



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESCP — 2023

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Questions préliminaires

1. Limite de la partie entière normalisée

On utilise la définition de la partie entière, qui vaut également lorsque x est négatif.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\lfloor nx \rfloor \leq nx < \lfloor nx \rfloor + 1.$$

Puisque $n > 0$, on en déduit :

$$x - \frac{1}{n} < \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq x.$$

Les deux bornes tendent vers x . Le théorème d'encadrement donne donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} = x.$$

2. Divergence d'une différence

Méthode 1 — Minoration directe

La définition de la partie entière donne $\lfloor n/2 \rfloor \leq n/2$. Ainsi,

$$n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \geq \frac{n}{2}.$$

La borne inférieure tendant vers $+\infty$, la suite étudiée tend vers $+\infty$.

Méthode 2 — Utilisation de la question 1

Avec $x = 1/2$, la question 1 donne :

$$\frac{n - \lfloor n/2 \rfloor}{n} = 1 - \frac{\lfloor n/2 \rfloor}{n} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

Pour tout n suffisamment grand, ce quotient est supérieur à $1/4$. Par conséquent,
 $n - \lfloor n/2 \rfloor \geq n/4 \rightarrow +\infty$.

La première approche exploite une inégalité immédiate ; la seconde fournit également l'équivalent $n - \lfloor n/2 \rfloor \sim n/2$.

Première partie — La loi arcsinus

3. (a) Expression du cosinus

Soit $x \in [-1, 1]$ et posons $y = \arcsin(x)$. Par définition, $y \in [-\pi/2, \pi/2]$ et $\sin(y) = x$.

L'identité $\cos^2(y) + \sin^2(y) = 1$ entraîne $\cos^2(y) = 1 - x^2$. Sur l'intervalle considéré, $\cos(y) \geq 0$, ce qui détermine le signe de la racine :

$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2}.$$

La formule inclut $x = -1$ et $x = 1$, pour lesquels les deux membres sont nuls.

3. (b) Continuité et dérivabilité de la réciproque

La fonction $\sin$ est continue et strictement croissante sur $[-\pi/2, \pi/2]$ et réalise une bijection de cet intervalle sur $[-1, 1]$. Le théorème de continuité de la bijection réciproque assure que $\arcsin$ est continue sur $[-1, 1]$.

Soit maintenant $x \in]-1, 1[$. On a $\arcsin(x) \in]-\pi/2, \pi/2[$ et, d'après 3(a),

$$\sin'(\arcsin(x)) = \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2} > 0.$$

Le théorème de dérivation d'une bijection réciproque s'applique, puisque la dérivée de $\sin$ en ce point est non nulle. Il donne :

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Aucune dérivabilité aux extrémités n'est nécessaire ni affirmée.

4. (a) Dérivée de G

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0, 1]$ et prend ses valeurs dans $[0, 1]$. Par 3(b), la composition définissant G est continue sur $[0, 1]$.

Pour $x \in]0, 1[$, les deux fonctions composées sont dérivables et $x > 0, 1 - x > 0$. La dérivation donne :

$$G'(x) = 2 \times \frac{1}{\sqrt{1 - (\sqrt{x})^2}} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} = g(x).$$

On retiendra également les valeurs aux extrémités :

$$G(0) = 0, \quad G(1) = \pi.$$

4. (b) Étude et représentation de g

La fonction g est définie, strictement positive et de classe C^∞ sur $]0, 1[$. Elle vérifie la symétrie $g(1-x) = g(x)$.

En dérivant $g(x) = (x(1-x))^{-1/2}$, on obtient :

$$g'(x) = -\frac{1-2x}{2[x(1-x)]^{3/2}} = \frac{2x-1}{2[x(1-x)]^{3/2}}.$$

Le dénominateur étant strictement positif, g est strictement décroissante sur $]0, 1/2]$ et strictement croissante sur $[1/2, 1[$. Son minimum est $g(1/2) = 2$.

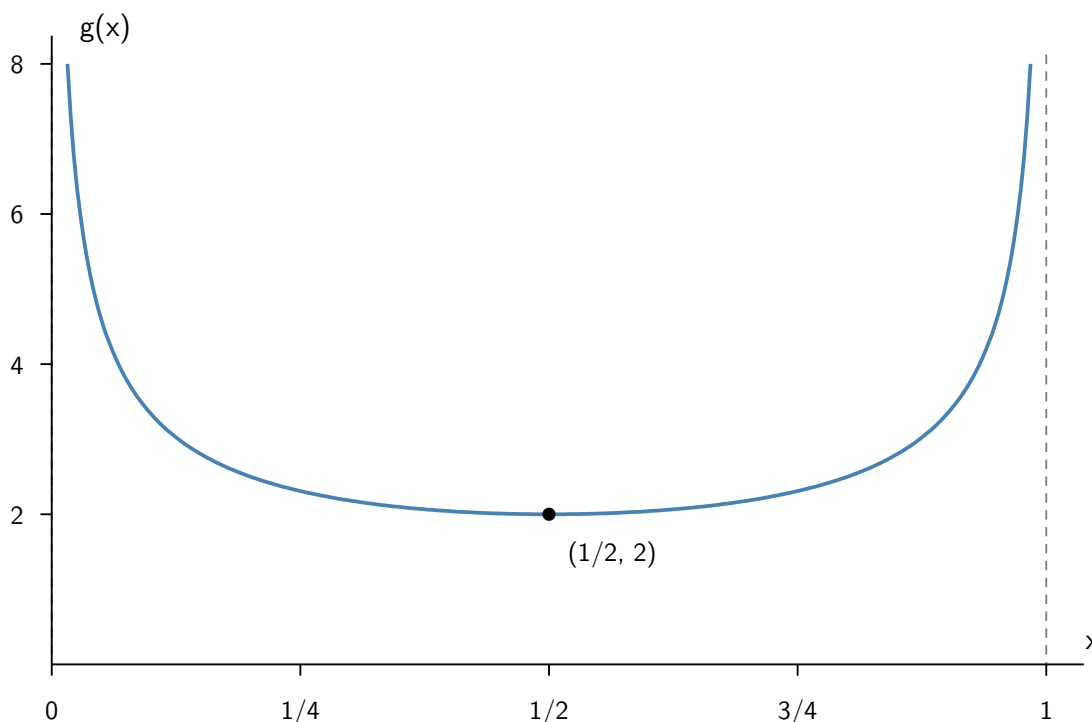
Comme $x(1-x) \rightarrow 0^+$ à chaque extrémité,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = +\infty.$$

Les droites $x = 0$ et $x = 1$ sont donc des asymptotes verticales. Le tableau résume les variations :

x	0	1/2	1
$g'(x)$	— sur $]0, 1/2[$	0	+ sur $]1/2, 1[$
$g(x)$	$+\infty$	minimum 2	$+\infty$

Le graphe ci-dessous est calculé à partir de la formule exacte de g . La fenêtre verticale s'arrête à 8 ; les branches se prolongent vers $+\infty$ près des deux asymptotes.



5. (a) Vérification d'une densité

La fonction f est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ et nulle en dehors de $]0, 1[$. Il reste à établir la convergence de son intégrale et sa normalisation.

Pour $0 < a < b < 1$, la question 4(a) et le théorème fondamental du calcul intégral donnent :

$$\int_a^b f(t) dt = \frac{G(b) - G(a)}{\pi}.$$

La continuité de G sur $[0, 1]$ permet de passer aux limites aux bornes. Plus précisément, en scindant en $1/2$, les deux intégrales impropres existent et :

$$\int_0^1 f(t) dt = \frac{G(1) - G(0)}{\pi} = 1.$$

Ainsi, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$. Toutes les conditions requises sont satisfaites : f est une densité de probabilité.

Pour la suite, la fonction de répartition associée est :

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0, \\ \frac{G(t)}{\pi} = \frac{2}{\pi} \arcsin(\sqrt{t}) & \text{si } 0 < t < 1, \\ 1 & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

5. (b) Espérance de la loi arcsinus

L'existence doit précéder le calcul. Comme $P(0 \leq X \leq 1) = 1$, on a $|X| \leq 1$ presque sûrement. Donc X admet une espérance. De même, $0 \leq tf(t) \leq f(t)$ sur $]0, 1[$ assure la convergence absolue de l'intégrale de transfert.

Méthode 1 — Changement de variable dans l'intégrale

Posons $I = \int_0^1 tf(t) dt = E(X)$. Le changement affine $u = 1 - t$, d'abord effectué sur des segments intérieurs à $]0, 1[$ puis prolongé par passage aux limites justifié par les convergences précédentes, donne :

$$I = \int_0^1 (1 - u)f(1 - u) du.$$

La symétrie de g implique $f(1 - u) = f(u)$ pour $u \in]0, 1[$. Par linéarité d'intégrales convergentes,

$$I = \int_0^1 f(u) du - \int_0^1 uf(u) du = 1 - I.$$

Par conséquent, $E(X) = I = 1/2$.

Méthode 2 — Symétrie de la loi

La transformation affine $X \mapsto 1 - X$ fournit à $1 - X$ la densité $t \mapsto f(1 - t)$, égale à $f(t)$ sur $\mathbb{R}$. Les variables X et $1 - X$ ont donc la même loi.

Les espérances existent, puisque les deux variables sont bornées presque sûrement.

L'égalité en loi et la linéarité donnent :

$$E(X) = E(1 - X) = 1 - E(X).$$

Ainsi, dans les deux approches :

$$E(X) = \frac{1}{2}.$$

La première approche est utile pour une intégrale symétrique ; la seconde fait apparaître directement la symétrie de la distribution autour de $1/2$.

6. (a) Transformation d'une uniforme

On détermine la fonction de répartition, sans employer de formule générale de transformation de densité.

La fonction $h : u \mapsto \sin^2(\pi u/2)$ est strictement croissante sur $[0, 1]$, car $u \mapsto \pi u/2$, le sinus sur $[0, \pi/2]$, puis le carré sur $[0, 1]$ sont strictement croissants. Elle prend les valeurs 0 et 1 aux extrémités.

Ainsi, $0 \leq V \leq 1$ presque sûrement. Pour $t \in]0, 1[$, on a, presque sûrement,

$$V \leq t \iff \sin\left(\frac{\pi U}{2}\right) \leq \sqrt{t} \iff U \leq \frac{2}{\pi} \arcsin(\sqrt{t}).$$

La dernière borne appartient à $]0, 1[$. Comme U est uniforme sur $[0, 1]$,

$$P(V \leq t) = \frac{2}{\pi} \arcsin(\sqrt{t}) = \frac{G(t)}{\pi}.$$

Pour $t < 0$, cette probabilité est nulle ; pour $t = 0$, elle vaut $P(U = 0) = 0$; pour $t \geq 1$, elle vaut 1. On retrouve exactement F_X donné en 5(a). La fonction de répartition caractérisant la loi, V suit la loi arcsinus.

6. (b) Simulation de la loi arcsinus

La fonction complétée est :

Python

```
import numpy as np

import numpy.random as rd

def arcsinus():
    U = rd.random()
    V = np.sin(np.pi * U / 2)**2
    return V
```

`rd.random()` simule une uniforme sur $[0, 1[$. L'absence de l'extrémité 1 n'affecte pas la loi continue. On applique ensuite la transformation de 6(a), puis on renvoie le résultat.

Ce code a été exécuté; les réalisations obtenues appartiennent à $[0, 1]$, et la moyenne empirique sur un grand échantillon est voisine de $1/2$. Ces vérifications numériques contrôlent l'implémentation; la preuve de la loi reste celle de 6(a).

7. Comparaison entre un terme et des accroissements de G

Méthode 1 — Comparaison d'intégrales

L'idée est de comparer $g(k/n)$ à ses valeurs sur les deux segments voisins, en utilisant les variations de 4(b).

Supposons $1 \leq k \leq n/2 - 1$. Sur $[k/n, (k+1)/n] \subset]0, 1/2]$, g est décroissante. On a donc :

$$G\left(\frac{k+1}{n}\right) - G\left(\frac{k}{n}\right) = \int_{k/n}^{(k+1)/n} g(t) dt \leq \frac{1}{n} g\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}.$$

Sur $[(k-1)/n, k/n]$, $g(t) \geq g(k/n)$ pour tout $t > 0$. Lorsque $k \geq 2$, on intègre sur ce segment; lorsque $k = 1$, on intègre d'abord sur $[\varepsilon, 1/n]$, puis on fait tendre ε vers 0^+ en utilisant la convergence établie en 5(a). Dans les deux cas :

$$G\left(\frac{k}{n}\right) - G\left(\frac{k-1}{n}\right) \geq \frac{1}{n} g\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}.$$

Cela démontre le premier encadrement.

Supposons maintenant $n/2 + 1 \leq k \leq n - 1$. Les deux segments voisins sont dans $[1/2, 1]$, où g est croissante. Les comparaisons sont inversées :

$$G\left(\frac{k+1}{n}\right) - G\left(\frac{k}{n}\right) \geq \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \geq G\left(\frac{k}{n}\right) - G\left(\frac{k-1}{n}\right).$$

Pour $k = n - 1$, l'intégrale du premier membre est impropre en 1 ; on justifie la comparaison par intégration sur $[(n-1)/n, 1 - \varepsilon]$ et passage à la limite, comme précédemment.

Méthode 2 — Égalité des accroissements finis

Cette approche évite d'intégrer directement g à une extrémité où elle diverge. La fonction G est continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$. Elle satisfait donc les hypothèses de l'égalité des accroissements finis sur chacun des segments voisins, y compris lorsque l'un d'eux touche 0 ou 1.

Il existe $c_- \in](k-1)/n, k/n[$ et $c_+ \in]k/n, (k+1)/n[$ tels que :

$$G\left(\frac{k}{n}\right) - G\left(\frac{k-1}{n}\right) = \frac{g(c_-)}{n},$$

$$G\left(\frac{k+1}{n}\right) - G\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{g(c_+)}{n}.$$

Pour $1 \leq k \leq n/2 - 1$, les trois arguments $c_-, k/n, c_+$ sont dans $]0, 1/2[$ et ordonnés ainsi : $c_- < k/n < c_+$. La décroissance de g donne $g(c_+) \leq g(k/n) \leq g(c_-)$.

En divisant par $n > 0$ et en utilisant $g(k/n)/n = 1/\sqrt{k(n-k)}$, on retrouve exactement le premier encadrement.

Pour $n/2 + 1 \leq k \leq n - 1$, les mêmes arguments sont dans $[1/2, 1[$, où g est croissante. Donc $g(c_+) \geq g(k/n) \geq g(c_-)$, ce qui donne les deux inégalités inversées.

L'intégration compare des aires ; les accroissements finis comparent les pentes moyennes à une valeur de la dérivée. La seconde méthode est particulièrement pratique pour les segments qui touchent une extrémité.

8. Limite d'une somme tronquée

Un exemple est $a_n = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$. Pour $n \geq 1$, $a_n \geq 1$, $a_n \rightarrow +\infty$ et $0 \leq a_n/n \leq 1/\sqrt{n} \rightarrow 0$. Par la question 1, $\lfloor nx \rfloor/n \rightarrow x > 0$, donc $a_n < \lfloor nx \rfloor$ pour tout n suffisamment grand.

Pour une suite quelconque satisfaisant les hypothèses, posons $b_n = \lfloor nx \rfloor$. Comme $x < 1/2$, on a $b_n \leq n/2 - 1$ pour tout n assez grand. Les indices de la somme relèvent donc du premier encadrement de 7.

En sommant ces inégalités de $k = a_n$ à $k = b_n$, les accroissements de G se simplifient par télescopage :

$$G\left(\frac{b_n + 1}{n}\right) - G\left(\frac{a_n}{n}\right) \leq \sum_{k=a_n}^{b_n} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \leq G\left(\frac{b_n}{n}\right) - G\left(\frac{a_n - 1}{n}\right).$$

Par 1, $b_n/n \rightarrow x$ et $(b_n + 1)/n \rightarrow x$. Par hypothèse, $a_n/n \rightarrow 0$, donc $(a_n - 1)/n \rightarrow 0$. La continuité de G sur $[0, 1]$ montre que chacune des deux bornes tend vers $G(x) - G(0) = G(x)$.

Le théorème d'encadrement donne :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=a_n}^{\lfloor nx \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} = G(x).$$

Le prolongement de ce résultat à tout $x \in]0, 1[$ est admis dans le sujet original : pour toute suite d'entiers telle que $1 \leq a_n < \lfloor nx \rfloor$ à partir d'un certain rang, $a_n/n \rightarrow 0$ et $a_n \rightarrow +\infty$, la même somme tend vers $G(x)$. Ce résultat interviendra en 23(d), y compris lorsque $x \geq 1/2$.

Deuxième partie — Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

9. Lois de Bernoulli et binomiale

La transformation $Y_i = (X_i + 1)/2$ prend la valeur 1 lorsque $X_i = 1$, et la valeur 0 lorsque $X_i = -1$. Ainsi,

$$P(Y_i = 1) = \theta, \quad P(Y_i = 0) = 1 - \theta.$$

Donc Y_i suit la loi de Bernoulli de paramètre θ .

Les X_i sont mutuellement indépendantes. Le lemme des coalitions appliqué à des transformations individuelles montre que les Y_i sont également mutuellement indépendantes. Or,

$$\frac{S_n + n}{2} = \sum_{i=1}^n Y_i.$$

La somme de n Bernoulli indépendantes de même paramètre suit une loi binomiale. Par conséquent :

$$\frac{S_n + n}{2} \sim \mathcal{B}(n, \theta).$$

En particulier, S_n prend ses valeurs dans $\{-n, -n+2, \dots, n\}$ et, pour $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$P(S_n = 2j - n) = \binom{n}{j} \theta^j (1 - \theta)^{n-j}.$$

10. Non-indépendance des sommes partielles

Il suffit de montrer que S_1 et S_2 ne sont pas indépendantes.

Méthode 1 — Événements incompatibles

Les événements $[S_1 = -1]$ et $[S_2 = 2]$ ne peuvent pas se produire simultanément : $S_2 = 2$ impose $X_1 = X_2 = 1$, donc $S_1 = 1$. Ainsi,

$$P(S_1 = -1, S_2 = 2) = 0.$$

Pourtant, $P(S_1 = -1) = 1 - \theta > 0$ et $P(S_2 = 2) = \theta^2 > 0$. La probabilité de l'intersection n'est pas le produit des probabilités ; S_1 et S_2 sont dépendantes.

Méthode 2 — Covariance non nulle

Les variables sont bornées, donc leurs moments d'ordre deux existent. On a $E(X_1) = 2\theta - 1$, $E(X_1^2) = 1$, puis :

$$V(X_1) = 1 - (2\theta - 1)^2 = 4\theta(1 - \theta) > 0.$$

Par bilinéarité de la covariance et indépendance de X_1 et X_2 ,

$$\text{Cov}(S_1, S_2) = \text{Cov}(X_1, X_1 + X_2) = V(X_1) + 0 = 4\theta(1 - \theta) > 0.$$

Des variables indépendantes ayant des moments d'ordre deux ont une covariance nulle. Ici, la covariance non nulle exclut donc l'indépendance.

Dans les deux méthodes, une paire dépendante suffit à conclure que la famille $(S_n)_{n \geq 1}$ n'est pas mutuellement indépendante. Les sommes successives réutilisent les mêmes incréments.

11. Intervalle de confiance asymptotique

Question adaptée au programme actuel : le niveau est précisé comme étant au moins $1 - \alpha$, puisque la majoration de la variance produit généralement un intervalle conservateur. Le calcul ci-dessous donne sa couverture limite exacte.

Posons

$$\hat{\theta}_n = n^{-1} \sum_{i=1}^n Y_i.$$

D'après 9,

$$\hat{\theta}_n = \frac{1 + \overline{S}_n}{2}.$$

Les Y_i sont indépendantes, de même loi de Bernoulli, d'espérance θ et de variance $\theta(1 - \theta) > 0$, puisque $0 < \theta < 1$. Le théorème limite central s'applique :

$$Z_n = \frac{\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)}{\sqrt{\theta(1 - \theta)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z, \quad Z \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

L'identité $\theta(1 - \theta) = 1/4 - (\theta - 1/2)^2$ donne $\sqrt{\theta(1 - \theta)} \leq 1/2$. L'intervalle demandé s'écrit donc :

$$I_n = \left[\hat{\theta}_n - \frac{t_\alpha}{2\sqrt{n}}, \hat{\theta}_n + \frac{t_\alpha}{2\sqrt{n}} \right].$$

Pour le paramètre fixé θ , l'événement de couverture est :

$$[\theta \in I_n] = \left[|Z_n| \leq \frac{t_\alpha}{2\sqrt{\theta(1 - \theta)}} \right].$$

Posons $c = t_\alpha / (2\sqrt{\theta(1 - \theta)})$. C'est une constante strictement positive, indépendante de n , et $c \geq t_\alpha$.

La fonction $z \mapsto |z|$ est continue sur $\mathbb{R}$. Le théorème de composition de la convergence en loi donne $|Z_n| \xrightarrow{\mathcal{L}} |Z|$. La fonction de répartition de $|Z|$ est continue, notamment en c , donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(\theta \in I_n) = P(|Z| \leq c) = 2\Phi(c) - 1 \geq 2\Phi(t_\alpha) - 1 = 1 - \alpha.$$

Cela établit le niveau asymptotique au moins égal à $1 - \alpha$. Lorsque $\theta = 1/2$, on a $c = t_\alpha$ et la limite vaut exactement $1 - \alpha$. Pour $\theta \neq 1/2$, elle est strictement supérieure, puisque $c > t_\alpha$ et Φ est strictement croissante.

La normalisation utilise uniquement la variance théorique fixe. Aucune substitution d'un estimateur à un paramètre inconnu dans une convergence en loi n'est effectuée.

12. (a) Impossibilité d'un retour à un instant impair

Chaque incrément est égal à 1 ou -1 , deux entiers impairs. La somme de $2k + 1$ tels incréments est donc impaire. Elle ne peut pas être nulle, puisque 0 est pair.

Ainsi, $[S_{2k+1} = 0] = \emptyset$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$P(S_{2k+1} = 0) = 0.$$

12. (b) Probabilité de retour à un instant pair

Méthode 1 — Loi binomiale

Pour $k \geq 1$, la question 9 donne $(S_{2k} + 2k)/2 \sim \mathcal{B}(2k, \theta)$. L'événement $S_{2k} = 0$ équivaut à obtenir exactement k succès. Donc :

$$P(S_{2k} = 0) = \binom{2k}{k} \theta^k (1 - \theta)^k.$$

Pour $k = 0$, $S_0 = 0$ avec certitude, et le membre de droite vaut $\binom{0}{0} \theta^0 (1 - \theta)^0 = 1$. La formule est donc valable pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Méthode 2 — Dénombrement des incréments

Pour $k \geq 1$, le retour $S_{2k} = 0$ impose autant de pas positifs que de pas négatifs, donc exactement k pas de chaque signe. On choisit les k positions des pas positifs parmi $2k$, ce qui donne $\binom{2k}{k}$ suites d'incrément.

Par indépendance, chacune de ces suites a la probabilité $\theta^k (1 - \theta)^k$. Les suites distinctes correspondent à des événements disjoints ; la probabilité du retour est donc $\binom{2k}{k} \theta^k (1 - \theta)^k$. Pour $k = 0$, le retour initial est certain, ce qui redonne aussi la formule.

L'approche binomiale réutilise une loi déjà identifiée ; le dénombrement rend explicite le choix des positions des pas positifs.

13. Dernier retour à l'instant final

L'ensemble définissant L_n est non vide, car il contient 0, et fini. Son maximum existe.

L'égalité $L_n = n$ signifie exactement que $S_{2n} = 0$: un retour à l'instant final est nécessaire et suffisant pour que le maximum soit n . Par 12(b),

$$P(L_n = n) = P(S_{2n} = 0) = \binom{2n}{n} \theta^n (1 - \theta)^n.$$

14. (a) Description de l'événement $[L_n = k]$

Fixons $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$. Par définition, $L_n = k$ équivaut à un retour en 0 à l'instant $2k$, suivi d'aucun retour aux instants pairs $2k + 2, \dots, 2n$.

D'après 12(a), la marche ne peut jamais valoir 0 aux instants impairs. On peut donc ajouter aux conditions précédentes tous les instants impairs sans modifier l'événement. Cela donne :

$$[L_n = k] = [S_{2k} = 0] \cap \bigcap_{j=2k+1}^{2n} [S_j \neq 0].$$

Cette égalité vaut aussi pour $k = 0$, car $S_0 = 0$ et $L_n = 0$ signifie qu'il n'y a aucun retour après le départ.

14. (b) Redémarrage de la marche après un retour

Définissons, pour $1 \leq j \leq 2(n - k)$,

$$T_j = X_{2k+1} + \dots + X_{2k+j}.$$

On a $S_{2k+j} = S_{2k} + T_j$. Sur l'événement $B = [S_{2k} = 0]$, les conditions $S_{2k+j} \neq 0$ équivalent donc à $T_j \neq 0$.

La variable S_{2k} dépend seulement des incréments $X_1, \dots, X_{2k}$. Le vecteur des T_j dépend seulement des incréments suivants. Par indépendance mutuelle des incréments et lemme des coalitions, l'événement B et l'événement $\bigcap_{j=1}^{2(n-k)} [T_j \neq 0]$ sont indépendants. Pour $k = 0$, $B = \Omega$ et la même conclusion est immédiate.

De plus, $P(B) > 0$ par 12(b) et $0 < \theta < 1$, donc la probabilité conditionnelle est bien définie. On obtient :

$$P_B \left(\bigcap_{j=2k+1}^{2n} [S_j \neq 0] \right) = P \left(\bigcap_{j=1}^{2(n-k)} [T_j \neq 0] \right).$$

Les incréments futurs ont la même loi conjointe que les $2(n-k)$ premiers incréments, puisqu'ils sont indépendants et de même loi. Par transformation de ces vecteurs, $(T_1, \dots, T_{2(n-k)})$ et $(S_1, \dots, S_{2(n-k)})$ ont donc la même loi. Ainsi :

$$P_{[S_{2k}=0]} \left(\bigcap_{j=2k+1}^{2n} [S_j \neq 0] \right) = P \left(\bigcap_{j=1}^{2(n-k)} [S_j \neq 0] \right) = p_{n-k}.$$

Cette démonstration utilise directement l'indépendance des incréments ; aucun résultat général supplémentaire sur les marches aléatoires n'est nécessaire.

15. Loi de L_n en fonction des probabilités de non-retour

Pour $0 \leq k < n$, on applique 14(a), la définition d'une probabilité conditionnelle, 14(b), puis 12(b) :

$$P(L_n = k) = P(S_{2k} = 0) p_{n-k} = \binom{2k}{k} \theta^k (1-\theta)^k p_{n-k}.$$

Pour $k = n$, la question 13 fournit la même expression, avec la convention $p_0 = 1$. Pour $k = 0$, elle donne $P(L_n = 0) = p_n$, puisque le retour initial est certain.

La formule est donc valable pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

On suppose désormais $\theta = 1/2$, comme dans le sujet. Chaque suite fixée de m incréments a alors la probabilité 2^{-m} .

16. (a) Valeurs visitées et intervalle d'entiers

Précision de l'énoncé : r est un entier strictement positif quelconque. Fixons également une trajectoire ω .

On démontre par récurrence sur r que l'ensemble des valeurs visitées jusqu'à l'instant r est un intervalle d'entiers.

Pour $r = 1$, l'ensemble est le singleton $\{S_1(\omega)\}$, qui est un intervalle d'entiers.

Supposons que $\{S_1(\omega), \dots, S_r(\omega)\} = \llbracket m, M \rrbracket$ pour deux entiers $m \leq M$. Le nouvel élément est $S_{r+1}(\omega) = S_r(\omega) + 1$ ou $S_r(\omega) - 1$. Puisque $S_r(\omega) \in \llbracket m, M \rrbracket$, ce nouvel élément appartient à $\llbracket m - 1, M + 1 \rrbracket$.

S'il est déjà dans $\llbracket m, M \rrbracket$, l'ensemble ne change pas. Sinon, il vaut nécessairement $m - 1$ ou $M + 1$; son ajout agrandit l'intervalle d'une seule valeur à une extrémité. Dans tous les cas, l'ensemble reste un intervalle d'entiers.

La récurrence établit la propriété pour tout $r \geq 1$ et toute trajectoire.

16. (b) Décomposition selon le signe

Sur $\mathcal{D}_n$, aucune des valeurs $S_1, \dots, S_{2n}$ n'est nulle. Si deux de ces valeurs avaient des signes opposés, l'intervalle d'entiers décrit en 16(a) contiendrait 0, ce qui serait contradictoire.

Toutes les valeurs sont donc strictement positives ou toutes strictement négatives. Réciproquement, chacune de ces deux situations implique l'absence de valeur nulle. Ainsi :

$$\mathcal{D}_n = \mathcal{D}_n^+ \cup \mathcal{D}_n^-, \quad \mathcal{D}_n^+ \cap \mathcal{D}_n^- = \emptyset.$$

Par additivité de la probabilité sur une réunion disjointe,

$$P(\mathcal{D}_n) = P(\mathcal{D}_n^+) + P(\mathcal{D}_n^-).$$

17. Décomposition selon la position finale

Sur $\mathcal{D}_n^+$, la position finale S_{2n} est un entier pair strictement positif et au plus égal à $2n$. Elle s'écrit donc $2r$ pour un unique $r \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Pour un tel r , l'événement $A_{n,r}$ impose la positivité aux instants $1, \dots, 2n - 1$ et une position finale positive $2r$. Il équivaut donc à $\mathcal{D}_n^+ \cap [S_{2n} = 2r]$.

Les positions finales distinctes définissent des événements disjoints. Par conséquent,

$$\mathcal{D}_n^+ = \bigcup_{r=1}^n A_{n,r} \quad \text{et} \quad P(\mathcal{D}_n^+) = \sum_{r=1}^n a_{n,r}.$$

18. (a) Ajout des deux derniers incréments

Fixons $n \geq 2$ et $r, q \geq 1$. Si $q > n - 1$, $A_{n-1,q} = \emptyset$, donc sa probabilité et toutes les expressions demandées sont nulles. Considérons maintenant un événement $A_{n-1,q}$ non vide.

Sur cet événement, la marche est positive jusqu'à l'instant $2n - 2$ et $S_{2n-2} = 2q \geq 2$. À l'instant $2n - 1$, la position vaut $2q + 1$ ou $2q - 1$, donc elle reste strictement positive dans les deux cas.

Pour arriver à $S_{2n} = 2r$, il faut :

$$X_{2n-1} + X_{2n} = 2(r - q).$$

Les deux derniers incréments sont indépendants du passé, indépendants entre eux et équiprobables sur $\{-1, 1\}$. Leurs quatre couples ont chacun la probabilité $1/4$.

Si $q = r - 1$, il faut le couple $(1, 1)$, de probabilité $1/4$. Si $q = r + 1$, il faut le couple $(-1, -1)$, de probabilité $1/4$. Si $q = r$, les couples $(1, -1)$ et $(-1, 1)$ conviennent, avec probabilité totale $1/2$. Dans les autres cas, l'égalité est impossible.

Comme $r \geq 1$, la position finale demandée est positive. Toutes les conditions de $A_{n,r}$ sont alors satisfaites exactement dans les cas recensés. En multipliant par la probabilité du passé, on obtient :

$$P(A_{n-1,q} \cap A_{n,r}) = \begin{cases} \frac{1}{4} a_{n-1,q} & q = r - 1 \text{ ou } q = r + 1, \\ \frac{1}{2} a_{n-1,q} & q = r, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

18. (b) Relation de récurrence

Sur $A_{n,r}$, la position S_{2n-2} est paire, strictement positive et au plus égale à $2n - 2$. Elle est donc égale à $2q$ pour un unique $q \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$. Les conditions de positivité antérieures entraînent alors $A_{n-1,q}$.

Ainsi, $A_{n,r}$ est la réunion disjointe des $A_{n-1,q} \cap A_{n,r}$, pour $1 \leq q \leq n - 1$. En sommant les probabilités de 18(a), seuls les indices $q = r - 1, r, r + 1$ peuvent contribuer :

$$a_{n,r} = \frac{1}{4}a_{n-1,r-1} + \frac{1}{2}a_{n-1,r} + \frac{1}{4}a_{n-1,r+1}.$$

Les conventions $a_{n-1,q} = 0$ pour $q \leq 0$ ou $q > n-1$ permettent de conserver cette formule aux extrémités et lorsque $r > n$.

19. Formule explicite des $a_{n,r}$

Méthode 1 — Récurrence et relation de Pascal

La méthode imposée est une récurrence sur n , avec une propriété portant simultanément sur tous les $r \geq 1$.

Initialisation : pour $n = 1$, $A_{1,1}$ correspond aux deux premiers incréments égaux à 1, donc $a_{1,1} = 1/4$. La formule proposée donne :

$$\frac{1}{4} \left(\binom{1}{1} - \binom{1}{2} \right) = \frac{1}{4}.$$

Pour $r \geq 2$, $A_{1,r} = \emptyset$ et les deux coefficients $\binom{1}{r}, \binom{1}{r+1}$ sont nuls. La propriété est vraie pour $n = 1$.

Hérédité : supposons la formule établie au rang $n-1$, où $n \geq 2$, pour tous les indices strictement positifs. Pour pouvoir traiter $r = 1$ dans la récurrence, vérifions aussi l'indice 0 :

$$\binom{2n-3}{n-2} = \binom{2n-3}{n-1}$$

par symétrie des coefficients binomiaux. La différence proposée pour $a_{n-1,0}$ est donc nulle, conformément à la convention.

Fixons $r \geq 1$ et posons $m = 2n-3, j = n+r-2$. Par 18(b) et l'hypothèse de récurrence,

$$4^n a_{n,r} = \left(\binom{m}{j-1} - \binom{m}{j} \right) + 2 \left(\binom{m}{j} - \binom{m}{j+1} \right) + \left(\binom{m}{j+1} - \binom{m}{j+2} \right).$$

En regroupant selon les signes, cette expression est égale à :

$$\left(\binom{m}{j-1} + 2\binom{m}{j} + \binom{m}{j+1} \right) - \left(\binom{m}{j} + 2\binom{m}{j+1} + \binom{m}{j+2} \right).$$

La relation de Pascal appliquée deux fois donne :

$$\binom{m}{\ell-1} + 2\binom{m}{\ell} + \binom{m}{\ell+1} = \binom{m+2}{\ell+1}.$$

Cette identité reste valable pour les indices extérieurs grâce à la convention de nullité.

En prenant successivement $\ell = j$ et $\ell = j+1$, on obtient :

$$4^n a_{n,r} = \binom{2n-1}{n+r-1} - \binom{2n-1}{n+r}.$$

L'hérédité est démontrée, y compris pour $r = 1$ et pour $r > n$. Ainsi, pour tout $n, r \geq 1$:

$$a_{n,r} = \frac{1}{4^n} \left(\binom{2n-1}{n+r-1} - \binom{2n-1}{n+r} \right).$$

Méthode 2 — Dénombrement par réflexion d'une partie de trajectoire

Cette méthode donne une interprétation de la différence de coefficients binomiaux. Elle est démontrée ici par une bijection finie, sans supposer connu un théorème supplémentaire.

Fixons $1 \leq r \leq n$. Sur $A_{n,r}$, le premier incrément vaut nécessairement 1. On compte donc les chemins de $2n-1$ pas qui partent de 1, arrivent en $2r$ et restent strictement positifs. Chaque chemin, précédé du premier pas fixé, a la probabilité 4^{-n} .

Sans la condition de positivité, si u est le nombre de pas égaux à 1 parmi ces $2n-1$ pas, l'arrivée en $2r$ impose :

$$1 + u - (2n - 1 - u) = 2r, \text{ donc } u = n + r - 1.$$

Il y a ainsi $\binom{2n-1}{n+r-1}$ chemins au total.

Un chemin qui ne reste pas strictement positif passe nécessairement par 0, puisque ses pas valent 1 ou -1 . Prenons son premier passage en 0 et changeons le signe de toutes ses positions entre le départ et ce passage, en conservant la suite du chemin. On obtient un chemin qui part de -1 et arrive en $2r$, avec le même nombre de pas.

Réciproquement, tout chemin allant de -1 à $2r > 0$ passe par 0. En réfléchissant sa partie initiale jusqu'au premier passage en 0, on retrouve un unique chemin allant de 1 à $2r$ qui atteint 0. Les deux opérations sont inverses : elles définissent une bijection.

Pour un chemin allant de -1 à $2r$ en $2n - 1$ pas, le nombre de pas positifs vérifie :

$$-1 + u - (2n - 1 - u) = 2r, \text{ donc } u = n + r.$$

Le nombre de chemins à retirer est donc $\binom{2n-1}{n+r}$. Il reste :

$$\binom{2n-1}{n+r-1} - \binom{2n-1}{n+r}$$

chemins positifs, ce qui redonne la formule de $a_{n,r}$ après multiplication par 4^{-n} . Pour $r > n$, l'arrivée en $2r$ est impossible et les deux coefficients sont nuls.

La récurrence exploite la relation locale entre deux instants successifs. La réflexion explique globalement pourquoi une différence de deux dénombrements apparaît dans la formule.

20. Probabilité de ne pas revenir en zéro

Pour $n \geq 1$, $p_n = P(\mathcal{D}_n)$. La symétrie des incréments, puisque $\theta = 1/2$, donne $P(\mathcal{D}_n^+) = P(\mathcal{D}_n^-)$: remplacer chacun des $2n$ incréments par son opposé est une bijection entre les trajectoires positives et négatives, et préserve leur probabilité 4^{-n} .

Par 16(b), 17 et 19,

$$p_n = 2 \sum_{r=1}^n a_{n,r} = \frac{2}{4^n} \sum_{r=1}^n \left(\binom{2n-1}{n+r-1} - \binom{2n-1}{n+r} \right).$$

La somme est télescopique :

$$p_n = \frac{2}{4^n} \left(\binom{2n-1}{n} - \binom{2n-1}{2n} \right) = \frac{2}{4^n} \binom{2n-1}{n}.$$

Par Pascal et symétrie,

$$\binom{2n}{n} = \binom{2n-1}{n-1} + \binom{2n-1}{n} = 2 \binom{2n-1}{n}.$$

D'où, pour $n \geq 1$,

$$p_n = \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}.$$

Pour $n = 0$, cette expression vaut 1, conformément à $p_0 = 1$. La formule vaut donc pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Troisième partie — Comportement asymptotique

21. (a) Simulation du dernier passage

Le code complété est :

Python

```
import numpy.random as rd

def DernierPassage(n):
    L = 0
    S = 0
    for i in range(1, 2*n + 1):
        if rd.random() < 0.5:
            S = S + 1
        else:
            S = S - 1
        if S == 0:
            L = i // 2
    return L
```

L'entrée n est un entier strictement positif. S contient la position de la marche, et L le

demi-indice du dernier instant de retour déjà rencontré. L'initialisation $L = 0$ tient compte du retour initial $S_0 = 0$.

La boucle `range(1, 2*n + 1)` parcourt exactement les instants $1, \dots, 2n$. À chaque tour, une uniforme décide d'un incrément 1 ou -1 , chacun de probabilité $1/2$.

Lorsque $S == 0$, l'instant i est nécessairement pair d'après 12(a). L'opérateur `//`, division entière, calcule donc exactement $i/2$, et L est actualisé. En fin de boucle, L vaut $\max\{k \in \llbracket 0, n \rrbracket : S_{2k} = 0\}$, c'est-à-dire la réalisation de L_n recherchée.

Ce code a été exécuté. Un contrôle exhaustif des trajectoires pour de petites valeurs de n a aussi vérifié que le dernier passage calculé correspond à cette définition et que les fréquences exactes des trajectoires équiprobables concordent avec la loi issue de 15 et 20.

21. (b) Conjecture issue de l'histogramme

L'histogramme présente une forme en U : les observations sont plus fréquentes près de 0 et de 1 que près de $1/2$. Cette forme rappelle la densité de la loi arcsinus,

$$f(t) = \frac{1}{\pi\sqrt{t(1-t)}} \quad \text{pour } 0 < t < 1.$$

On peut donc conjecturer que L_n/n converge en loi vers une variable de loi arcsinus.

Les pics aux extrémités proviennent ici d'une variable discrète et de classes de largeur finie ; ils ne prouvent pas l'existence de masses ponctuelles dans la loi limite. Une simulation pour $n = 100$ ne démontre pas une convergence lorsque $n \rightarrow +\infty$. La preuve sera donnée en 25.

22. (a) Convergence de la série des accroissements de u_n

Pour $n \geq 1$, $C_n > 0$, donc $u_n = \ln(C_n)$ est bien défini. Le quotient des coefficients binomiaux est :

$$\frac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}.$$

On en déduit :

$$\frac{C_{n+1}}{C_n} = \frac{\sqrt{n+1}}{4\sqrt{n}} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \frac{2n+1}{2\sqrt{n(n+1)}}.$$

Méthode 1 — Comparaison avec une série télescopique

En élevant le quotient au carré, on obtient une identité exacte :

$$\left(\frac{C_{n+1}}{C_n}\right)^2 = \frac{4n(n+1)+1}{4n(n+1)} = 1 + \frac{1}{4n(n+1)}.$$

Ainsi,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{4n(n+1)} \right).$$

Pour $t \geq 0$, $0 \leq \ln(1+t) \leq t$. La majoration résulte par exemple de l'intégration de $1/(1+s) \leq 1$ sur $[0, t]$. Par conséquent,

$$0 \leq u_{n+1} - u_n \leq \frac{1}{8n(n+1)}.$$

La série majorante converge, car

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

et sa somme de $n = 1$ à $n = N$ vaut $1 - 1/(N+1)$. Par comparaison de séries à termes positifs,

$$\sum_{n \geq 1} (u_{n+1} - u_n)$$

converge.

Méthode 2 — Équivalent obtenu par développement limité

Le même quotient s'écrit :

$$\frac{C_{n+1}}{C_n} = \frac{1 + 1/(2n)}{\sqrt{1 + 1/n}}.$$

On a donc :

$$u_{n+1} - u_n = \ln \left(1 + \frac{1}{2n} \right) - \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right).$$

On applique séparément le développement limité usuel $\ln(1+t) = t - t^2/2 + o(t^2)$ à $t = 1/(2n)$ et $t = 1/n$:

$$\ln \left(1 + \frac{1}{2n} \right) = \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right),$$

$$\frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right).$$

En soustrayant ces développements, les termes d'ordre $1/n$ s'annulent :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{8n^2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right) \sim \frac{1}{8n^2}.$$

Le terme est positif par l'identité exacte de la première méthode. La série de Riemann

$$\sum 1/n^2$$

converge ; la comparaison par équivalence établit de nouveau la convergence demandée.

La première méthode fournit une borne exacte et évite les développements limités. La seconde apprend à repérer une annulation du premier ordre pour déterminer la bonne série de comparaison.

22. (b) Convergence de C_n

Pour tout $n \geq 2$, la somme télescopique donne :

$$u_n = u_1 + \sum_{j=1}^{n-1} (u_{j+1} - u_j).$$

La série de 22(a) étant convergente, ses sommes partielles tendent vers une limite finie. Ainsi, $u_n \rightarrow \ell$ pour un réel ℓ .

Par continuité de l'exponentielle, $C_n = e^{u_n} \rightarrow e^\ell > 0$. La suite (C_n) est donc convergente.

Le sujet original admet la valeur de cette limite :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} C_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

On utilisera cette valeur en 23 et en 24. Elle n'a pas besoin d'être obtenue par un résultat asymptotique extérieur au programme.

23. (a) Fonction de répartition de L_n/n

Comme L_n est entier et $0 < x < 1$, l'événement $L_n/n \leq x$ équivaut à $L_n \leq \lfloor nx \rfloor$. Les événements $[L_n = k]$ étant disjoints,

$$P\left(\frac{L_n}{n} \leq x\right) = \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} P(L_n = k).$$

Les questions 15 et 20, avec $\theta = 1/2$, donnent pour tout $0 \leq k \leq n$:

$$P(L_n = k) = \frac{1}{4^k} \binom{2k}{k} \frac{1}{4^{n-k}} \binom{2(n-k)}{n-k} = \frac{1}{4^n} \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k}.$$

En sommant, on obtient exactement :

$$P\left(\frac{L_n}{n} \leq x\right) = \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k}.$$

23. (b) Encadrement de la somme centrale

Pour n suffisamment grand, $1 \leq a_n < \lfloor nx \rfloor \leq n - 1$. Ainsi, pour chaque indice k de la somme, $k \geq 1$ et $n - k \geq 1$, et les termes C_k, C_{n-k} sont définis.

La définition de C_j donne :

$$\frac{1}{4^n} \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k} = \frac{C_k C_{n-k}}{\sqrt{k(n-k)}}.$$

L'ensemble des indices est fini et non vide. Son minimum m_n et son maximum M_n existent, et :

$$m_n \leq C_k C_{n-k} \leq M_n.$$

En multipliant par la quantité positive $1/\sqrt{k(n-k)}$, puis en sommant sur $a_n \leq k \leq \lfloor nx \rfloor$, on obtient l'encadrement demandé :

$$m_n \sum_{k=a_n}^{\lfloor nx \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \leq \frac{1}{4^n} \sum_{k=a_n}^{\lfloor nx \rfloor} \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k} \leq M_n \sum_{k=a_n}^{\lfloor nx \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}.$$

23. (c) Extrema sur des intervalles d'indices allant vers l'infini

Posons $c = 1/\sqrt{\pi}$. On utilise la définition quantifiée de $C_k \rightarrow c$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $K \geq 1$ tel que, pour tout $k \geq K$,

$$c - \varepsilon < C_k < c + \varepsilon.$$

Comme $\alpha_n \rightarrow +\infty$, il existe N tel que $n \geq N$ implique $\alpha_n \geq K$. Tous les indices de $[\alpha_n, \beta_n]$ sont alors supérieurs ou égaux à K , quelle que soit la taille de β_n .

Le minimum et le maximum d'un ensemble fini non vide de valeurs appartenant à $]c - \varepsilon, c + \varepsilon[$ appartiennent eux aussi à cet intervalle. Ainsi, pour $n \geq N$,

$$c - \varepsilon < \min_{k \in [\alpha_n, \beta_n]} C_k \leq \max_{k \in [\alpha_n, \beta_n]} C_k < c + \varepsilon.$$

Cela prouve que les deux suites convergent vers $c = 1/\sqrt{\pi}$.

Il n'est pas nécessaire que ces minima et maxima forment des suites monotones : le fait que tous les indices dépassent un seuil arbitraire suffit.

23. (d) Limite de la somme centrale

Posons $b_n = \lfloor nx \rfloor$ et $c = 1/\sqrt{\pi}$. On doit d'abord contrôler simultanément C_k et C_{n-k} sur tous les indices de la somme.

On a $a_n \rightarrow +\infty$ et, par la question 1,

$$\frac{n - b_n}{n} \rightarrow 1 - x > 0.$$

Donc $n - b_n \rightarrow +\infty$. Pour $a_n \leq k \leq b_n$, les indices k et $n - k$ appartiennent respectivement aux intervalles $\llbracket a_n, b_n \rrbracket$ et $\llbracket n - b_n, n - a_n \rrbracket$, dont les bornes inférieures tendent vers $+\infty$.

Par 23(c), les minima et maxima des C_j sur chacun de ces deux intervalles tendent vers c . Notons-les respectivement ℓ_n, h_n et ℓ'_n, h'_n .

Tous les C_j sont positifs. Pour chaque indice k de la somme,

$$\ell_n \ell'_n \leq C_k C_{n-k} \leq h_n h'_n.$$

Les mêmes bornes encadrent donc à la fois m_n et M_n :

$$\ell_n \ell'_n \leq m_n \leq M_n \leq h_n h'_n.$$

Les deux bornes tendent vers $c^2 = 1/\pi$. Par encadrement,

$$m_n \rightarrow \frac{1}{\pi}, \quad M_n \rightarrow \frac{1}{\pi}.$$

Le résultat admis après 8 s'applique pour $x \in]0, 1[$ et la suite considérée :

$$\sum_{k=a_n}^{b_n} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \rightarrow G(x).$$

Les deux bornes de 23(b) tendent donc vers $G(x)/\pi$. Un dernier encadrement donne :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4^n} \sum_{k=a_n}^{\lfloor nx \rfloor} \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k} = \frac{G(x)}{\pi}.$$

Cette preuve établit un contrôle simultané sur les indices mobiles ; elle ne remplace pas sans justification chaque terme d'une somme croissante par un équivalent ponctuel.

24. (a) Choix d'une troncature plus lente

On peut prendre $a_n = \lfloor n^{1/4} \rfloor$.

Pour $n \geq 1$, $a_n \geq 1$. Comme $n^{1/4} - 1 < a_n \leq n^{1/4}$, on a $a_n \rightarrow +\infty$ et :

$$0 \leq \frac{a_n}{\sqrt{n}} \leq n^{-1/4} \rightarrow 0.$$

De plus, $a_n/n \rightarrow 0$, alors que $\lfloor nx \rfloor/n \rightarrow x > 0$. Donc $a_n < \lfloor nx \rfloor$ pour tout n assez grand. Toutes les conditions sont satisfaites.

24. (b) Contribution négligeable près de zéro

La suite $(C_j)_{j \geq 1}$ converge, donc elle est bornée. Choisissons une constante $B > 0$ telle que $C_j \leq B$ pour tout $j \geq 1$.

Pour simplifier les expressions, posons :

$$q_j = \frac{1}{4^j} \binom{2j}{j} \quad (j \in \mathbb{N}).$$

Par 20, $q_j = p_j$, donc $0 \leq q_j \leq 1$. Pour $j \geq 1$, on a aussi $q_j = C_j/\sqrt{j} \leq B/\sqrt{j}$. On traite ainsi le cas $j = 0$ sans définir artificiellement C_0 .

L'hypothèse $a_n/\sqrt{n} \rightarrow 0$ implique $a_n/n \rightarrow 0$. Pour tout n assez grand, $a_n \leq n/2$, et, pour $0 \leq k \leq a_n - 1$, on a $n - k \geq n/2 > 0$.

Par conséquent,

$$0 \leq \frac{1}{4^n} \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k} = q_k q_{n-k} \leq \frac{B}{\sqrt{n-k}} \leq \frac{B\sqrt{2}}{\sqrt{n}}.$$

La somme comporte exactement a_n termes. On obtient donc :

$$0 \leq \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{a_n-1} \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k} \leq B\sqrt{2} \frac{a_n}{\sqrt{n}} \rightarrow 0.$$

Le théorème d'encadrement établit la limite demandée. Cette majoration comprend le terme $k = 0$ et ne divise jamais par $\sqrt{k}$.

25. Convergence en loi vers la loi arcsinus

Soit X une variable de loi arcsinus, dont la fonction de répartition F_X a été calculée en 5(a). Elle est continue sur tout $\mathbb{R}$, y compris en 0 et 1, par la continuité de G et les valeurs $G(0) = 0, G(1) = \pi$.

Notons F_n la fonction de répartition de L_n/n . Pour montrer la convergence en loi, on établit $F_n(x) \rightarrow F_X(x)$ pour tout réel x .

Si $0 < x < 1$, choisissons la suite $a_n = \lfloor n^{1/4} \rfloor$ de 24(a). Elle satisfait les hypothèses de 24 et aussi celles de 23. La formule de 23(a) se décompose en deux sommes :

$$F_n(x) = \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{a_n-1} \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k} + \frac{1}{4^n} \sum_{k=a_n}^{\lfloor nx \rfloor} \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k}.$$

Par 24(b), la première somme tend vers 0. Par 23(d), la seconde tend vers $G(x)/\pi$. Ainsi,

$$F_n(x) \rightarrow \frac{G(x)}{\pi} = F_X(x) \quad (0 < x < 1).$$

Si $x < 0$, $L_n/n \geq 0$ implique $F_n(x) = 0 = F_X(x)$ pour tout n .

Si $x = 0$, les questions 15 et 20 donnent :

$$F_n(0) = P(L_n = 0) = p_n = \frac{C_n}{\sqrt{n}} \rightarrow 0 = F_X(0),$$

puisque (C_n) est bornée.

Enfin, si $x \geq 1$, $L_n/n \leq 1$ implique $F_n(x) = 1 = F_X(x)$ pour tout n .

La convergence des fonctions de répartition est donc établie en tous les points de continuité de F_X , ici tous les réels. Par définition de la convergence en loi,

$$\frac{L_n}{n} \xrightarrow{\mathcal{L}} X, \quad X \text{ suit la loi arcsinus.}$$

Relevé des adaptations

- 7 : le caractère entier de k , implicite dans les sommes ultérieures, est explicité.
- 11 : la couverture asymptotique est précisée comme étant au moins $1 - \alpha$. Elle vaut exactement $1 - \alpha$ pour $\theta = 1/2$ et est strictement supérieure pour les autres valeurs du paramètre.
- 16(a) : le quantificateur $r \in \mathbb{N}^*$, implicite dans le PDF, est explicité.
- 21(b) : la figure est retranscrite en SVG dans l'énoncé à partir de l'original, avec les valeurs mesurées. Les 100 classes sont conservées ; leurs hauteurs sont des lectures approchées du graphique numérisé.