prod_{\ell=1}^j 2\ell = 2^j j!.$$

Pour $j = 0$, les deux quantités valent 1. Les termes des séries sont positifs ou nuls ; la comparaison terme à terme, d'abord des sommes finies puis de leurs limites, donne :

$$\frac{e^t + e^{-t}}{2} \leq \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{t^{2j}}{2^j j!} = e^{t^2/2}.$$

8. (c) Pour $t > 0$, l'exponentielle est strictement croissante, donc $[S_n > s] = [e^{tS_n} > e^{ts}]$. La variable e^{tS_n} est positive et bornée pour n fixé, donc intégrable. Markov et 8(a)-(b) donnent :

$$P(S_n > s) \leq \frac{E(e^{tS_n})}{e^{ts}} \leq \frac{e^{nt^2/2}}{e^{ts}} = \exp\left(\frac{nt^2}{2} - ts\right).$$

8. (d) Pour $s > 0$ fixé, l'exposant est minimal lorsque $t = s/n > 0$, comme le montre l'identité :

$$\frac{nt^2}{2} - ts = \frac{n}{2} \left(t - \frac{s}{n}\right)^2 - \frac{s^2}{2n}.$$

La question 8(c) donne alors $P(S_n > s) \leq \exp(-s^2/(2n))$.

Chaque X_k a même loi que $-X_k$, et l'indépendance est conservée lorsque toutes les variables sont changées en leurs opposées. Ainsi S_n et $-S_n$ ont même loi et $P(S_n < -s) = P(S_n > s)$.

Les deux événements étant disjoints :

$$P(|S_n| > s) = P(S_n > s) + P(S_n < -s) \leq 2 \exp\left(-\frac{s^2}{2n}\right).$$

9. (a) Question adaptée au programme actuel : on vérifie que l'ensemble défini est un événement, sans développer la théorie des tribus.

Pour chaque $k \geq 1$, S_k est une variable aléatoire, donc $A_k = [|S_k| > k^\alpha]$ est un événement. Pour chaque n , la réunion dénombrable $\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$ est un événement. Son intersection dénombrable sur $n \geq 1$ est également un événement. Ainsi $\mathcal{C}_\alpha$ est bien un événement de l'espace probabilisé.

Il représente les réalisations pour lesquelles l'inégalité $|S_k| > k^\alpha$ se produit pour une infinité d'indices k .

9. (b) Pour $\alpha > 1/2$, posons $\gamma = 2\alpha - 1 > 0$. La question 8(d) avec $s = n^\alpha$ donne :

$$P(|S_n| > n^\alpha) \leq 2 \exp\left(-\frac{n^\gamma}{2}\right).$$

Les croissances comparées donnent $\ln n / n^\gamma \rightarrow 0$. Donc, pour n assez grand, $2 \ln n \leq n^\gamma / 2$, ce qui implique :

$$\exp\left(-\frac{n^\gamma}{2}\right) \leq \exp(-2 \ln n) = \frac{1}{n^2}.$$

La série de Riemann d'exposant 2 converge. La comparaison montre que

$$\sum_{n \geq 1} P(|S_n| > n^\alpha)$$

converge.

9. (c) Posons $A_k = [|S_k| > k^\alpha]$ et $R_n = \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$. Les R_n décroissent et leur intersection est $\mathcal{C}_\alpha$. La continuité décroissante des probabilités donne :

$$P(\mathcal{C}_\alpha) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(R_n).$$

Pour un entier $N \geq n$, la probabilité de $\bigcup_{k=n}^N A_k$ est majorée par

$$\sum_{k=n}^N P(A_k).$$

En faisant tendre N vers l'infini par continuité croissante, on obtient :

$$0 \leq P(R_n) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} P(A_k).$$

La série converge par 9(b), donc son reste tend vers 0. Ainsi $P(R_n) \rightarrow 0$ et $P(\mathcal{C}_\alpha) = 0$. Aucun théorème général supplémentaire sur les événements qui se produisent une infinité de fois n'est invoqué.

10. (a) Soit $\omega \in \overline{\mathcal{C}_\alpha}$, avec $0 < \alpha < 1$. La négation de la définition de $\mathcal{C}_\alpha$ signifie qu'il existe un entier $N \geq 1$ tel que :

$$\forall k \geq N, \quad |S_k(\omega)| \leq k^\alpha.$$

Posons :

$$M_\omega = \max \left(\{1\} \cup \left\{ \frac{|S_k(\omega)|}{k^\alpha} : 1 \leq k < N \right\} \right).$$

Cette définition utilise un ensemble fini contenant 1 ; elle est donc valable aussi lorsque $N = 1$. On a $M_\omega > 0$ et $|S_k(\omega)| \leq M_\omega k^\alpha$ pour tous les entiers $k \geq 1$.

Appliquons 7(a) à la suite réelle $x_k = X_k(\omega)$, dont les sommes partielles sont $S_k(\omega)$, avec $\beta = 1 > \alpha$. La série

$$\sum_{k \geq 1} X_k(\omega)/k$$

converge. Donc $\omega \in \mathcal{C}$, et $\overline{\mathcal{C}_\alpha} \subset \mathcal{C}$.

10. (b) Choisissons un réel α tel que $1/2 < \alpha < 1$, par exemple $\alpha = 3/4$. La question 9(c) donne $P(\mathcal{C}_\alpha) = 0$, donc $P(\overline{\mathcal{C}_\alpha}) = 1$.

Par 10(a), cet événement est inclus dans $\mathcal{C}$. Ainsi $1 \leq P(\mathcal{C}) \leq 1$, d'où $P(\mathcal{C}) = 1$.

Résultat admis dans cette version adaptée : $\mathcal{C}$ est un événement et l'application K , définie comme limite des K_n sur $\mathcal{C}$ et comme 0 ailleurs, est une variable aléatoire. Ces propriétés sont déjà admises dans le sujet original. Elles permettent de parler des probabilités impliquant K à la question suivante.

10. (c) Pour $\omega \in \mathcal{C}$, la définition donne $K_n(\omega) \rightarrow K(\omega)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe donc un rang à partir duquel $|K(\omega) - K_n(\omega)| \leq \varepsilon$. Un tel ω ne peut appartenir à $E(\varepsilon)$.

Ainsi $E(\varepsilon) \subset \overline{\mathcal{C}}$. Par 10(b), $P(\overline{\mathcal{C}}) = 0$, donc $P(E(\varepsilon)) = 0$.

Posons $R_N(\varepsilon) = \bigcup_{n=N}^{+\infty} [|K - K_n| > \varepsilon]$. Cette suite d'événements décroît et son intersection est $E(\varepsilon)$. Par continuité décroissante :

$$P(R_N(\varepsilon)) \longrightarrow P(E(\varepsilon)) = 0.$$

Comme $[|K - K_N| > \varepsilon] \subset R_N(\varepsilon)$:

$$0 \leq P(|K - K_N| > \varepsilon) \leq P(R_N(\varepsilon)) \longrightarrow 0.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, la probabilité de l'écart supérieur à ε tend donc vers 0. C'est exactement $K_n \rightarrow K$ en probabilité.

Résultat admis dans cette version adaptée : la suite (K_n) converge alors en loi vers K , comme autorisé dans l'énoncé. La question 12 sera traitée par un encadrement direct, sans substitution automatique dans cette convergence en loi.

11. (a) Chaque B_k a une espérance $1/2$ et une variance $1/4$. La somme définissant H_n est finie et ses termes sont bornés, donc espérance et variance existent. Par linéarité :

$$E(H_n) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Les B_k/k sont indépendantes, donc :

$$\mathbb{V}(H_n) = \sum_{k=1}^n \frac{\mathbb{V}(B_k)}{k^2} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}.$$

La série harmonique diverge vers $+\infty$, et la série de Riemann d'exposant 2 converge vers $\pi^2/6$. Donc :

$$E(H_n) \longrightarrow +\infty, \quad \mathbb{V}(H_n) \longrightarrow \frac{\pi^2}{24}.$$

On a aussi $\mathbb{V}(H_n) \leq \pi^2/24$ pour tout n .

11. (b) Fixons $r > 0$ et posons $m_n = E(H_n)$. D'après 11(a), pour n assez grand, $m_n > r$ et $m_n - r > 0$. Sur l'événement $[H_n \leq r]$, on a $|H_n - m_n| \geq m_n - r$. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne :

$$P(H_n \leq r) \leq P(|H_n - m_n| \geq m_n - r) \leq \frac{\mathbb{V}(H_n)}{(m_n - r)^2} \leq \frac{\pi^2}{24(m_n - r)^2}.$$

Comme $m_n \rightarrow +\infty$, la dernière quantité tend vers 0. Ainsi $P(H_n \leq r) \rightarrow 0$ pour tout $r > 0$.

11. (c)(i) Code adapté en Python. Pour chaque indice k , il faut ajouter $(B_k - \mathbf{1}_{\mathcal{J}}(k))/k$. L'indicatrice des entiers impairs vaut 1 si k est impair et 0 sinon. On peut la construire en utilisant $(-1)^k$:

$$\mathbf{1}_{\mathcal{J}}(k) = \frac{1 - (-1)^k}{2}.$$

Ainsi le terme à ajouter au tirage de Bernoulli est $((-1)^k - 1)/2$, comme dans le programme complet ci-dessous.

Python

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simul(n, p):
    y = np.zeros(p)
    for i in range(p):
        for k in range(1, n + 1):
            y[i] = y[i] + (rd.binomial(1, 0.5)
                          + ((-1) ** k - 1) / 2) / k
    return y
```

Le tableau y contient p simulations. Pour chaque i , la boucle sur k construit une nouvelle somme de n tirages de Bernoulli indépendants, en retranchant $1/k$ lorsque k est impair. `range(1, n + 1)` parcourt bien les entiers de 1 à n inclus. La sortie est un tableau de taille p .

Le code a été exécuté pour les trois tailles de la question suivante, avec 10 000 simulations pour chacune. La construction des trois histogrammes et leur normalisation ont été contrôlées. Ces vérifications numériques ne remplacent aucune preuve.

11. (c)(ii) Le nombre de simulations d'origine n'étant pas indiqué, on peut choisir par exemple $p = 10\,000$. Les instructions suivantes produisent trois histogrammes comparables, sans prétendre reproduire les tirages aléatoires exacts du document :

Python

```
import matplotlib.pyplot as plt

p = 10000

for n in [50, 100, 200]:
    y = simul(n, p)
    plt.figure()
    plt.hist(y, bins=10, density=True,
             edgecolor='black', facecolor='white')
    plt.show()
```

Les commandes `bins`, `density`, `edgecolor` et `facecolor` sont expliquées dans le sujet adapté. Avec `density=True`, les hauteurs sont des fréquences divisées par les largeurs des classes; la somme des aires des barres vaut 1.

Ce code a été exécuté avec un affichage non interactif. Les trois histogrammes ont bien été construits. Une simulation nouvelle donne des barres différentes de celles du scan, puisque les réalisations originales ne sont pas connues.

11. (c)(iii) Lorsque n passe de 50 à 100 puis 200, les histogrammes gardent une forme et une localisation proches, sans translation croissante comme on l'observerait pour H_n seul. Cela suggère que la loi de $H_n - h_n(\mathcal{J})$ se stabilise.

La convergence en loi reste à démontrer : trois histogrammes ne suffisent pas à prouver l'existence d'une loi limite, ni à affirmer que cette loi est normale. La question 12 donnera une justification exacte et identifiera la variable limite.

12. (a) Pour chaque n , la variable $B'_n = (1 + X_n)/2$ vaut 0 ou 1 avec probabilité $1/2$. Elle suit donc une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$. Les B'_n sont indépendantes, car elles sont obtenues par des transformations séparées des X_n indépendantes.

Pour tout $k \geq 1$, l'expression de l'indicatrice impaire donne :

$$B'_k - \mathbf{1}_{\mathcal{J}}(k) = \frac{1 + X_k}{2} - \frac{1 - (-1)^k}{2} = \frac{X_k + (-1)^k}{2}.$$

En divisant par k puis en sommant de 1 à n :

$$\sum_{k=1}^n \frac{B'_k}{k} - h_n(\mathcal{J}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{X_k}{k} + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{2k} = \frac{K_n}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{2k}.$$

12. (b) Calcul de la constante déterministe

La série

$$\sum_{k \geq 1} (-1)^k / k$$

converge d'après 7(b). Pour calculer sa somme, on part de l'identité géométrique finie, valable pour $t \in [0, 1]$:

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k t^{k-1} = -\frac{1 - (-t)^n}{1 + t}.$$

En intégrant cette identité finie sur $[0, 1]$:

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} = -\int_0^1 \frac{1}{1+t} dt + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt.$$

Le premier terme vaut $-\ln 2$. La valeur absolue du second est majorée par

$\int_0^1 t^n dt = 1/(n+1)$, qui tend vers 0. Il en résulte :

$$a_n := \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{2k} \rightarrow -\frac{1}{2} \ln 2 =: a.$$

Ce calcul intègre une somme finie puis majore son reste ; aucun échange de série infinie et d'intégrale n'est effectué.

Convergence de la variable construite

Posons $L_n = K_n/2 + a_n$ et $L = K/2 + a$. Pour $\varepsilon > 0$, dès que $|a_n - a| \leq \varepsilon/2$, l'inégalité triangulaire donne :

$$P(|L_n - L| > \varepsilon) \leq P(|K_n - K| > \varepsilon).$$

En effet, si $|K_n - K| \leq \varepsilon$, alors $|L_n - L| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Par 10(c), la probabilité de droite tend vers 0. Donc $L_n \rightarrow L$ en probabilité.

Pour établir directement la convergence en loi, fixons un point x où F_L est continue.

Pour tout $\eta > 0$, les inclusions d'événements donnent :

$$F_L(x - \eta) - P(|L_n - L| > \eta) \leq F_{L_n}(x) \leq F_L(x + \eta) + P(|L_n - L| > \eta).$$

Étant donné $\rho > 0$, on choisit η assez petit pour que les deux écarts $F_L(x) - F_L(x - \eta)$ et $F_L(x + \eta) - F_L(x)$ soient inférieurs à $\rho/2$. Puis on choisit n assez grand pour que $P(|L_n - L| > \eta) < \rho/2$. On obtient $|F_{L_n}(x) - F_L(x)| < \rho$. Ainsi $L_n \rightarrow L$ en loi par définition, sans recours à un théorème de substitution dans une convergence en loi.

Identification de la loi de la suite demandée

Pour chaque n , les familles finies $(B_1, \dots, B_n)$ et $(B'_1, \dots, B'_n)$ sont constituées de variables indépendantes de même loi de Bernoulli. Elles ont donc la même loi conjointe : pour chaque $(b_1, \dots, b_n) \in \{0, 1\}^n$, la probabilité correspondante vaut 2^{-n} dans les deux cas.

Leurs sommes pondérées ont alors la même loi. D'après 12(a), $H_n - h_n(\mathcal{J})$ a donc la même loi que L_n . La convergence en loi établie pour L_n entraîne celle de la suite demandée :

$$H_n - h_n(\mathcal{J}) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{K}{2} - \frac{1}{2} \ln 2.$$

Les constantes cherchées sont $\lambda = 1/2$ et $\mu = -\ln 2/2$.

Relevé des adaptations

6(g). Code adapté en Python : le programme Scilab est remplacé par une fonction Python, avec `np.log` pour le logarithme népérien. La boucle, les indices impairs et le blanc à compléter sont conservés. La condition `eps > 0` est précisée pour assurer la terminaison.

9(a). La demande d'appartenance à une tribu est formulée comme la vérification que l'ensemble est un événement. La stabilité des événements par réunions et intersections dénombrables est rappelée dans le préambule ; aucune théorie abstraite de la mesurabilité n'est développée.

11(c). Code adapté en Python : les boucles Scilab deviennent des boucles `range`, `grand` est remplacé par `rd.binomial`, et le tableau des simulations est un tableau NumPy à une dimension. Le blanc à compléter et la loi de sortie sont préservés. Les arguments nécessaires au tracé d'histogrammes normalisés sont expliqués dans le sujet.

11(c)(ii). La figure est retranscrite en SVG dans l'énoncé à partir de l'original, avec les valeurs mesurées. Les bornes et hauteurs des dix barres de chacun des trois panneaux sont relevées sur le scan après calibration des axes. Ces données sont approximatives à la précision de l'image ; les tirages et le nombre de simulations d'origine ne sont pas fournis.

2(a). Le graphique demandé est intégré au corrigé sous forme de SVG, calculé exactement à partir des points $(-1/4, 0)$, $(0, 1)$, $(3/4, 1)$ et $(1, 0)$.