



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques

2025

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

On suppose, pour toutes les questions en langage Python, les bibliothèques usuelles déjà importées sous leurs raccourcis habituels.

Python

```
import numpy as np  
  
import numpy.random as rd  
  
import matplotlib.pyplot as plt
```

Problème 1

Partie 1 - Une suite d'intégrales

On introduit les deux suites réelles $(I_n)_{n \geq 0}$ et $(J_n)_{n \geq 0}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^1 (1 - t^2)^n dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_{-1}^1 (1 - t^2)^n dt.$$

1. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les intégrales I_n et J_n sont bien définies et exprimer J_n en fonction de I_n .
2. Calculer I_0 .
3. Montrer que la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ est décroissante.
4. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que, pour tout $n \geq 1$,

$$I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}.$$

5. En déduire, par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$$

puis donner la valeur de J_n .

6. Informatique. Compléter alors la fonction Python ci-dessous pour qu'elle calcule et renvoie la valeur de I_n , où n est en argument.

Python

```
def I(n) :  
    i=1  
    for k in ..... :  
        i = .....  
    return i
```

7. On admet que $\binom{2n}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$. Montrer que $J_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{n}}$.

Partie 2 - Des polynômes orthogonaux

Dans toute cette section, on considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}[x]$ des polynômes et, pour un entier $n \geq 2$ fixé, son sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[x]$ formé des polynômes de degré inférieur ou égal à n dont on note $\mathcal{B}_n = (e_0, e_1, \dots, e_n)$ la base canonique.

8. Montrer que l'application

$$\mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (P, Q) \longmapsto \int_{-1}^1 P(t)Q(t) \, dt$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[x]$.

On notera $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ce produit scalaire et $\| \cdot \|$ la norme associée.

9. Les polynômes de $\mathcal{B}_n$ sont-ils deux à deux orthogonaux pour ce produit scalaire ?

On définit ensuite l'application u sur $\mathbb{R}_n[x]$ par $u : P \mapsto u(P)$ où $u(P)$ est la dérivée de la fonction polynomiale $x \mapsto (1 - x^2)P'(x)$. Par abus de notation et pour alléger la présentation, on s'autorisera à écrire

$$u(P) : x \mapsto ((1 - x^2)P'(x))'.$$

10. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.

11. a. Montrer que $u(e_0) = 0$ puis que $u(e_1) = -2e_1$.

b. Soit $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$. Montrer que $u(e_k) = -k(k+1)e_k + k(k-1)e_{k-2}$.

c. Dédurre des deux questions précédentes le spectre de u ainsi que la dimension de chaque sous-espace propre.

12. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, qu'il existe une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[x]$ formée de vecteurs propres de u . En déduire l'existence d'une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[x]$ formée de vecteurs propres de u pour lesquels le coefficient du terme de plus haut degré vaut 1. On notera $\mathcal{L}_n = (L_0, L_1, \dots, L_n)$ cette base.

On admet que, quitte à réordonner les termes, la famille de polynômes $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ ainsi construite est telle que, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $(L_0, L_1, \dots, L_k)$ forme une base orthogonale de $\mathbb{R}_k[x]$. On pourra utiliser cette observation dans la suite du problème.

13. Soit $m > n$ un entier. Soit $f \in \mathbb{R}_m[x]$ un polynôme.

a. Montrer qu'il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}_n[x]$ tel que

$$\|f - T_n\| = \min_{g \in \mathbb{R}_n[x]} \|f - g\|.$$

Montrer qu'il existe $(c_0, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que

$$T_n = \sum_{k=0}^n c_k L_k.$$

On précisera, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, l'expression de c_k en fonction de f et de L_k .

b. Montrer que

$$\|f - T_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^n c_k^2 \|L_k\|^2.$$

14. On considère, pour tout $k \in \mathbb{N}$, les polynômes $P_k : x \mapsto (x^2 - 1)^k$ et $Q_k = P_k^{(k)}$ (Q_k est ainsi obtenu en dérivant k fois P_k). En particulier, $Q_0 = P_0^{(0)} = P_0$.

a. Montrer que Q_k est un polynôme de degré k et que son coefficient de plus haut degré vaut $\frac{(2k)!}{k!}$.

b. Expliciter les polynômes Q_0 , Q_1 et Q_2 .

c. i. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R} : P_1(x)P_k'(x) = 2ke_1(x)P_k(x)$.

ii. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ fixé. En dérivant, à l'aide de la formule de Leibniz, la relation précédente à l'ordre $k + 1$, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (1 - x^2)Q_k''(x) - 2xQ_k'(x) + k(k + 1)Q_k(x) = 0.$$

En déduire que Q_k est un vecteur propre de u associé à la valeur propre $-k(k + 1)$.

iii. Conclure que, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$: $L_k = \frac{k!}{(2k)!} Q_k$.

d. Montrer par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} \forall (f, g) \in \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[x], \quad \int_{-1}^1 f^{(k)}(t)g(t) \, dt &= \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \left[f^{(k-1-j)}(t)g^{(j)}(t) \right]_{-1}^1 \\ &+ (-1)^k \int_{-1}^1 f(t)g^{(k)}(t) \, dt. \end{aligned}$$

e. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ fixé.

i. Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}, P_k^{(2k)}(x) = (2k)!$.

ii. Montrer par récurrence que, pour tout $\ell \in \llbracket 0, k \rrbracket$, il existe un polynôme $R_{k,\ell}$ de degré inférieur ou égal à ℓ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_k^{(\ell)}(x) = (x^2 - 1)^{k-\ell} R_{k,\ell}(x).$$

iii. En déduire que, pour tout $\ell \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$, $P_k^{(\ell)}(-1) = P_k^{(\ell)}(1) = 0$ puis, à l'aide des résultats de la Partie 1, que

$$\|Q_k\|^2 = \frac{2^{2k+1}(k!)^2}{2k+1}, \quad \text{puis} \quad \|L_k\| = 2^k \sqrt{\frac{2}{2k+1}} \binom{2k}{k}^{-1}.$$

Problème 2

Dans tout le problème, on considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

La Partie 2 peut être traitée indépendamment de la Partie 1, excepté pour la Question 20. qui établit un lien entre un résultat observé à la Question 8. et une propriété démontrée tout au long de la Partie 2.

Partie 1 - Loi de Cauchy

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$.

1. Montrer que f peut être considérée comme une densité de probabilité.

On note X une variable aléatoire de densité f . On dit que X suit la loi de Cauchy. On note F la fonction de répartition de X .

2. Montrer que X n'admet ni espérance, ni variance.

3. Donner, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'expression de $F(x)$. Montrer que F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, 1[$ et préciser, pour tout $y \in]0, 1[$, l'expression de $F^{-1}(y)$.

4. a. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0, 1[$. Montrer que $Y = F^{-1}(U)$ suit la même loi que X .

b. Informatique. Dédurre de la question précédente l'écriture d'une fonction Python d'en-tête `def cauchy()` : qui renvoie une simulation de X .

On note maintenant $Z = \sqrt{|X|}$. On admet que Z est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

5. Montrer que Z est une variable aléatoire à densité et expliciter une densité f_Z de Z .

6. Justifier que Z admet une espérance, mais pas de variance.

7. Le but de cette question est de calculer explicitement $E(Z)$.

a. Déterminer deux réels α et β tels que

$$\forall x \geq 0, \quad \frac{x^2}{(x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)} = \frac{\alpha x}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{\beta x}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}.$$

b. Justifier que les intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}$ et $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}$ convergent.

Obtenir, à l'aide d'un changement de variable affine, que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

On admet qu'on peut obtenir de la même manière : $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} = \frac{3\pi}{2\sqrt{2}}.$

c. En observant que, pour tout $x \geq 0$,

$$\begin{aligned} \frac{\alpha x}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{\beta x}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} &= \frac{\alpha}{2} \left(\frac{2x - \sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{\sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \right) \\ &+ \frac{\beta}{2} \left(\frac{2x + \sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} - \frac{\sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} \right), \end{aligned}$$

en déduire que $E(Z) = \sqrt{2}$.

8. Informatique. On suppose écrite correctement la fonction de la Question 4.b. On dispose du programme ci-dessous dont l'exécution produit, après un temps certain, l'affichage ci-après.

Comment interpréter cet affichage ? Quel résultat peut-on conjecturer ? À quel résultat du cours serait-on tenté de faire appel pour démontrer cette conjecture ? Pourquoi ne peut-on pas l'appliquer ? On détaillera le raisonnement.

Python

```
def mystere(eps, n):
    L=np.zeros(1000)
    for k in range(1000):
        ech=np.zeros(n)
        for i in range(n):
```

```

        ech[i]=np.sqrt(np.abs(cauchy()))

    if np.abs(np.sum(ech)/n-np.sqrt(2)) <= eps :

        L[k]=1

    return np.sum(L)/1000

M=np.zeros([4,7])
eps=np.array([1, 0.5, 0.1, 0.05])
n=np.array([100, 500, 1000, 1500, 3000, 5000, 50000])
for i in range(4):
    for j in range(7):
        M[i,j]=mystere(eps[i], n[j])

print(M)

```

Affichage Python :

Texte

```

>>>
[[0.99 1.  0.999 1.  1.  1.  1. ]
 [0.964 0.995 0.995 0.998 0.999 0.999 1. ]
 [0.411 0.725 0.846 0.903 0.965 0.988 0.997]
 [0.21 0.428 0.548 0.599 0.742 0.834 0.992]]

```

Partie 2 - Variables indicatrices et une extension de théorème

Soit A un évènement. On appelle variable aléatoire indicatrice de l'évènement A la variable aléatoire notée $\mathbb{1}_A$ définie par :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A \end{cases}.$$

9. Reconnaître la loi de $\mathbb{1}_A$. Préciser son espérance et sa variance.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle fonction indicatrice de I la fonction notée χ_I , définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \chi_I(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in I \\ 0 & \text{si } x \notin I \end{cases}.$$

Soient X une variable aléatoire réelle de densité g et $s > 0$.

10. a. Justifier que :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \mathbb{1}_{[X > s]}(\omega) = \chi_{]s, +\infty[}(X(\omega)).$$

b. Soit φ_s la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi_s(x) = |x| \chi_{]s, +\infty[}(|x|)$.

Tracer la courbe représentative de φ_s .

Donner sans justification les points de discontinuité de φ_s .

On suppose, dans toute la suite, que X admet une espérance, et que celle-ci est nulle. On souligne le fait qu'on ne suppose pas que X admet une variance.

On considère alors une suite $(X_k)_{k \geq 1}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi que X .

Soit $M > 0$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on introduit les variables

$$Y_k = X_k \cdot \mathbb{1}_{|X_k| \leq M} \quad \text{et} \quad Z_k = X_k \cdot \mathbb{1}_{|X_k| > M}.$$

Les variables aléatoires Y_k et Z_k sont donc définies comme produit de la variable aléatoire X_k avec une variable indicatrice.

On fera observer que les variables aléatoires Y_k et Z_k dépendent de M . Toutefois, pour alléger la rédaction, on a choisi de ne pas faire apparaître cette dépendance dans les

notations.

11. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Quelle relation a-t-on entre X_k , Y_k et Z_k ?

12. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que Y_k admet un moment d'ordre 2 et que $E(Y_k^2) \leq M^2$.

13. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

a. À l'aide des Questions 10.a. et 10.b., montrer que : $\lim_{M \rightarrow +\infty} E(|Z_k|) = 0$.

b. En déduire : $\lim_{M \rightarrow +\infty} E(Z_k) = 0$.

c. Obtenir alors que : $\lim_{M \rightarrow +\infty} E(Y_k) = E(X_k) = 0$.

Dans toute la suite, on considère $t > 0$ et $\varepsilon > 0$ fixés.

14. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$|x + y| > t \implies \left(\left[|x| > \frac{t}{2} \right] \text{ ou } \left[|y| > \frac{t}{2} \right] \right).$$

15. On note alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\bar{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}, \quad \bar{Y}_n = \frac{Y_1 + \dots + Y_n}{n} \quad \text{et} \quad \bar{Z}_n = \frac{Z_1 + \dots + Z_n}{n}.$$

Déduire de la question précédente que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(|\bar{X}_n| > t) \leq P(|\bar{Y}_n| > \frac{t}{2}) + P(|\bar{Z}_n| > \frac{t}{2}).$$

16. a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $P\left(|\bar{Z}_n| > \frac{t}{2}\right) \leq \frac{2}{t}E(|Z_1|)$.

b. Montrer ensuite qu'il existe un réel $M_1 > 0$, tel que, si $M \geq M_1$, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P\left(|\bar{Z}_n| > \frac{t}{2}\right) \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

17. a. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad E(\bar{Y}_n^2) = \frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=1}^n E(Y_k^2) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} E(Y_i Y_j) \right).$$

b. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} E(Y_i Y_j) \leq n(n-1)E(Y_1)^2.$$

c. Obtenir ensuite que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad E(\bar{Y}_n^2) \leq \frac{M^2}{n} + E(Y_1)^2.$$

d. Justifier l'existence d'un réel $M_2 > 0$ tel que, si $M \geq M_2$, alors :

$$E(Y_1)^2 \leq \frac{t^2 \varepsilon}{12}.$$

e. Obtenir alors que, si $M \geq M_2$, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P\left(|\bar{Y}_n| > \frac{t}{2}\right) \leq \frac{4M^2}{t^2 n} + \frac{\varepsilon}{3}.$$

18. Montrer que, si $M \geq \max(M_1, M_2)$, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(|\bar{X}_n| > t) \leq \frac{4M^2}{t^2 n} + \frac{2\varepsilon}{3}.$$

19. Conclure qu'on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|\bar{X}_n| > t) = 0.$$

20. Interpréter ce résultat en le comparant à un résultat du cours que l'on citera explicitement. Commenter alors à nouveau le résultat affiché par l'exécution du programme de la Question 8.