



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques

2018

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Corrigé — HEC, mathématiques, option scientifique, 2018

Préliminaire

1. (a) Convergence des intégrales A_k

Fixons $k \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto t^k e^{-t^2}$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$, en prenant $t^0 = 1$ pour $k = 0$. Il n'y a donc aucune difficulté d'intégration à l'origine.

À l'infini, posons $s = t^2$. Par croissance comparée d'une puissance et d'une exponentielle,

$$t^{k+2} e^{-t^2} = s^{(k+2)/2} e^{-s} \longrightarrow 0.$$

Pour t suffisamment grand, $0 \leq t^k e^{-t^2} \leq 1/t^2$. L'intégrale de référence $\int_1^{+\infty} t^{-2} dt$ converge. La comparaison établit donc la convergence de A_k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

1. (b) Calcul de A_0 , A_1 et A_2

Pour calculer A_0 , on utilise la normalisation de la densité de la loi normale centrée réduite. Si $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2} du = 1.$$

L'intégrande est pair, donc $\int_0^{+\infty} e^{-u^2/2} du = \sqrt{2\pi}/2$. Le changement de variable affine $u = \sqrt{2}t$, d'abord sur un segment puis par passage à la limite dans les intégrales convergentes, donne $\sqrt{2}A_0 = \sqrt{2\pi}/2$. Ainsi $A_0 = \sqrt{\pi}/2$.

La primitive de te^{-t^2} est $-e^{-t^2}/2$. Dès lors,

$$A_1 = \lim_{R \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-t^2} \right]_0^R = \frac{1}{2}.$$

Méthode 1 — Intégration par parties pour A_2

Sur $[0, R]$, on écrit $t^2 e^{-t^2} = t \cdot t e^{-t^2}$. L'intégration par parties donne

$$\int_0^R t^2 e^{-t^2} dt = \left[-\frac{t}{2} e^{-t^2} \right]_0^R + \frac{1}{2} \int_0^R e^{-t^2} dt.$$

Comme $R e^{-R^2} \rightarrow 0$ et que les intégrales convergent d'après 1(a), le passage à la limite donne $A_2 = A_0/2 = \sqrt{\pi}/4$.

Méthode 2 — Moment d'ordre deux de la loi normale

Pour $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$, on a $E(Z) = 0$ et $V(Z) = 1$, donc $E(Z^2) = 1$. Le transfert et la parité donnent

$$1 = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} u^2 e^{-u^2/2} du.$$

Le changement de variable affine $u = \sqrt{2}t$ transforme l'intégrale en $2\sqrt{2}A_2$. Ainsi $1 = (4/\sqrt{\pi})A_2$, d'où $A_2 = \sqrt{\pi}/4$.

La première méthode relie deux intégrales successives ; la seconde reconnaît un moment d'une loi usuelle. En conclusion, $A_0 = \sqrt{\pi}/2$, $A_1 = 1/2$, $A_2 = \sqrt{\pi}/4$.

2. Convergence des intégrales définissant F et G

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \geq 0$,

$$|e^{-t^2} \cos(2xt)| \leq e^{-t^2}, \quad |te^{-t^2} \sin(2xt)| \leq te^{-t^2}.$$

Les deux fonctions majorantes sont intégrables d'après 1(a). Par comparaison, les deux intégrales convergent absolument, et les fonctions F et G sont bien définies sur $\mathbb{R}$.

Partie I. Calcul d'une fonction auxiliaire

3. (a) Inégalité $|\sin u| \leq |u|$

Méthode 1 — Inégalité de Taylor-Lagrange, imposée par l'énoncé

La fonction sinus est de classe C^1 sur le segment reliant 0 à u , et sa dérivée, le cosinus, y est de valeur absolue au plus 1. L'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 0 donne

$$|\sin u - \sin 0| \leq |u - 0| \sup_{t \text{ entre } 0 \text{ et } u} |\cos t| \leq |u|.$$

Cela établit l'inégalité pour tout u , y compris $u = 0$.

Méthode 2 — Intégration d'une dérivée bornée

Le théorème fondamental du calcul intégral donne $\sin u = \int_0^u \cos t \, dt$. Pour $u \geq 0$,

$$|\sin u| \leq \int_0^u |\cos t| \, dt \leq u.$$

Pour $u < 0$, on applique ce résultat à $-u > 0$ et on utilise l'impairité du sinus :

$|\sin u| = |\sin(-u)| \leq -u = |u|$. Cette méthode retrouve la même borne à partir d'une intégrale.

3. (b) Identité de différence des cosinus

Posons $a = (u + v)/2$ et $b = (v - u)/2$. Alors $u = a - b$ et $v = a + b$. Les formules d'addition donnent

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b,$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$$

En soustrayant ces égalités, $\cos u - \cos v = 2 \sin a \sin b$, soit exactement l'identité demandée.

3. (c) Continuité de F

Pour $x, y \in \mathbb{R}$, les intégrales définissant $F(x)$ et $F(y)$ convergent absolument. La linéarité, l'inégalité triangulaire, puis 3(b) donnent

$$|F(x) - F(y)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-t^2} |\cos(2xt) - \cos(2yt)| dt.$$

Or

$$|\cos(2xt) - \cos(2yt)| = 2 |\sin((x+y)t) \sin((y-x)t)| \leq 2|y-x|t,$$

en utilisant $|\sin((x+y)t)| \leq 1$ et 3(a) pour l'autre facteur. Ainsi,

$$|F(x) - F(y)| \leq 2A_1|x-y| = |x-y|.$$

Pour tout x fixé, le membre de droite tend vers 0 lorsque $y \rightarrow x$. La fonction F est donc continue sur $\mathbb{R}$; elle vérifie même une inégalité de Lipschitz globale.

4. (a) Majoration de $u - \sin u$

La fonction sinus est de classe C^2 sur le segment reliant 0 à u , avec $\sin 0 = 0$, $\sin'(0) = 1$ et $|\sin'' t| = |\sin t| \leq 1$. L'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 donne

$$|\sin u - u| \leq \frac{1}{2}|u|^2.$$

Ainsi $|u - \sin u| \leq u^2/2$ pour tout réel u .

4. (b) Majoration du reste pour F

L'addition du cosinus donne

$$\cos(2(x+h)t) = \cos(2xt) \cos(2ht) - \sin(2xt) \sin(2ht).$$

Par la linéarité des intégrales absolument convergentes,

$$\begin{aligned} & F(x+h) - F(x) + 2hG(x) \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t^2} ((\cos(2ht) - 1) \cos(2xt) + (2ht - \sin(2ht)) \sin(2xt)) dt. \end{aligned}$$

Chaque terme est intégrable : le premier est majoré en valeur absolue par $2e^{-t^2}$ et le second par $(2|h|t + 1)e^{-t^2}$, dont l'intégrale est finie par le préliminaire. L'inégalité triangulaire et $|\cos(2ht) - 1| = 1 - \cos(2ht)$ donnent exactement l'inégalité de l'énoncé.

4. (c) Borne quadratique indépendante de x

La question 4(a) donne $|2ht - \sin(2ht)| \leq 2h^2t^2$.

Pour l'autre terme, les formules d'addition et $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ donnent $\cos(2a) = 1 - 2\sin^2 a$. Avec $a = ht$, on obtient

$$0 \leq 1 - \cos(2ht) = 2\sin^2(ht) \leq 2h^2t^2.$$

Dans la majoration de 4(b), les facteurs $|\sin(2xt)|$ et $|\cos(2xt)|$ sont au plus 1. Ainsi,

$$|F(x+h) - F(x) + 2hG(x)| \leq 4h^2 \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt = 4A_2 h^2.$$

On peut choisir $C = 4A_2 = \sqrt{\pi} > 0$, pour tous $(x, h) \in \mathbb{R}^2$.

5. (a) Dérivabilité de F

Fixons $x \in \mathbb{R}$. Pour $h \neq 0$, 4(c) donne

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} + 2G(x) \right| \leq C|h| \rightarrow 0.$$

Le quotient de différences a donc une limite : F est dérivable en x et $F'(x) = -2G(x)$. Comme x est arbitraire, cette identité vaut sur tout $\mathbb{R}$.

La preuve repose sur le contrôle du reste ; elle n'utilise aucun théorème de dérivation sous une intégrale impropre.

5. (b) Relation entre F' et F

Fixons $x \in \mathbb{R}$ et $R > 0$. Comme $(e^{-t^2})' = -2te^{-t^2}$, une intégration par parties sur $[0, R]$ donne

$$\int_0^R te^{-t^2} \sin(2xt) dt = \left[-\frac{1}{2}e^{-t^2} \sin(2xt) \right]_0^R + x \int_0^R e^{-t^2} \cos(2xt) dt.$$

Le terme de bord en 0 est nul, et celui en R tend vers 0, car le sinus est borné. Les deux intégrales convergent absolument d'après la question 2. On peut donc passer à la limite : $G(x) = xF(x)$.

La question 5(a) donne alors $F'(x) = -2G(x) = -2xF(x)$ pour tout réel x .

5. (c) Expression explicite de F

La fonction $Q(x) = e^{x^2} F(x)$ est dérivable. En utilisant 5(b),

$$Q'(x) = e^{x^2} (2xF(x) + F'(x)) = 0.$$

Une fonction dérivable de dérivée nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}$ est constante, par le théorème des accroissements finis. Ainsi $Q(x) = Q(0) = F(0) = A_0 = \sqrt{\pi}/2$, d'où

$$F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-x^2} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Partie II. Fonction de Dirichlet

6. (a) Continuité et prolongement en 0

Sur D , le dénominateur $2 \sin(u/2)$ est non nul. Le quotient de deux fonctions continues y est donc continu.

Pour calculer la limite en 0, on utilise $\sin v/v \rightarrow 1$ lorsque $v \rightarrow 0$. Comme $n + 1/2 > 0$,

$$\varphi_n(u) = \frac{\sin((n+1/2)u)}{(n+1/2)u} \cdot \frac{u/2}{\sin(u/2)} \cdot \left(n + \frac{1}{2}\right) \rightarrow n + \frac{1}{2}.$$

En posant $\varphi_n(0) = n + 1/2$, on obtient un prolongement continu en 0.

6. (b) Prolongement sur $\mathbb{R}$

Pour $u \in D$, les formules d'addition donnent

$$\sin((n + 1/2)(u + 2\pi)) = -\sin((n + 1/2)u), \quad \sin((u + 2\pi)/2) = -\sin(u/2).$$

Le quotient ne change donc pas : $\varphi_n(u + 2\pi) = \varphi_n(u)$. Par itération, il est 2π -périodique sur D .

Si $u \rightarrow 2k\pi$ avec $u \in D$, on pose $v = u - 2k\pi \rightarrow 0$; la périodicité et 6(a) donnent $\varphi_n(u) = \varphi_n(v) \rightarrow n + 1/2$. En définissant

$$\varphi_n(2k\pi) = n + \frac{1}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

on obtient un prolongement continu sur tout $\mathbb{R}$, encore 2π -périodique.

6. (c) Parité de φ_n

Pour $u \in D$, l'imparité du sinus donne

$$\varphi_n(-u) = \frac{-\sin((n + 1/2)u)}{-2\sin(u/2)} = \varphi_n(u).$$

Aux multiples de 2π , les deux valeurs prolongées valent $n + 1/2$. Ainsi φ_n est paire sur $\mathbb{R}$.

7. (a) Somme trigonométrique réelle

Question adaptée au programme actuel : la demande initiale utilisant une somme d'exponentielles est remplacée par une somme télescopique de sinus, entièrement réelle et suffisante pour 7(b).

Les formules d'addition donnent, pour tous réels a, b ,

$$\sin(a + b) - \sin(a - b) = 2 \cos a \sin b.$$

Avec $a = ku$ et $b = u/2$,

$$2 \sin(u/2) \cos(ku) = \sin((k + 1/2)u) - \sin((k - 1/2)u).$$

Pour $n \geq 1$, en sommant de $k = 1$ à n , tous les termes intermédiaires se compensent :

$$2 \sin(u/2) \sum_{k=1}^n \cos(ku) = \sin((n + 1/2)u) - \sin(u/2).$$

Cette identité vaut pour tout réel u , y compris lorsque $\sin(u/2) = 0$, car nous n'avons effectué aucune division. Pour $n = 0$, les deux membres sont nuls ; la formule reste donc valable.

7. (b) Expression de φ_n comme somme finie

Si $u \in D$, on peut diviser l'identité de 7(a) par $2 \sin(u/2) \neq 0$. On obtient

$$\sum_{k=1}^n \cos(ku) = \frac{\sin((n + 1/2)u)}{2 \sin(u/2)} - \frac{1}{2} = \varphi_n(u) - \frac{1}{2}.$$

Si $u = 2\ell\pi$ pour $\ell \in \mathbb{Z}$, chacun des n cosinus vaut 1, tandis que $\varphi_n(u) - 1/2 = n$. L'identité reste vraie. En particulier, pour $n = 0$, elle donne $\varphi_0 = 1/2$.

7. (c) Intégrale de φ_n

Par 7(b),

$$\varphi_n(u) = 1/2 + \sum_{k=1}^n \cos(ku).$$

Cette somme est finie, donc

$$\int_0^{2\pi} \varphi_n(u) du = \pi + \sum_{k=1}^n \left[\frac{\sin(ku)}{k} \right]_0^{2\pi} = \pi.$$

Pour $n = 0$, seule l'intégrale de la constante $1/2$ subsiste et vaut également π .

8. Intégrale sur une période

Méthode 1 — Dérivation des bornes

La fonction ψ est continue sur $\mathbb{R}$, donc admet une primitive P . Posons

$J(x) = \int_x^{x+T} \psi(u) du = P(x+T) - P(x)$. Cette fonction est dérivable et

$$J'(x) = \psi(x+T) - \psi(x) = 0.$$

Elle est donc constante sur $\mathbb{R}$, et $J(x) = J(0) = \int_0^T \psi(u) du$.

Méthode 2 — Chasles et périodicité

Écrivons $x = qT + r$, avec $q = \lfloor x/T \rfloor \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq r < T$. Le changement de variable affine $u = v + qT$ et la périodicité donnent

$$\int_x^{x+T} \psi(u) du = \int_r^{r+T} \psi(v) dv.$$

Par Chasles, puis avec $w = v - T$ dans la deuxième intégrale,

$$\int_r^{r+T} \psi(v) dv = \int_r^T \psi(v) dv + \int_T^{T+r} \psi(v) dv = \int_r^T \psi(v) dv + \int_0^r \psi(w) dw = \int_0^T \psi.$$

La première méthode traite toutes les bornes en dérivant une fonction; la seconde décompose concrètement une période, sans dérivation.

Partie III. Formule sommatoire de Poisson

9. (a) Convergence des séries définissant H

Fixons $x \in \mathbb{R}$ et $\theta > 0$. Pour k suffisamment grand, $|x| \leq k\pi$. L'inégalité triangulaire donne alors, pour chacun des deux signes,

$$|x \pm 2k\pi| \geq 2k\pi - |x| \geq k\pi.$$

Ainsi $0 < f(x \pm 2k\pi) \leq e^{-\theta\pi^2 k^2} \leq e^{-\theta\pi^2 k}$ pour $k \geq 1$. La dernière suite est géométrique de raison $e^{-\theta\pi^2} \in]0, 1[$; sa série converge. Les deux séries demandées convergent donc par comparaison. Leur somme définit bien $H(x)$ pour tout réel x .

La régularité C^1 de cette fonction particulière est admise dans l'énoncé; aucune dérivation terme à terme des séries ne sera utilisée.

9. (b) Parité de H et de H'

La fonction f est paire. Par conséquent, pour chaque $k \geq 1$, $f(-x + 2k\pi) = f(x - 2k\pi)$ et $f(-x - 2k\pi) = f(x + 2k\pi)$. Les deux séries convergentes s'échangent, d'où $H(-x) = H(x)$: H est paire.

Comme H est dérivable, la dérivation de $H(-x) = H(x)$ donne $-H'(-x) = H'(x)$. Ainsi H' est impaire.

Propriété utile pour la suite : H est aussi 2π -périodique. Pour le démontrer sans réarrangement d'une série, posons

$$H_N(x) = \sum_{k=-N}^N f(x + 2k\pi),$$

comme à la question 10. Une translation d'indice dans cette somme finie donne

$$H_N(x + 2\pi) - H_N(x) = f(x + 2(N + 1)\pi) - f(x - 2N\pi).$$

Les deux termes de droite tendent vers 0 quand $N \rightarrow +\infty$. Les deux sommes de gauche tendent respectivement vers $H(x + 2\pi)$ et $H(x)$ par 9(a). On obtient $H(x + 2\pi) = H(x)$. En dérivant cette égalité, on constate également que H' est 2π -périodique.

10. (a) Réunion des intégrales translatées

Écrivons

$$H_N(x) = \sum_{k=-N}^N f(x + 2k\pi).$$

La somme étant finie, on peut l'intégrer terme par terme sur $[0, 2\pi]$.

Dans le terme d'indice k , posons $u = x + 2k\pi$. Comme n et k sont entiers,

$$\cos(nx) = \cos(nu - 2nk\pi) = \cos(nu).$$

Le changement de variable affine donne donc

$$\int_0^{2\pi} f(x + 2k\pi) \cos(nx) dx = \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} f(u) \cos(nu) du.$$

Les segments correspondant à $k = -N, \dots, N$ sont consécutifs. La relation de Chasles fournit

$$\int_0^{2\pi} H_N(x) \cos(nx) dx = \int_{-2N\pi}^{2(N+1)\pi} f(u) \cos(nu) du.$$

10. (b) Limite de ces intégrales

On a $|f(u) \cos(nu)| \leq e^{-\theta u^2}$. Par le changement de variable affine $t = \sqrt{\theta} u$ sur chaque demi-axe, l'intégrale de cette majorante sur $\mathbb{R}$ vaut $2A_0/\sqrt{\theta} < +\infty$.

Ainsi l'intégrale de $f(u) \cos(nu)$ sur $\mathbb{R}$ converge absolument. La définition des intégrales impropres permet le passage des deux bornes à l'infini dans 10(a). De plus, l'intégrande est pair. On obtient

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} H_N(x) \cos(nx) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos(nu) du = 2 \int_0^{+\infty} f(u) \cos(nu) du.$$

10. (c) Majoration du reste

Question adaptée au programme actuel : l'inégalité du PDF, annoncée pour tout réel x avec un reste commençant à $N + 1$, est fautive. On la remplace par une majoration uniforme correcte pour $x \in [0, 2\pi]$, avec un reste commençant à N . Ce segment est exactement celui requis par 10(d).

Pour $x \in [0, 2\pi]$ et $k \geq N + 1 \geq 2$, on a

$$x + 2k\pi \geq 2k\pi, \quad |x - 2k\pi| = 2k\pi - x \geq 2(k - 1)\pi.$$

Tous les termes étant positifs,

$$0 \leq H(x) - H_N(x) = \sum_{k=N+1}^{+\infty} f(x + 2k\pi) + \sum_{k=N+1}^{+\infty} f(x - 2k\pi).$$

Les deux inégalités précédentes donnent

$$H(x) - H_N(x) \leq \sum_{k=N+1}^{+\infty} e^{-4\theta\pi^2 k^2} + \sum_{k=N+1}^{+\infty} e^{-4\theta\pi^2 (k-1)^2}.$$

Dans la seconde somme, une translation de l'indice donne un reste commençant à N . Le premier reste est inférieur à ce même reste. Ainsi,

$$|H(x) - H_N(x)| \leq 2 \sum_{k=N}^{+\infty} e^{-4\theta\pi^2 k^2}.$$

La série majorante converge par comparaison avec

$$\sum e^{-4\theta\pi^2 k^2},$$

son reste tend vers 0 et la borne ne dépend pas de x .

Pour constater l'erreur initiale, on peut prendre $N = 1$, $x = 4\pi$, $\theta = 1/(4\pi^2)$. Le reste $H(x) - H_1(x)$ contient alors le terme $f(x - 4\pi) = 1$. En revanche, le membre de droite initial est

$$2 \sum_{k=2}^{+\infty} e^{-k^2} \leq 2e^{-4}/(1 - e^{-2}) < 1.$$

L'inégalité originale ne peut donc pas être conservée.

10. (d) Calcul des coefficients a_n

La majoration de 10(c) permet de contrôler directement la différence des intégrales :

$$\left| \int_0^{2\pi} (H(x) - H_N(x)) \cos(nx) dx \right| \leq 4\pi \sum_{k=N}^{+\infty} e^{-4\theta\pi^2 k^2} \rightarrow 0.$$

Ce contrôle justifie le passage à la limite, sans échange automatique entre somme infinie et intégrale. En utilisant 10(b),

$$\int_0^{2\pi} H(x) \cos(nx) dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-\theta u^2} \cos(nu) du.$$

Dans l'intégrale de droite, posons $t = \sqrt{\theta} u$. Le changement de variable est affine et les intégrales convergent absolument. Par la définition et le calcul de F ,

$$2 \int_0^{+\infty} e^{-\theta u^2} \cos(nu) du = \frac{2}{\sqrt{\theta}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos\left(\frac{n}{\sqrt{\theta}} t\right) dt = \frac{2}{\sqrt{\theta}} F\left(\frac{n}{2\sqrt{\theta}}\right).$$

La question 5(c) donne finalement

$$a_n = \sqrt{\frac{\pi}{\theta}} \exp\left(-\frac{n^2}{4\theta}\right) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

11. (a) Identité avec la fonction de Dirichlet

Fixons $x \in [0, 2\pi]$. D'après 7(b),

$$\varphi_N(u+x) + \varphi_N(u-x) = 1 + \sum_{n=1}^N (\cos(nu+nx) + \cos(nu-nx)).$$

Les formules d'addition du cosinus donnent $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a \cos b$. Ainsi,

$$\varphi_N(u+x) + \varphi_N(u-x) = 1 + 2 \sum_{n=1}^N \cos(nu) \cos(nx).$$

On multiplie par $H(u)$ puis on intègre sur $[0, 2\pi]$. Toutes les fonctions sont continues et la somme est finie. Par la définition des a_n , on obtient exactement

$$\int_0^{2\pi} H(u) \varphi_N(u+x) du + \int_0^{2\pi} H(u) \varphi_N(u-x) du = a_0 + 2 \sum_{n=1}^N a_n \cos(nx).$$

11. (b) Translation des intégrales

Dans la première intégrale de 11(a), posons $v = u + x$. Elle devient

$\int_x^{2\pi+x} H(v-x) \varphi_N(v) dv$. La fonction intégrée est continue et 2π -périodique, car H et φ_N

le sont. Par la question 8, cette intégrale vaut $\int_0^{2\pi} H(v-x) \varphi_N(v) dv$.

Dans la seconde intégrale, posons $v = u - x$; le même raisonnement donne

$$\int_0^{2\pi} H(v+x) \varphi_N(v) dv.$$

En additionnant puis en utilisant l'expression de φ_N sur $]0, 2\pi[$,

$$a_0 + 2 \sum_{n=1}^N a_n \cos(nx) = \int_0^{2\pi} \frac{H(v+x) + H(v-x)}{2 \sin(v/2)} \sin((N+1/2)v) dv.$$

Aux extrémités, l'ensemble du produit, et non son quotient pris isolément, se prolonge continûment sous la forme $(H(v+x) + H(v-x))\varphi_N(v)$. L'intégrale est ainsi une intégrale sur un segment d'une fonction continue.

11. (c) Continuité de K_x

Sur $]0, 2\pi[$, le dénominateur est non nul et le numérateur est continu : K_x est continue sur cet intervalle.

Étudions la borne 0. La différentiabilité de H en x et en $-x$ donne, lorsque $v \rightarrow 0$,

$$H(x+v) = H(x) + vH'(x) + o(v), \quad H(-x+v) = H(-x) + vH'(-x) + o(v).$$

Comme H est paire et H' impaire, $H(-x) = H(x)$ et $H'(-x) = -H'(x)$. Le numérateur est donc $o(v)$. Or $2 \sin(v/2) = v + o(v)$, d'où $K_x(v) \rightarrow 0$ lorsque $v \rightarrow 0^+$.

Pour la borne 2π , posons $s = v - 2\pi \rightarrow 0^-$. Par périodicité,

$$H(v+x) + H(v-x) - 2H(x) = H(s+x) + H(s-x) - 2H(x) = o(s).$$

Le dénominateur vaut $2 \sin(\pi + s/2) = -2 \sin(s/2) = -s + o(s)$. Il vient donc $K_x(v) \rightarrow 0$ lorsque $v \rightarrow 2\pi^-$.

Les valeurs définies aux deux extrémités sont précisément 0. Ainsi K_x est continue sur tout le segment $[0, 2\pi]$. Cette preuve utilise seulement la régularité C^1 admise de H , sans supposer que K_x soit dérivable aux extrémités.

11. (d) Expression du reste oscillant

Par 11(b), le membre

$$a_0 + 2 \sum_{n=1}^N a_n \cos(nx)$$

est l'intégrale de $(H(v+x) + H(v-x))\varphi_N(v)$. Décomposons la somme des deux valeurs de H en

$$H(v+x) + H(v-x) = 2H(x) + (H(v+x) + H(v-x) - 2H(x)).$$

Le premier terme contribue $2H(x) \int_0^{2\pi} \varphi_N(v) dv = 2\pi H(x)$, d'après 7(c). Pour $0 < v < 2\pi$, le deuxième terme multiplié par $\varphi_N(v)$ vaut $K_x(v) \sin((N + 1/2)v)$; les fonctions se prolongent continûment aux bornes.

Il en résulte

$$a_0 + 2 \sum_{n=1}^N a_n \cos(nx) - 2\pi H(x) = \int_0^{2\pi} K_x(v) \sin((N + 1/2)v) dv.$$

12. (a) Limite d'une intégrale oscillante

Soit $g \in C^1([0, 1])$ et $\lambda > 0$. Une intégration par parties sur le segment donne

$$\int_0^1 g(t) \sin(\lambda t) dt = \left[-\frac{g(t) \cos(\lambda t)}{\lambda} \right]_0^1 + \frac{1}{\lambda} \int_0^1 g'(t) \cos(\lambda t) dt.$$

La continuité de g' assure que $\int_0^1 |g'(t)| dt$ est finie. Ainsi,

$$\left| \int_0^1 g(t) \sin(\lambda t) dt \right| \leq \frac{|g(0)| + |g(1)| + \int_0^1 |g'(t)| dt}{\lambda} \rightarrow 0.$$

La limite demandée est donc nulle.

Question adaptée au programme actuel : l'admission générale du PDF pour toute fonction continue sur tout segment est restreinte à la conséquence particulière nécessaire pour les fonctions K_x .

Résultat admis dans cette version adaptée : pour chaque $x \in [0, 2\pi]$, la fonction K_x de 11(c) vérifie

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} K_x(v) \sin(\lambda v) dv = 0.$$

La question 11(c) a établi la continuité de cette fonction. L'admission fournit la limite du reste de 11(d) ; la preuve précédente pour une fonction C^1 ne suffit pas à elle seule, car seule la continuité de K_x a été établie.

12. (b) Formule sommatoire de Poisson

Fixons $x \in [0, 2\pi]$ et $\theta > 0$. En appliquant le résultat admis à $\lambda = N + 1/2 \rightarrow +\infty$, la question 11(d) donne

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(a_0 + 2 \sum_{n=1}^N a_n \cos(nx) \right) = 2\pi H(x).$$

La question 10(d) donne $a_n = \sqrt{\pi/\theta} e^{-n^2/(4\theta)}$. La série

$$\sum_{n \geq 1} a_n \cos(nx)$$

converge absolument, puisque $|\cos(nx)| \leq 1$ et $e^{-n^2/(4\theta)} \leq e^{-n/(4\theta)}$, terme d'une série géométrique convergente.

On obtient donc

$$\sqrt{\frac{\pi}{\theta}} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2/(4\theta)} \cos(nx) \right) = 2\pi H(x).$$

En divisant par 2π et en remarquant que $\sqrt{\pi/\theta}/\pi = 1/\sqrt{\pi\theta}$,

$$H(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi\theta}} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2/(4\theta)} \cos(nx) \right).$$

La définition de H à la question 9 donne le membre de droite de la formule demandée. Toutes les séries concernées ont été justifiées convergentes ; la formule résulte de l'identité finie de 11(d) suivie du contrôle explicite de son reste.

Partie IV. Une application probabiliste de la formule sommatoire de Poisson

Dans cette partie, H désigne désormais l'événement « A gagne », comme dans l'énoncé, et non la fonction de la partie III. On pose $q = 1 - p \in]0, 1[$.

13. (a) Simulation d'une partie

Question adaptée au programme actuel — Code adapté en Python. Les deux blancs sont complétés par $s + 2$ et 1.

Python

```
import numpy as np

def jeu(p):
    i = 1
    v = 1
    s = 1
    j = 1
    while np.random.random() > p:
        i = i + 1
        j = j + 1
        if j > s:
            v = -v
            s = s + 2
            j = 1
    if v == 1:
        print("A vainqueur")
    else:
        print("B vainqueur")
    return v
```

Au moment où la condition du `while` est évaluée, les variables décrivent le lancer courant : i est son rang global, v identifie le joueur, s est la longueur maximale de son bloc, et j est la position dans ce bloc.

Une valeur uniforme strictement supérieure à p simule « Face » : le lancer a échoué, et on prépare le suivant en incrémentant i et j . Si $j > s$, le bloc précédent est épuisé : on change de joueur avec $v = -v$, on augmente la longueur du prochain bloc de 2 et on remet sa position à 1.

Une valeur uniforme inférieure ou égale à p simule « Pile » et termine la boucle. Le succès a probabilité p , le choix de l'inégalité au point p ne modifiant pas cette probabilité pour une loi continue. Le programme affiche le joueur vainqueur et renvoie son indicateur v .

La probabilité de devoir dépasser m lancers est $q^m \rightarrow 0$: la simulation termine presque sûrement. Le code a été exécuté et son comportement vérifié sur des suites de résultats imposées, notamment des premiers succès aux rangs 1, 2, 4, 5, 9, 10, 16 et 17.

13. (b) Signification de i

La variable i vaut initialement 1 et augmente d'une unité après chaque échec. À la sortie de la boucle, le lancer courant est celui qui a donné le premier « Pile ».

Sa valeur finale est donc le rang de ce premier succès, c'est-à-dire le nombre total de lancers effectués pendant la partie, succès inclus. Avec les notations de la question 14, elle vaut $X + Y$.

13. (c) Signification de v

La variable v vaut 1 lorsque le lancer courant appartient à A et -1 lorsqu'il appartient à B. Elle est initialisée à 1, car A commence, puis change de signe à chaque changement de main.

À la fin de la fonction, $v = 1$ signifie que A a gagné et $v = -1$ que B a gagné.

13. (d) Nombre de lancers de A

Question adaptée au programme actuel — Code adapté en Python. On ajoute le compteur `nb_A`. Il vaut initialement 1, puisque le premier lancer appartient à A. À chaque préparation du lancer suivant, on l'incrémente si ce nouveau lancer appartient à A, après l'éventuel changement de main.

Python

```
import numpy as np

def jeu_compte_A(p):
    i = 1
    v = 1
    s = 1
    j = 1
    nb_A = 1
    while np.random.random() > p:
        i = i + 1
        j = j + 1
        if j > s:
            v = -v
            s = s + 2
            j = 1
        if v == 1:
            nb_A = nb_A + 1
    if v == 1:
        print("A vainqueur")
    else:
        print("B vainqueur")
    print(nb_A)
    return v
```

Le compteur recense les lancers jusqu'au lancer courant inclus. Il compte donc bien le dernier lancer si A gagne, et n'en ajoute aucun si B gagne. La fonction est nommée `jeu_compte_A` pour conserver aussi la version de 13(a) dans ce corrigé ; elle constitue la version complétée de jeu demandée ici.

L'exécution contrôlée avec un premier succès au rang 1 affiche un lancer de A, au rang 4 un lancer de A, au rang 9 six lancers de A, et au rang 17 sept lancers de A.

13. (e) Estimation de la probabilité de victoire de A

Question adaptée au programme actuel — Code adapté en Python. On suppose $M \geq 1$ entier et on estime la probabilité par la fréquence des victoires de A dans M parties indépendantes.

Méthode 1 — Simulation des lancers successifs

On reprend la mécanique de 13(a), sans affichage après chaque partie, puis on compte les victoires de A.

Python

```
import numpy as np

def estimation_A(p, M):
    victoires_A = 0
    for k in range(M):
        v = 1
        s = 1
        j = 1
        while np.random.random() > p:
            j = j + 1
            if j > s:
                v = -v
                s = s + 2
                j = 1
        if v == 1:
            victoires_A = victoires_A + 1
    return victoires_A / M
```

Chaque partie est simulée jusqu'au premier « Pile ». Le rapport renvoyé est la moyenne des indicatrices de victoire de A.

Méthode 2 — Simulation directe du rang du premier succès

Par indépendance des lancers, le premier « Pile » arrive au rang $r \geq 1$ avec probabilité $q^{r-1}p$. Ce rang suit donc la loi géométrique de paramètre p sur $\mathbb{N}^*$; `np.random.geometric(p)` utilise précisément cette convention.

La somme des longueurs des b premiers blocs est $1 + 3 + \dots + (2b - 1) = b^2$. Le premier succès est donc dans le premier bloc b tel que son rang soit au plus b^2 . Le joueur alterne d'un bloc à l'autre.

Python

```
import numpy as np

def estimation_A_geometrique(p, M):
    victoires_A = 0
    for k in range(M):
        rang = np.random.geometric(p)
        bloc = 1
        v = 1
        while rang > bloc * bloc:
            bloc = bloc + 1
            v = -v
        if v == 1:
            victoires_A = victoires_A + 1
    return victoires_A / M
```

La première méthode reproduit les lancers un à un; la seconde simule directement leur nombre puis identifie le bloc du succès. Elle est plus économique lorsque les parties sont longues.

Pour chacune des deux méthodes, si $\pi_A = P_p(H)$, les indicatrices sont indépendantes, de loi de Bernoulli de paramètre π_A . La fréquence a espérance π_A et variance $\pi_A(1 - \pi_A)/M \leq 1/(4M)$. La loi faible des grands nombres justifie sa convergence en probabilité vers π_A lorsque $M \rightarrow +\infty$. Une exécution fournit une approximation

aléatoire, pas une preuve de la valeur exacte.

Les deux codes ont été exécutés avec $p = 0,3$ et $M = 100000$; leurs résultats ont été comparés à la somme exacte de la question 15, calculée numériquement avec un reste majoré.

14. (a) Arrêt presque sûr et loi du nombre total de lancers

Pour $m \geq 1$, la partie dure plus de m lancers si et seulement si les m premiers résultats sont tous « Face ». Par indépendance, cette probabilité vaut q^m .

Les événements « les m premiers résultats sont Face » décroissent vers l'événement « aucun Pile n'apparaît ». Par continuité monotone des probabilités,

$$P_p(\text{aucun Pile}) = \lim_{m \rightarrow +\infty} q^m = 0.$$

La partie s'arrête donc presque sûrement avec exactement un vainqueur :

$$P_p(H \cup K) = 1, \text{ et } H \cap K = \emptyset.$$

Le nombre total de lancers $T = X + Y$ est le rang du premier « Pile ». Pour $r \geq 1$,

$$P_p(T = r) = q^{r-1}p,$$

car il faut $r - 1$ échecs puis un succès. Ainsi $X + Y \sim \mathcal{G}(p)$, avec support $\mathbb{N}^*$. Sur l'événement négligeable d'une partie infinie, on peut fixer arbitrairement les valeurs des variables sans modifier leurs lois.

14. (b) Limite lorsque $p \rightarrow 1$

Si le premier lancer donne « Pile », A gagne immédiatement. Cet événement de probabilité p est inclus dans H , donc

$$p \leq P_p(H) \leq 1.$$

Par encadrement, lorsque $p \rightarrow 1^-$, $P_p(H) \rightarrow 1$.

15. (a) Rangs des lancers de A

Le bloc numéro $r \geq 1$ a longueur $2r - 1$. Le nombre de lancers cumulés après les r premiers blocs vaut

$$\sum_{\ell=1}^r (2\ell - 1) = 2 \frac{r(r+1)}{2} - r = r^2.$$

Le bloc numéro r contient donc les rangs $(r-1)^2 + 1, \dots, r^2$. A joue les blocs impairs $r = 2n + 1$, avec $n \geq 0$. Ses rangs dans ce bloc sont

$$(2n)^2 + 1, \dots, (2n+1)^2, \text{ soit } 4n^2 + 1, \dots, 4n^2 + 4n + 1.$$

Cela établit l'inclusion demandée. En fait, c'est une égalité : chaque rang de ces blocs peut être atteint avec une probabilité strictement positive, puisque les lancers précédents peuvent tous donner « Face ».

$$I = \bigcup_{n \geq 0} \{4n^2 + 1, \dots, 4n^2 + 4n + 1\}.$$

15. (b) Probabilités de victoire

A gagne si le premier succès survient dans un de ses blocs. Ces événements sont disjoints. Pour le bloc d'indice $n \geq 0$, on utilise la loi géométrique obtenue en 14(a) :

$$P_p(4n^2 + 1 \leq T \leq 4n^2 + 4n + 1) = \sum_{r=4n^2+1}^{4n^2+4n+1} pq^{r-1}.$$

La somme géométrique finie, avec $1 - q = p$, donne

$$\sum_{r=4n^2+1}^{4n^2+4n+1} pq^{r-1} = q^{4n^2} (1 - q^{4n+1}) = q^{4n^2} - q^{4n^2+4n+1}.$$

Par addition des probabilités des événements disjoints,

$$P_p(H) = \sum_{n=0}^{+\infty} (q^{4n^2} - q^{4n^2+4n+1}).$$

La série est à termes positifs et ses sommes partielles sont des probabilités au plus 1, donc elle converge.

B joue les blocs pairs $r = 2n + 2$, qui contiennent les rangs $(2n + 1)^2 + 1, \dots, (2n + 2)^2$. Le même calcul donne

$$P_p(K) = \sum_{n=0}^{+\infty} (q^{(2n+1)^2} - q^{(2n+2)^2}).$$

Cette série converge pour la même raison. Les blocs de A et de B partitionnent les rangs possibles et la partie s'arrête presque sûrement : les deux probabilités somment à 1.

16. (a) Inégalité stricte issue de la formule de Poisson

Posons $q = 1 - p \in]0, 1[$ et $\theta = -1/(4 \ln q) > 0$. Alors $e^{-n^2/(4\theta)} = e^{n^2 \ln q} = q^{n^2}$.

La série

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^n q^{n^2}$$

converge absolument, puisque $q^{n^2} \leq q^n$ pour $n \geq 1$. Notons sa somme $S(q)$.

On applique 12(b) au point $x = \pi \in [0, 2\pi]$. Comme $\cos(n\pi) = (-1)^n$, le membre de gauche devient

$$\frac{1}{\sqrt{\pi\theta}} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n q^{n^2} \right) = \frac{S(q) - 1/2}{\sqrt{\pi\theta}}.$$

Le membre de droite vaut

$$e^{-\theta\pi^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\theta(\pi+2k\pi)^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\theta(\pi-2k\pi)^2}.$$

Il est strictement positif : toutes ses quantités sont positives et son premier terme est strictement positif. Comme $\sqrt{\pi\theta} > 0$, on conclut

$$S(q) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (1-p)^{n^2} > \frac{1}{2}.$$

16. (b) Avantage du joueur A

La formule de 15(b) s'écrit

$$P_p(H) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(q^{(2n)^2} - q^{(2n+1)^2} \right).$$

La somme partielle jusqu'à l'indice $n = M$ est exactement la somme partielle de

$$\sum_{r \geq 0} (-1)^r q^{r^2}$$

jusqu'à $r = 2M + 1$. La convergence absolue établie en 16(a) permet d'en prendre la limite :

$$P_p(H) = S(q) > \frac{1}{2}.$$

Comme $P_p(H) + P_p(K) = 1$, on obtient $P_p(K) < 1/2$. Le jeu favorise donc strictement A pour toute valeur $p \in]0, 1[$. Il n'est jamais équitable dans cet intervalle, malgré l'alternance des blocs de lancers.

Relevé des adaptations

- Question 7(a), avec son préambule : remplacement de la somme initiale par une identité trigonométrique réelle et une somme télescopique. L'identité nécessaire à 7(b) est conservée, et toutes les questions suivantes restent valables.
- Question 10(c) : rectification de l'inégalité fautive du PDF. Elle est remplacée par

$$|H(x) - H_N(x)| \leq 2 \sum_{k=N}^{+\infty} e^{-4\theta\pi^2 k^2}$$

pour $x \in [0, 2\pi]$, borne uniforme suffisante pour justifier 10(d).

- Question 12(a), résultat admis suivant la question : l'admission générale concernant toutes les fonctions continues sur un segment est restreinte au résultat particulier pour les fonctions K_x nécessaire à 12(b). La partie à démontrer pour $g \in C^1([0, 1])$ est conservée intégralement.
- Question 13(a) à 13(e) : code adapté en Python et consignes correspondantes adaptées au même langage. Les deux blancs sont conservés dans le sujet. `print` et le tirage uniforme sont expliqués ; le retour de l'indicateur de victoire est explicite. Le mécanisme de la partie, les compteurs et les objectifs des questions sont conservés.