



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques

2024

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

On suppose, pour toutes les questions en langage Python, les bibliothèques usuelles déjà importées sous leurs raccourcis habituels.

Python

```
import numpy as np

import numpy.random as rd

import numpy.linalg as al

import matplotlib.pyplot as plt

import scipy.special as sp
```

Problème 1

Dans tout le problème, n désigne un entier supérieur ou égal à 1.

Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice carrée, on note, pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, $(M)_{i,j}$ le coefficient de M à l'intersection de la i -ème ligne et de la j -ème colonne. La matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est notée I_n .

Partie 1 : Racine(s) d'une matrice carrée

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ fixée. On cherche à déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$ et, si c'est le cas, à décrire l'ensemble des solutions de cette équation, d'inconnue $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = A$. Montrer que : $AM = MA$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = A$. Montrer que A est inversible si et seulement si M est inversible.

3. On considère, dans cette question, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

a. Calculer A^2 . La matrice A est-elle diagonalisable ?

b. Montrer que si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est solution de $M^2 = A$, alors $a = d$ et $b = -c$.

c. Montrer alors que $M^2 = A$ admet deux solutions que l'on explicitera.

4. On considère, dans cette question,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On suppose qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 = A$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par M dans la base canonique.

a. A est-elle diagonalisable ?

b. Montrer que $M^4 \neq 0$ et que $M^6 = 0$. On note alors $p = \min\{k \in \mathbb{N}^* : M^k = 0\}$.

c. Montrer qu'il existe un vecteur non nul u de $\mathbb{R}^3$ tel que $(u, f(u), f^2(u), \dots, f^{p-1}(u))$ forme une famille libre de $\mathbb{R}^3$. (On pourra commencer par appliquer f^{p-1} à l'équation de liaison.)

d. Conclure à une contradiction.

5. Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = I_n$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ représenté par M dans la base canonique.

- a. Déterminer un polynôme annulateur de M puis les valeurs propres possibles de M .
- b. Montrer que : $\mathbb{R}^n = \text{Ker}(f - \text{id}) \oplus \text{Ker}(f + \text{id})$.
- c. En déduire que M est diagonalisable.
- d. Conclure que l'ensemble des solutions de l'équation $M^2 = I_n$ est l'ensemble des matrices semblables aux matrices diagonales où tous les éléments diagonaux sont égaux à 1 ou à -1 , c'est-à-dire l'ensemble des matrices semblables aux matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \varepsilon_n \end{pmatrix}$$

où $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \varepsilon_i \in \{-1; 1\}$.

6. On suppose dans cette question que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est telle que $\text{Sp}(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, où les réels λ_i vérifient

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n.$$

- a. Justifier qu'il existe une matrice D diagonale (que l'on précisera) et une matrice P inversible telles que $A = PDP^{-1}$.
- b. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $N = P^{-1}MP$. Montrer que $M^2 = A$ si et seulement si $N^2 = D$.
- c. À l'aide de la Question 1., montrer que N est une matrice diagonale.

- d. L'équation $M^2 = A$ a-t-elle des solutions si A admet au moins une valeur propre strictement négative ?
 - e. Décrire l'ensemble des solutions dans le cas où toutes les valeurs propres sont positives.
7. On suppose maintenant que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique et que ses valeurs propres sont toutes strictement positives. On ne suppose plus qu'elles sont distinctes.

$$\text{Sp}(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} \subset \mathbb{R}_+^*.$$

Le but de cette question est de montrer qu'il existe alors une unique matrice M symétrique avec des valeurs propres strictement positives telle que $M^2 = A$.

- a. Montrer, en la construisant, qu'il existe une matrice M symétrique avec des valeurs propres strictement positives telle que $M^2 = A$.
- b. On suppose qu'il existe deux matrices M_1 et M_2 vérifiant la propriété précédente (c'est-à-dire que M_1 et M_2 sont toutes deux symétriques avec des valeurs propres strictement positives et vérifient $M_1^2 = M_2^2 = A$). On note $\text{Sp}(M_1) = \{a_1, \dots, a_n\}$ et $\text{Sp}(M_2) = \{b_1, \dots, b_n\}$. Enfin, on désigne par D_1 (respectivement D_2) la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs $a_1, \dots, a_n$ (respectivement $b_1, \dots, b_n$).

- i. Justifier qu'il existe deux matrices orthogonales P_1 et P_2 telles que :

$$M_1 = P_1 D_1 P_1^{-1} \text{ et } M_2 = P_2 D_2 P_2^{-1}.$$

- ii. On pose $P = P_1^{-1} P_2$. Montrer que $D_1^2 P = P D_2^2$ et en déduire que, pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, on a $a_i^2(P)_{i,j} = (P)_{i,j} b_j^2$.
- iii. Montrer qu'on a alors, pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, $a_i(P)_{i,j} = (P)_{i,j} b_j$ puis que $D_1 P = P D_2$.

iv. Conclure que $M_1 = M_2$.

Partie 2 : Une suite de matrices

8. Montrer que l'application

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (A, B) \longmapsto \text{Tr}({}^tAB)$$

définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On notera $(\cdot, \cdot)$ ce produit scalaire et $\|\cdot\|_2$ la norme associée.

9. Montrer que, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$\|M\|_2 \leq n \max_{1 \leq i, j \leq n} |(M)_{i,j}|.$$

Une suite $(M_k)_{k \geq 0}$ de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite convergente coefficient par coefficient si, pour tout couple d'entiers $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, la suite $((M_k)_{i,j})_{k \geq 0}$ est convergente (de limite $\ell_{i,j}$). Auquel cas, on écrira

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} M_k = L,$$

où L est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $(L)_{i,j} = \ell_{i,j}$.

10. Justifier que, si $(M_k)_{k \geq 0}$ est une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui admet comme limite coefficient par coefficient la matrice $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors, pour toutes matrices $K_1, K_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la suite de matrices $(K_1 M_k K_2)_{k \geq 0}$ converge coefficient par coefficient vers la matrice $K_1 L K_2$.

11. On considère un nombre réel $a \neq 0$ et la suite réelle $(u_m)_{m \geq 0}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = a \\ \forall m \in \mathbb{N}, u_{m+1} = \frac{1}{2} \left(u_m + \frac{1}{u_m} \right) \end{cases}.$$

- a. Étudier et dresser le tableau de variations de la fonction $\varphi : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right)$.

On y fera figurer les limites de φ aux bords de l'ensemble de définition.

- b. Montrer, par récurrence, que, si $a > 0$, alors $(u_m)_{m \geq 1}$ est bien définie et que, pour tout $m \geq 1$, $|u_m| \geq 1$ et u_m a le même signe que a .

On admet qu'avec un raisonnement analogue, on obtient le même résultat pour $a < 0$.

- c. Montrer que $(u_m)_{m \geq 1}$ est monotone et qu'elle converge vers une limite $\varepsilon \in \{-1; 1\}$.

- d. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| \geq 1$, on a $|\varphi'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

- e. En déduire que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $|u_m - \varepsilon| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^m \left(|a| + \frac{1}{|a|}\right)$.

12. On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible et symétrique et on introduit la suite $(M_k)_{k \geq 0}$ de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$\begin{cases} M_0 = A \\ \forall k \in \mathbb{N}, M_{k+1} = \frac{1}{2} (M_k + M_k^{-1}) \end{cases}.$$

- a. Justifier qu'il existe une matrice orthogonale P telle que $D_0 = P^{-1}AP$ est diagonale et inversible.

- b. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, M_k est bien définie et inversible et que la matrice $D_k = P^{-1}M_kP$ est diagonale et inversible et vérifie

$$D_{k+1} = \frac{1}{2} (D_k + D_k^{-1}).$$

- c. En déduire que $(M_k)_{k \geq 0}$ converge coefficient par coefficient vers une matrice L qui vérifie $L^2 = I_n$.

d. On note $\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \text{Sp}(A)\}$ et $r(A) = \min\{|\lambda| : \lambda \in \text{Sp}(A)\}$.

i. Montrer, à l'aide des Questions 9. et 11.e., que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\|M_k - L\|_2 \leq n \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\rho(A) + \frac{1}{r(A)}\right).$$

ii. En reprenant le raisonnement de la Question 9., montrer qu'on a même, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\|M_k - L\|_2 \leq \sqrt{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\rho(A) + \frac{1}{r(A)}\right).$$

e. Informatique. Recopier et compléter le programme Python ci-dessous qui, prenant en argument la matrice A , renvoie une matrice M_k telle que $\|M_k - L\|_2 \leq 10^{-3}$.

Python

```
def suite_matricielle(A):
    n = len(A)
    v = al.eig(A)[0]
    x, y = max(abs(v)), min(abs(v))
    U, k = A, 0
    c = .....
    while ..... :
        k = k+1
        U = .....
    return U
```

Problème 2

La quatrième partie de ce problème est totalement indépendante de sa troisième partie.

Toutes les variables aléatoires de ce problème sont supposées définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qu'on ne cherchera pas à préciser.

Dans tout le problème, on considère un paramètre réel $\lambda > 0$ et une suite $(Y_i)_{i \geq 1}$ de

variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi $\mathcal{E}(\lambda)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n.$$

Partie 1 : Préliminaires

1. On introduit, pour tout $m \in \mathbb{N}$, l'intégrale : $I_m = \int_0^{+\infty} u^m e^{-u} du$.

Montrer par récurrence que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, I_m converge et que $I_m = m!$.

2. On considère, pour tout entier $n \geq 2$, la fonction h_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h_n(t) = \begin{cases} n^2 t, & \text{si } 0 < t \leq \frac{1}{n} \\ n^2 \left(\frac{2}{n} - t \right), & \text{si } \frac{1}{n} < t \leq \frac{2}{n} \\ 0, & \text{si } t \notin \left] 0, \frac{2}{n} \right] \end{cases}.$$

a. Représenter l'allure de la courbe de h_n .

Vérifier que, pour tout entier $n \geq 2$, h_n peut être considérée comme une densité de probabilité.

b. Soit $t \in [0, 1]$ fixé. Que vaut $\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(t)$?

c. Vérifier alors que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 h_n(t) dt \neq \int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(t) dt.$$

Le résultat de cette question permet d'observer que certaines permutations de limites et d'intégrales ne sont pas licites et justifie les étapes et le travail de la Question 19.

Partie 2 : Étude de S_n

3. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, S_n admet une espérance et une variance et en préciser les valeurs.
4. L'objectif de cette question est de déterminer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la loi suivie par S_n .
 - a. Soit $i \in \mathbb{N}^*$. On pose $X_i = \lambda Y_i$. Reconnaitre la loi de X_i .
 - b. Montrer, par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, λS_n suit la loi gamma $\gamma(n)$.
 - c. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, S_n est une variable aléatoire à densité dont une densité f_{S_n} est donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_{S_n}(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t \leq 0 \\ \frac{\lambda}{(n-1)!} e^{-\lambda t} (\lambda t)^{n-1}, & \text{si } t > 0 \end{cases}.$$

5. a. Déterminer pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}^*$ la variable aléatoire $\frac{1}{S_n}$ admet une espérance que l'on explicitera dans ce cas.
- b. Déterminer pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}^*$ la variable aléatoire $\frac{1}{S_n}$ admet une variance que l'on explicitera dans ce cas.

On introduit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire $W_n = \frac{\lambda}{\sqrt{n}} S_n - \sqrt{n}$.

6. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, W_n est une variable aléatoire à densité dont une densité f_{W_n} est donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_{W_n}(t) = \frac{\sqrt{n}}{\lambda} f_{S_n} \left(\frac{\sqrt{n}}{\lambda} t + \frac{n}{\lambda} \right).$$

7. a. Montrer que la suite de variables aléatoires $(W_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire Z de loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

b. Exprimer, sous forme d'une intégrale, la limite : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_{W_n}(t) dt$.

Partie 3 : Estimation de λ par maximum de vraisemblance

On suppose que le paramètre λ est inconnu et on souhaite l'estimer à partir d'un n -échantillon $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$, où $n \in \mathbb{N}^*$. On note f_λ une densité de Y_1 .

On utilise la méthode dite du maximum de vraisemblance.

8. On considère la fonction L , à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^{n+1}$ par

$$L : (\lambda, x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto \prod_{k=1}^n f_\lambda(x_k).$$

On pose ensuite $\psi = \ln \circ L$.

Exprimer $L(\lambda, x_1, x_2, \dots, x_n)$, puis $\psi(\lambda, x_1, x_2, \dots, x_n)$ en fonction de $\lambda, x_1, \dots, x_n$.

9. Après avoir justifié le caractère $\mathcal{C}^1$ de ψ sur $(\mathbb{R}_+^*)^{n+1}$, montrer que ψ n'y admet aucun point critique.

10. On suppose les x_i fixés (strictement positifs) et on considère alors la fonction $\varphi : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi(\lambda) = \ln(L(\lambda, x_1, x_2, \dots, x_n)).$$

Montrer que la fonction φ admet un maximum, atteint en un seul réel que l'on notera $\hat{z}$. Exprimer $\hat{z}$ en fonction de $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Vérifier que, pour tout $\lambda > 0$, $L(\lambda, x_1, \dots, x_n) \leq L(\hat{z}, x_1, \dots, x_n)$.

On pose dorénavant, pour $n \geq 3$, $Z_n = \frac{n}{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n}$.

L'estimateur Z_n est appelé estimateur du maximum de vraisemblance pour λ .

11. Montrer que :

$$\forall n \geq 3, \quad E(Z_n) = \frac{n}{n-1}\lambda \text{ et } V(Z_n) = \frac{n^2}{(n-1)^2(n-2)}\lambda^2,$$

et déduire que Z_n est biaisé mais asymptotiquement sans biais pour λ .

12. En déduire, pour tout entier $n \geq 3$, un estimateur $\tilde{Z}_n$ non biaisé pour λ . Est-il convergent ?

13. Soit $\alpha \in]0, 1[$. On note $t_\alpha = \Phi^{-1}(1 - \alpha/2)$ où Φ désigne la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$. À l'aide de la Question 7.a., montrer que

$$\left[Z_n \left(1 - \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}} \right) ; Z_n \left(1 + \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}} \right) \right]$$

est un intervalle de confiance asymptotique au seuil $1 - \alpha$ pour λ .

14. Informatique. En Python, la commande `ndtri(y)` de la bibliothèque `scipy.special` renvoie la valeur de $\Phi^{-1}(y)$. Recopier et compléter la fonction suivante qui prend en argument un réel α et un n -échantillon Y d'une loi exponentielle de paramètre λ et renvoie l'intervalle de confiance au seuil $1 - \alpha$ pour λ .

Python

```
def IdC(alpha, Y):
    n=len(Y)
    Z=.....
    t=sc.ndtri(1-alpha/2)
    A=.....
    B=.....
    return [A, B]
```

L'intervalle de confiance précédent permet de définir un test d'hypothèse au seuil $1 - \alpha$.

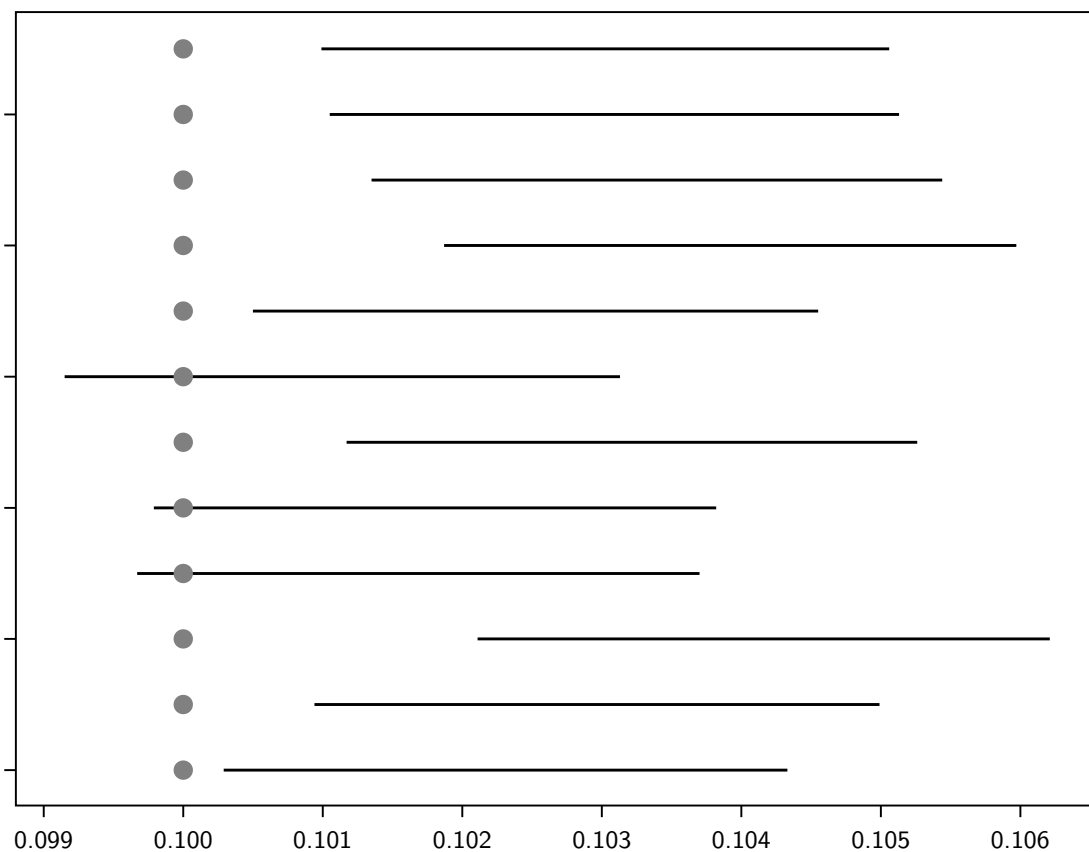
Disposant de l'observation d'un n -échantillon d'une loi exponentielle de paramètre λ inconnu, on rejettera l'hypothèse $\lambda = \lambda_0$ au risque α si λ_0 n'est pas dans l'intervalle de confiance précédent.

- 15.** Application. Dans une usine de fabrication de composants électroniques, la durée de vie de chaque unité produite suit une loi exponentielle de paramètre $1/10$. Afin de contrôler la qualité des composants produits, on procède régulièrement à des tests. Lors de l'année 2023, on a, chaque mois, testé un lot de 100 composants. Les tests ont permis d'obtenir rapidement les durées de vie des composants et on a stocké ces informations dans une matrice T de taille 12×100 .

On exécute alors les commandes suivantes qui permettent l'affichage ci-après.
Interpréter.

Python

```
for i in range(12):
    Y=T[i]
    A, B = IdC(alpha, Y)
    plt.plot([A ,B] ,[i,i])
    plt.plot([1/10] ,[i], 'o')
plt.show()
```



Valeurs lues sur la figure (bornes des segments, arrondies à 10^{-5} près; la ligne i correspond au segment situé à la hauteur i , de $i = 0$ en bas à $i = 11$ en haut) :

i	borne gauche	borne droite
0	0,10029	0,10433
1	0,10094	0,10499
2	0,10211	0,10621
3	0,09967	0,10370
4	0,09979	0,10382
5	0,10117	0,10526
6	0,09915	0,10313
7	0,10050	0,10455

i	borne gauche	borne droite
8	0,10187	0,10597
9	0,10135	0,10544
10	0,10105	0,10513
11	0,10099	0,10506

Les points gris sont tous situés à l'abscisse 0,1.

Partie 4 : Une convergence sous le signe intégral

On reprend les notations de la Partie 2. On introduit alors les suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}}{n!} \text{ et } v_n = \ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right).$$

16. a. À l'aide de la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 en 0, montrer que :

$$v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}.$$

b. En déduire la convergence de la série

$$\sum_{n \geq 1} v_n$$

puis celle de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ vers une limite $\ell > 0$.

17. À l'aide de la Question 6., vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une densité de W_n est

donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_{W_n}(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t \leq -\sqrt{n} \\ \frac{u_n}{\sqrt{2\pi}} \left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}}\right)^{n-1} e^{-\sqrt{n}t}, & \text{si } t > -\sqrt{n} \end{cases}.$$

18. On introduit la fonction R définie sur $] -1; +\infty[$ par :

$$\forall u > -1, \quad R(u) = \ln(1+u) - u + \frac{u^2}{2}.$$

a. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\forall t > -\sqrt{n}, \quad f_{W_n}(t) = u_n \left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}}\right)^{-1} e^{nR\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}.$$

b. Justifier qu'il existe un réel $M_1 \geq 0$ tel que, pour tout $u \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right] : |R(u)| \leq M_1|u|^3$.

c. En déduire que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_{W_n}(t) = \ell f_Z(t),$$

où f_Z désigne la densité de la variable aléatoire Z de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

19. Le but de cette question est d'obtenir que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_{W_n}(t) dt = \ell \int_0^1 f_Z(t) dt$.

a. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [0, 1]$,

$$g_n(t) = \left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}}\right)^{-1} e^{nR\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)}.$$

i. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, g_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ et que, pour tout $t \in [0, 1]$,

$$|g'_n(t)| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \sqrt{n} \left| R' \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right| \right) e^{nR\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)}.$$

ii. Montrer qu'il existe un réel $M_2 \geq 0$ tel que, pour tout $u \in [0, 1]$: $|R'(u)| \leq M_2 u^2$.

iii. Dédurre des deux questions précédentes qu'il existe une constante $C_1 \geq 0$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0, 1], \quad |g_n(t) - 1| \leq \frac{C_1}{\sqrt{n}}.$$

iv. Justifier qu'il existe une constante $C_2 \geq 0$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0, 1], \quad |g_n(t)| \leq C_2.$$

b. En vérifiant que

$$f_{W_n}(t) - \ell f_Z(t) = ((u_n - \ell)g_n(t) + \ell(g_n(t) - 1)) f_Z(t),$$

montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left| \int_0^1 f_{W_n}(t) dt - \int_0^1 \ell f_Z(t) dt \right| \leq \left(C_2 |u_n - \ell| + \frac{\ell C_1}{\sqrt{n}} \right) \int_0^1 f_Z(t) dt.$$

c. Conclure.

20. Déterminer alors, à l'aide de la question précédente et de la Question 7.b, la valeur de ℓ . En déduire un équivalent de $n!$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.