



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques

2022

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

PROBLÈME 1

Notations et rappels

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique, noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$, défini par :

$$\text{pour tous } x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ et } y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \text{ de } \mathbb{R}^n, \quad \langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k.$$

On confond les ensembles $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$. Ainsi, pour tous $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \text{ de } \mathbb{R}^n, \text{ on a, en notant } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} :$$

$$\langle x, y \rangle = {}^t X Y.$$

Pour tous réels $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, on note $\text{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont égaux à $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

Enfin, on rappelle qu'une matrice P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale lorsque P est inversible et que $P^{-1} = {}^t P$.

PARTIE A : Mise en place d'un exemple

On considère les matrices A et B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = {}^t A A.$$

- 1.a. La matrice A est-elle inversible ? Déterminer le rang de A .
- 1.b. Calculer les matrices A^2 et A^3 et vérifier : $A^3 - A^2 + A = 0$.
- 1.c. En déduire les valeurs propres réelles de A . La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?
- 2.a. Justifier que la matrice B est diagonalisable.
- 2.b. On pose :

$$R = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ 2 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

- 2.b.i. Vérifier que la matrice R est orthogonale.
- 2.b.ii. Montrer que la matrice ${}^t R B R$ est diagonale.

Dans toute la suite du problème, M désigne une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on pose $r = \text{rg}(M)$.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice M .

PARTIE B : Valeurs singulières d'une matrice

On note g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice ${}^tM$ et $h = g \circ f$.

3. Montrer : $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \langle x, g(y) \rangle = \langle f(x), y \rangle$ et $\forall x \in \mathbb{R}^n, \langle x, h(x) \rangle = \|f(x)\|^2$.

4.a. Soit x appartenant à $\text{Ker}(h)$. En calculant $\langle x, h(x) \rangle$, montrer que x appartient à $\text{Ker}(f)$.

4.b. En déduire : $\text{Ker}(h) = \text{Ker}(f)$ puis $\text{rg}(h) = r$.

5.a. Justifier que l'endomorphisme h est diagonalisable et qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}_1 = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de h .

5.b. Montrer que les valeurs propres de h sont positives ou nulles.

On note P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}_1$.

6. Justifier que la matrice P est orthogonale et montrer qu'il existe des réels $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ positifs ou nuls tels que :

$${}^tM M = P D {}^tP \quad \text{avec} \quad D = \text{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$$

Les réels $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ étant positifs ou nuls, on pose, pour tout i de $\llbracket 1; n \rrbracket$, $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$.

Les réels $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ sont appelés les valeurs singulières de la matrice M .

7. Dans cette question uniquement, on suppose que la matrice M est symétrique.

Déterminer, dans ce cas, les valeurs singulières de M en fonction de ses valeurs propres.

8. Justifier que la matrice D admet exactement r coefficients diagonaux non nuls.

Dans toute la suite, on suppose que les réels $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont non nuls et donc que les réels $\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n$ sont nuls.

9.a. Pour tout i de $\llbracket 1; r \rrbracket$, justifier que $f(\varepsilon_i)$ est non nul et calculer $\|f(\varepsilon_i)\|$.

9.b. On pose, pour tout i de $\llbracket 1; r \rrbracket$, $u_i = \frac{1}{\|f(\varepsilon_i)\|} f(\varepsilon_i)$.

Montrer que la famille $(u_1, \dots, u_r)$ est une famille orthonormée.

9.c. En déduire qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}_2$ de $\mathbb{R}^n$ telle que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}_1$ (au départ) et la base $\mathcal{B}_2$ (à l'arrivée) est :

$$\text{Diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = \text{Diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r, 0, \dots, 0).$$

On note Q la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}_2$ et Δ la matrice $\text{Diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r, 0, \dots, 0)$.

10. Justifier que la matrice Q est orthogonale et, en calculant de deux façons différentes la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ (au départ) et la base $\mathcal{B}_2$ (à l'arrivée), montrer :
 $M = Q \Delta {}^t P$.

11. Retour sur l'exemple :

Déterminer deux matrices orthogonales P_1 et Q_1 de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale Δ_1 de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que : $A = Q_1 \Delta_1 {}^t P_1$.

PARTIE C : Pseudo-inverse d'une matrice et application

On reprend les notations de la partie B.

Il existe donc deux matrices orthogonales P et Q de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et des réels strictement positifs $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ tels que :

$$M = Q \Delta {}^t P \quad \text{avec} \quad \Delta = \text{Diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r, 0, \dots, 0).$$

On définit la matrice M^+ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$M^+ = P \operatorname{Diag}\left(\frac{1}{\sigma_1}, \dots, \frac{1}{\sigma_r}, 0, \dots, 0\right)^t Q.$$

La matrice M^+ est appelée la matrice pseudo-inverse de M .

On note f^+ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice M^+ et $p = f \circ f^+$.

12. Justifier que, si M est inversible, alors $M^{-1} = M^+$.

13.a. Simplifier le produit $M M^+$.

13.b. Montrer que p est un projecteur orthogonal.

13.c. Montrer : $\operatorname{rg}(M M^+) = r$ puis en déduire : $\operatorname{Im}(p) = \operatorname{Im}(f)$.

14. Application : Soit $y \in \mathbb{R}^n \setminus \operatorname{Im}(f)$.

Il n'existe donc pas de vecteur x de $\mathbb{R}^n$ tel que $f(x) = y$.

On cherche alors à déterminer un vecteur x^* de $\mathbb{R}^n$ tel que :

$$\|y - f(x^*)\| = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|y - f(x)\|.$$

14.a. Justifier : $\forall x \in \mathbb{R}^n, \|y - p(y)\| \leq \|y - f(x)\|$.

14.b. Proposer un vecteur de $\mathbb{R}^n$ répondant au problème posé.

Montrer que, lorsque $r < n$, il existe au moins deux vecteurs distincts de $\mathbb{R}^n$ répondant au problème posé.

15. Retour sur l'exemple : On note f_1 l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est la matrice A et on considère $y = (1, 1, 1)$.

15.a. Déterminer $\operatorname{Im}(f_1)$ et vérifier que y n'appartient pas à $\operatorname{Im}(f_1)$.

15.b. Montrer :

$$\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \|y - f_1(x)\|^2 = (x_2 + x_3 - 1)^2 + (x_1 - x_3 + 1)^2 + 1.$$

15.c. En déduire deux vecteurs distincts x^* et z^* de $\mathbb{R}^3$ tels que :

$$\|y - f_1(x^*)\| = \|y - f_1(z^*)\| = \min_{x \in \mathbb{R}^3} \|y - f_1(x)\|.$$

PROBLÈME 2

Ce problème est constitué de trois parties. Les parties B et C sont indépendantes l'une de l'autre mais utilisent certains résultats de la partie A.

On rappelle que, pour tout (k, n) de $\mathbb{N}^2$ tel que $k \leq n$: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n-k)!}$, et on convient que $\binom{n}{k} = 0$ lorsque $k > n$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note c_n le réel, appelé le nombre de Catalan d'ordre n , défini par :

$$c_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

Dans les questions de programmation, on suppose les bibliothèques importées par `import numpy as np` et `import numpy.random as rd`. On rappelle que `rd.random()` renvoie un réel choisi au hasard selon la loi uniforme sur $[0; 1[$.

PARTIE A : Quelques propriétés sur les nombres de Catalan

1. Calculer les réels c_0 , c_1 et c_2 .

2.a. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$.

2.b. En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, c_n est un entier naturel non nul.

3. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, c_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} c_n$.

4. Écrire une fonction Python d'en-tête `def catalan(n)` : qui, prenant en entrée un entier n de $\mathbb{N}$, renvoie la valeur de c_n .

5.a. Montrer que la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

5.b. À l'aide d'un raisonnement par l'absurde, montrer que la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

6.a. Montrer : $\forall k \in \mathbb{N}^*, 4 \left(\frac{k}{k+1} \right)^{3/2} \leq \frac{c_{k+1}}{c_k} \leq 4 \left(\frac{k+1}{k+2} \right)^{3/2}$.

6.b. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{4} \frac{4^n}{n\sqrt{n}} \leq c_n \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{4^n}{n\sqrt{n}}$.

7. On note, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$S_n = \sum_{k=0}^n c_k c_{n-k}$$

et

$$T_n = \sum_{k=0}^n k c_k c_{n-k}.$$

7.a. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, T_n = \frac{n}{2} S_n$ (on pourra effectuer le changement d'indice $i = n - k$ dans la somme définissant T_n).

7.b. Montrer à l'aide de l'égalité de la question 3 :

$$\forall n \in \mathbb{N}, T_{n+1} + S_{n+1} = c_{n+1} + 4T_n + 2S_n.$$

7.c. En déduire, à l'aide d'un raisonnement par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = c_{n+1}$.

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_{n+1} = \sum_{k=0}^n c_k c_{n-k}.$$

8.a. Montrer que, pour tout x de $\left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right]$, la série

$$\sum_{n \geq 0} c_n x^n$$

converge.

On pose, pour tout x de $\left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right]$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$$

et $g(x) = 2x f(x)$.

On admet que la fonction f est continue sur $\left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right]$.

8.b. Soit x appartenant à $\left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right]$.

En remarquant que, pour tout N de $\mathbb{N}$,

$$\left(\sum_{i=0}^N c_i x^i\right) \left(\sum_{j=0}^N c_j x^j\right) = \sum_{n=0}^{2N} \left(\sum_{k=\max(0, n-N)}^{\min(n, N)} c_k c_{n-k}\right) x^n,$$

montrer :

$$(f(x))^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^{n-1}.$$

8.c. En déduire : $\forall x \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right], (g(x))^2 = 2g(x) - 4x.$

8.d. Montrer qu'il existe une fonction ε définie sur $\left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right]$ et à valeurs dans $\{-1; 1\}$ telle que :

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right], g(x) = 1 + \varepsilon(x)\sqrt{1 - 4x}.$$

Montrer ensuite que la fonction ε est continue sur $\left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right]$.

8.e. En déduire : $\forall x \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right], g(x) = 1 - \sqrt{1 - 4x}.$

PARTIE B : Loi du demi-cercle

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2} & \text{si } x \in [-2; 2], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

9.a. Montrer : $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos(t))^2 dt = \frac{\pi}{2}.$

9.b. En déduire, à l'aide du changement de variable $x = 2 \sin(t)$, la valeur de

$$\int_{-2}^2 \varphi(x) dx.$$

10. Montrer que φ est une densité d'une variable aléatoire réelle.

On considère une variable aléatoire réelle X de densité φ , définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

11.a. Justifier que, pour tout n de $\mathbb{N}$, X admet un moment d'ordre n et que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad E(X^{2n+1}) = 0 \quad \text{et} \quad E(X^{2n}) = \frac{1}{\pi} \int_0^2 x^{2n} \sqrt{4-x^2} \, dx.$$

11.b. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n = E(X^{2n})$.

11.b.i. Calculer u_0 .

11.b.ii. À l'aide d'une intégration par parties, montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{2n+1}{3} (4u_n - u_{n+1}).$$

11.b.iii. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = c_n$.

PARTIE C : Étude d'une expérience aléatoire

Soit p un réel appartenant à $]0; 1[$.

On considère une pièce qui amène Pile avec la probabilité p et Face avec la probabilité $1 - p$ avec laquelle on effectue une succession de lancers indépendants.

On modélise cette expérience par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On définit la variable aléatoire T égale au nombre de lancers effectués lorsque, pour la première fois, on obtient le même nombre de Pile que de Face, et égale à 0 si un tel événement ne se réalise pas.

Par exemple, si on obtient successivement P-P-F-P-F-F-P-F... (où P désigne Pile et F désigne Face), alors la variable aléatoire T est égale à 6.

12.a. Écrire une fonction Python d'en-tête `def simule(p)` : qui prend en argument le réel p , qui simule au plus 10^4 lancers de la pièce et qui renvoie la valeur de T en convenant que si, sur les 10^4 lancers, le nombre de Pile obtenus n'a jamais été égal au nombre de Face, alors T prend la valeur 0.

12.b. On exécute le script Python suivant :

Python

```
for i in range(1, 4):
    L = np.zeros(3)
    for j in range(3):
        m = 0
        for k in range(1000):
            m = m + simule(i/4)
        L[j] = m / 1000
    print(L)
```

et on obtient les résultats suivants :

Ligne affichée	Valeur 1	Valeur 2	Valeur 3
1	1.392	1.478	1.41
2	100.572	71.172	125.28
3	1.454	1.544	1.414

Qu'affiche le script ? Comment peut-on interpréter ces différents résultats ?

13. Justifier : $\forall n \in \mathbb{N}, P(T = 2n + 1) = 0$.

14. On note, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, D_n l'ensemble des résultats possibles de $(2n)$ lancers de la pièce pour lesquels :

- à l'issue du $(2n)$ -ième lancer, le nombre de Pile est égal au nombre de Face ;
- le nombre de Pile est toujours strictement supérieur au nombre de Face tout au long des $(2n - 1)$ premiers lancers ;

et on pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $d_n = \text{Card}(D_n)$.

On note, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, E_n l'ensemble des résultats possibles de $(2n)$ lancers de la pièce pour lesquels :

- à l'issue du $(2n)$ -ième lancer, le nombre de Pile est égal au nombre de Face;
- le nombre de Pile est toujours supérieur ou égal au nombre de Face tout au long des $(2n - 1)$ premiers lancers;

et on pose $e_0 = 1$ et, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $e_n = \text{Card}(E_n)$.

Par exemple, $D_3 = \{\text{P-P-P-F-F-F}, \text{P-P-F-P-F-F}\}$ et

$$E_3 = \{\text{P-F-P-F-P-F}, \text{P-F-P-P-F-F}, \text{P-P-F-F-P-F}, \text{P-P-F-P-F-F}, \text{P-P-P-F-F-F}\};$$

ainsi $d_3 = 2$ et $e_3 = 5$.

14.a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En remarquant que tout résultat de D_n commence nécessairement par un Pile et se termine par un Face, justifier : $d_n = e_{n-1}$.

14.b.i. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, e_n = \sum_{k=1}^n d_k e_{n-k}.$$

14.b.ii. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, e_{n+1} = \sum_{k=0}^n e_k e_{n-k}.$$

14.b.iii. Montrer alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $e_n = c_n$ où c_n est le nombre de Catalan d'ordre n .

14.c. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(T = 2n) = 2 c_{n-1} p^n (1-p)^n$.

15.a. Montrer que, pour tout x de $[-1; 1]$, la série

$$\sum_{n \geq 0} P(T = n) x^n$$

converge.

On pose, pour tout x de $[-1; 1]$:

$$G_T(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(T = n) x^n.$$

15.b. Montrer : $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$ et $\left(p(1-p) = \frac{1}{4} \iff p = \frac{1}{2}\right)$.

15.c. Montrer : $\forall x \in [-1; 1], G_T(x) = P(T = 0) + g(p(1-p)x^2)$, où g est la fonction définie dans la question A.8.

15.d. En utilisant la valeur de $G_T(1)$, montrer : $P(T = 0) = |2p - 1|$.

Interpréter ce résultat lorsque $p = \frac{1}{2}$.

16. En utilisant le résultat de la question A.6.b, montrer :

16.a. si $p \neq \frac{1}{2}$, alors la variable aléatoire T admet une espérance.

16.b. si $p = \frac{1}{2}$, alors la variable aléatoire T n'admet pas d'espérance.