



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques

2022

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

CORRIGÉ

PROBLÈME 1

PARTIE A : Mise en place d'un exemple

1.a. On étudie les colonnes de A : $C_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $C_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

La deuxième ligne de A est nulle, donc toute combinaison linéaire des colonnes a une deuxième coordonnée nulle : $\text{Im}(A)$ est contenu dans le plan $\{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) ; x_2 = 0\}$, de dimension 2. Donc $\text{rg}(A) \leq 2 < 3$ et A n'est pas inversible.

De plus $C_3 = C_2 - C_1$, et (C_1, C_2) est libre (deux colonnes non colinéaires). Donc $\text{rg}(A) = \text{rg}(C_1, C_2, C_3) = \text{rg}(C_1, C_2) = 2$.

Conclusion

A n'est pas inversible et $\text{rg}(A) = 2$.

1.b. Par produit matriciel (ligne par colonne) :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par exemple, le coefficient $(1, 1)$ vaut $0 \times 0 + 1 \times 0 + 1 \times (-1) = -1$ et le coefficient $(3, 3)$ vaut $(-1) \times 1 + 0 \times 0 + 1 \times 1 = 0$.

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit :

$$A^3 - A^2 + A = \begin{pmatrix} -1 + 1 + 0 & -1 - 0 + 1 & 0 - 1 + 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 + 1 - 1 & -1 + 1 + 0 & -1 - 0 + 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Conclusion

$$A^3 - A^2 + A = 0.$$

1.c. Le polynôme $X^3 - X^2 + X = X(X^2 - X + 1)$ est annulateur de A . Les valeurs propres de A sont des racines de tout polynôme annulateur.

Si $\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre de A , alors $\lambda(\lambda^2 - \lambda + 1) = 0$. Le trinôme $\lambda^2 - \lambda + 1$ a pour discriminant $1 - 4 = -3 < 0$, il n'a donc aucune racine réelle (il est même strictement positif sur $\mathbb{R}$). Donc $\lambda = 0$.

Réciproquement, A n'est pas inversible (question 1.a), donc $\text{Ker}(A) \neq \{0\}$ et 0 est valeur propre de A .

Conclusion

la seule valeur propre réelle de A est 0 : $\text{Sp}(A) = \{0\}$.

Diagonalisabilité.

Méthode 1 — Par l'absurde avec une matrice diagonale. Si A était diagonalisable, il existerait P_0 inversible telle que $A = P_0 \text{Diag}(0, 0, 0) P_0^{-1} = 0$, puisque la seule valeur propre est 0. Or $A \neq 0$: contradiction.

Méthode 2 — Par la dimension de l'espace propre. Par le théorème du rang, $\dim \text{Ker}(A) = 3 - \text{rg}(A) = 1$. La somme des dimensions des sous-espaces propres vaut donc $1 \neq 3$: A n'est pas diagonalisable.

La méthode 1 utilise directement la définition ; la méthode 2 applique le critère par les dimensions des espaces propres, plus systématique en général.

Conclusion

A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2.a. On a ${}^t B = {}^t ({}^t A A) = {}^t A {}^t ({}^t A) = {}^t A A = B$: B est une matrice symétrique réelle.

D'après le théorème spectral (admis au programme), toute matrice symétrique réelle est diagonalisable, avec une matrice de passage orthogonale.

Conclusion

B est diagonalisable.

Pour la suite, calculons $B : {}^t A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et

$$B = {}^t A A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2.b.i. Notons R_1, R_2, R_3 les colonnes de R :

$$R_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad R_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le coefficient (i, j) de ${}^t R R$ est ${}^t R_i R_j = \langle R_i, R_j \rangle$. Or :

$$\|R_1\|^2 = \frac{1+1+4}{6} = 1, \quad \|R_2\|^2 = \frac{1+1}{2} = 1, \quad \|R_3\|^2 = \frac{1+1+1}{3} = 1,$$

$$\langle R_1, R_2 \rangle = \frac{-1+1+0}{\sqrt{12}} = 0, \quad \langle R_1, R_3 \rangle = \frac{-1-1+2}{\sqrt{18}} = 0, \quad \langle R_2, R_3 \rangle = \frac{1-1+0}{\sqrt{6}} = 0.$$

Donc ${}^t R R = I_3$. Ainsi R est inversible d'inverse ${}^t R$.

Conclusion

R est orthogonale.

2.b.ii. Méthode 1 — Calcul direct.

$$BR = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ 2 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -3 & \sqrt{3} & 0 \\ 3 & \sqrt{3} & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

puis

$${}^tRBR = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & \sqrt{3} & 0 \\ 3 & \sqrt{3} & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{Diag}(3, 1, 0).$$

Méthode 2 — Par les vecteurs propres. On vérifie que chaque colonne de R est vecteur propre de B :

$$B \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad B \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donc $BR = R \text{Diag}(3, 1, 0)$, et comme ${}^tR = R^{-1}$ (question 2.b.i),
 ${}^tRBR = R^{-1}BR = \text{Diag}(3, 1, 0)$.

La méthode 2 évite un double produit matriciel et donne directement les valeurs propres de B ; la méthode 1 est un calcul mécanique sans idée.

Conclusion

${}^t R B R = \text{Diag}(3, 1, 0)$ est diagonale.

PARTIE B : Valeurs singulières d'une matrice

3. Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$, de colonnes de coordonnées X, Y dans $\mathcal{B}$. La colonne de $f(x)$ est MX et celle de $g(y)$ est ${}^t M Y$. Donc :

$$\langle x, g(y) \rangle = {}^t X ({}^t M Y) = ({}^t X {}^t M) Y = {}^t (MX) Y = \langle f(x), y \rangle.$$

Avec $y = f(x)$: $\langle x, h(x) \rangle = \langle x, g(f(x)) \rangle = \langle f(x), f(x) \rangle = \|f(x)\|^2.$

Conclusion

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \langle x, g(y) \rangle = \langle f(x), y \rangle$ et $\forall x \in \mathbb{R}^n, \langle x, h(x) \rangle = \|f(x)\|^2.$

- 4.a. Si $h(x) = 0$, alors $\|f(x)\|^2 = \langle x, h(x) \rangle = \langle x, 0 \rangle = 0$ d'après la question 3, donc $f(x) = 0$.

Conclusion

$x \in \text{Ker}(f).$

- 4.b. La question 4.a donne $\text{Ker}(h) \subset \text{Ker}(f)$. Réciproquement, si $f(x) = 0$, alors $h(x) = g(f(x)) = g(0) = 0$ par linéarité de g . Donc $\text{Ker}(h) = \text{Ker}(f)$.

Par le théorème du rang appliqué à h et à f (endomorphismes de $\mathbb{R}^n$) :

$$\text{rg}(h) = n - \dim \text{Ker}(h) = n - \dim \text{Ker}(f) = \text{rg}(f) = \text{rg}(M) = r.$$

Conclusion

$$\text{Ker}(h) = \text{Ker}(f) \text{ et } \text{rg}(h) = r.$$

5.a. La matrice de $h = g \circ f$ dans $\mathcal{B}$ est ${}^t M M$, et ${}^t({}^t M M) = {}^t M M$: elle est symétrique. Comme $\mathcal{B}$ est orthonormée pour le produit scalaire canonique, h est un endomorphisme symétrique.

D'après le théorème spectral (admis), il existe une matrice orthogonale P_0 et une matrice diagonale D_0 telles que ${}^t M M = P_0 D_0 {}^t P_0$. La relation ${}^t P_0 P_0 = I_n$ signifie que les colonnes de P_0 sont de norme 1 et deux à deux orthogonales ; elles forment donc une base orthonormée $\mathcal{B}_1 = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de $\mathbb{R}^n$. La relation ${}^t M M P_0 = P_0 D_0$ signifie que chaque ε_i est vecteur propre de h (pour le i -ième coefficient diagonal de D_0).

Conclusion

h est diagonalisable et il existe une base orthonormée $\mathcal{B}_1$ de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de h .

5.b. Soit λ une valeur propre de h et $x \neq 0$ tel que $h(x) = \lambda x$. Par la question 3 :

$$\lambda \|x\|^2 = \langle x, \lambda x \rangle = \langle x, h(x) \rangle = \|f(x)\|^2 \geq 0.$$

Comme $\|x\|^2 > 0$, on obtient $\lambda \geq 0$.

Conclusion

les valeurs propres de h sont positives ou nulles.

6. P est la matrice de passage entre deux bases orthonormées ($\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_1$) : elle est orthogonale (résultat du cours ; ici on peut aussi le voir directement : les colonnes de P sont les coordonnées des ε_i dans $\mathcal{B}$, donc ${}^t P P = (\langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle)_{i,j} = I_n$).

Pour tout i , notons λ_i la valeur propre associée à ε_i : $h(\varepsilon_i) = \lambda_i \varepsilon_i$, avec $\lambda_i \geq 0$ par la question 5.b. La matrice de h dans $\mathcal{B}_1$ est donc $D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

La formule de changement de base donne $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(h) = P \text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(h) P^{-1}$, soit, puisque $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(h) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = {}^t M M$ et $P^{-1} = {}^t P$:

$${}^t M M = P D {}^t P.$$

Conclusion

P est orthogonale et ${}^t M M = P D {}^t P$ avec $D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\lambda_i \geq 0$.

7. On suppose M symétrique. Alors ${}^t M M = M^2$.

Par le théorème spectral, il existe une matrice orthogonale P' et des réels $\mu_1, \dots, \mu_n$ (les valeurs propres de M , chacune répétée autant de fois que la dimension de son espace propre) tels que $M = P' \text{Diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) {}^t P'$. Alors, puisque ${}^t P' P' = I_n$:

$${}^t M M = M^2 = P' \text{Diag}(\mu_1^2, \dots, \mu_n^2) {}^t P'.$$

Ainsi D et $\text{Diag}(\mu_1^2, \dots, \mu_n^2)$ sont toutes deux semblables à ${}^t M M$, donc semblables entre elles. Pour tout réel λ , les matrices $D - \lambda I_n$ et $\text{Diag}(\mu_1^2, \dots, \mu_n^2) - \lambda I_n$ sont alors semblables, donc de même rang, donc de noyaux de même dimension. Pour une matrice diagonale, la dimension de $\text{Ker}(\text{Diag}(a_1, \dots, a_n) - \lambda I_n)$ est le nombre d'indices i tels que $a_i = \lambda$. Donc chaque réel λ apparaît autant de fois dans la liste $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ que dans la liste $(\mu_1^2, \dots, \mu_n^2)$: ces deux listes sont égales à l'ordre près.

Par suite, à l'ordre près, $\sigma_i = \sqrt{\mu_i^2} = |\mu_i|$.

Conclusion

si M est symétrique, ses valeurs singulières sont les valeurs absolues $|\mu_1|, \dots, |\mu_n|$ de ses valeurs propres (comptées avec la dimension de leurs espaces propres).

8. La matrice $D = {}^t P ({}^t M M) P$ est obtenue en multipliant ${}^t M M$ par des matrices inversibles, donc $\text{rg}(D) = \text{rg}({}^t M M) = \text{rg}(h) = r$ (question 4.b).

Or le rang d'une matrice diagonale est le nombre de ses coefficients diagonaux non nuls : ses colonnes non nulles sont des multiples non nuls de vecteurs distincts de la base canonique, donc forment une famille libre, et les colonnes nulles ne contribuent pas au rang.

Conclusion

D admet exactement r coefficients diagonaux non nuls.

9.a. Soit $i \in \llbracket 1; r \rrbracket$. Par la question 3, puis $h(\varepsilon_i) = \lambda_i \varepsilon_i$ et $\|\varepsilon_i\| = 1$:

$$\|f(\varepsilon_i)\|^2 = \langle \varepsilon_i, h(\varepsilon_i) \rangle = \lambda_i \|\varepsilon_i\|^2 = \lambda_i > 0.$$

Conclusion

$f(\varepsilon_i) \neq 0$ et $\|f(\varepsilon_i)\| = \sqrt{\lambda_i} = \sigma_i$.

9.b. Les u_i sont bien définis par 9.a. Pour $i, j \in \llbracket 1; r \rrbracket$, par la question 3 :

$$\langle f(\varepsilon_i), f(\varepsilon_j) \rangle = \langle \varepsilon_i, g(f(\varepsilon_j)) \rangle = \langle \varepsilon_i, h(\varepsilon_j) \rangle = \lambda_j \langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle,$$

qui vaut 0 si $i \neq j$ (car $\mathcal{B}_1$ est orthonormée). Donc $\langle u_i, u_j \rangle = \frac{\langle f(\varepsilon_i), f(\varepsilon_j) \rangle}{\sigma_i \sigma_j} = 0$ pour $i \neq j$, et $\|u_i\| = 1$ par construction.

Conclusion

$(u_1, \dots, u_r)$ est une famille orthonormée.

9.c. Une famille orthonormée d'un espace euclidien se complète en une base orthonormée : il existe $u_{r+1}, \dots, u_n$ tels que $\mathcal{B}_2 = (u_1, \dots, u_n)$ soit une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ (si $r = 0$, on prend simplement pour $\mathcal{B}_2$ n'importe quelle base orthonormée, par exemple $\mathcal{B}$).

Pour $i \leq r$: $f(\varepsilon_i) = \|f(\varepsilon_i)\| u_i = \sigma_i u_i$.

Pour $i > r$: $\|f(\varepsilon_i)\|^2 = \lambda_i = 0$ (même calcul qu'en 9.a), donc $f(\varepsilon_i) = 0 = \sigma_i u_i$ puisque $\sigma_i = 0$.

La i -ième colonne de la matrice de f de $\mathcal{B}_1$ vers $\mathcal{B}_2$ contient les coordonnées de $f(\varepsilon_i) = \sigma_i u_i$ dans $\mathcal{B}_2$: c'est σ_i fois le i -ième vecteur colonne de la base canonique.

Conclusion

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f) = \text{Diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r, 0, \dots, 0).$$

10. Q est la matrice de passage de la base orthonormée $\mathcal{B}$ à la base orthonormée $\mathcal{B}_2$: elle est orthogonale (même argument qu'en 6).

Première façon : par 9.c, $\text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f) = \Delta$.

Deuxième façon : en écrivant $f = \text{Id} \circ f \circ \text{Id}$ avec les bases $\mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}_2$:

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}_2}(\text{Id}) \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}}(\text{Id}) = Q^{-1} M P = {}^t Q M P.$$

Donc $\Delta = {}^t Q M P$. En multipliant à gauche par Q et à droite par ${}^t P$, et en utilisant $Q {}^t Q = I_n$ et $P {}^t P = I_n$:

Conclusion

$$M = Q \Delta {}^t P.$$

11. On applique la construction de la partie B à $M = A$ ($n = 3, r = 2$ par 1.a).

Valeurs propres de ${}^t A A = B$ et base orthonormée de vecteurs propres : par 2.b, ${}^t R B R = \text{Diag}(3, 1, 0)$ avec R orthogonale, les valeurs propres non nulles étant placées en premier. On prend $P_1 = R, \varepsilon_1 = R_1, \varepsilon_2 = R_2, \varepsilon_3 = R_3, \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0$, d'où $\sigma_1 = \sqrt{3}, \sigma_2 = 1, \sigma_3 = 0$.

Vecteurs u_1, u_2 :

$$A\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}A \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \|A\varepsilon_1\| = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \sqrt{3}, \quad u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$A\varepsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \|A\varepsilon_2\| = 1, \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On complète par $u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, unitaire et orthogonal à u_1 et u_2 . On pose :

$$P_1 = R, \quad Q_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta_1 = \text{Diag}(\sqrt{3}, 1, 0).$$

P_1 est orthogonale (2.b.i) ; les colonnes de Q_1 forment une base orthonormée, donc Q_1 est orthogonale ; et la question 10 donne $A = Q_1 \Delta_1^t P_1$.

Vérification directe :

$$Q_1 \Delta_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

et, avec

$${}^tP_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix},$$

la première ligne du produit vaut

$$\frac{1}{\sqrt{6}} \left(\frac{\sqrt{6}}{2}(-1, 1, 2) + \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}, \sqrt{3}, 0) \right) = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}, 1 + 0 \right) = (0, 1, 1),$$

la deuxième est nulle et la troisième vaut $\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}, 1 \right) = (-1, 0, 1)$: on retrouve bien A .

Conclusion

$A = Q_1 \Delta_1 {}^tP_1$ avec P_1, Q_1, Δ_1 ci-dessus.

PARTIE C : Pseudo-inverse d'une matrice et application

Notons $\Delta^+ = \text{Diag}\left(\frac{1}{\sigma_1}, \dots, \frac{1}{\sigma_r}, 0, \dots, 0\right)$, de sorte que $M^+ = P \Delta^+ {}^tQ$.

- 12.** Si M est inversible, $r = n$, donc $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ sont tous strictement positifs, $\Delta = \text{Diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ est inversible d'inverse $\text{Diag}\left(\frac{1}{\sigma_1}, \dots, \frac{1}{\sigma_n}\right) = \Delta^+$.

Comme Q, Δ et ${}^tP$ sont inversibles, l'inverse d'un produit donne :

$$M^{-1} = ({}^tP)^{-1} \Delta^{-1} Q^{-1} = P \Delta^+ {}^tQ = M^+,$$

car $({}^tP)^{-1} = P$ et $Q^{-1} = {}^tQ$.

Conclusion

si M est inversible, $M^{-1} = M^+$.

13.a. Avec ${}^t P P = I_n$:

$$M M^+ = Q \Delta {}^t P P \Delta^+ {}^t Q = Q \Delta \Delta^+ {}^t Q = Q J_r {}^t Q,$$

où $J_r = \Delta \Delta^+ = \text{Diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ (r coefficients égaux à 1), car $\sigma_i \cdot \frac{1}{\sigma_i} = 1$ pour $i \leq r$ et $0 \cdot 0 = 0$ sinon.

Conclusion

$$M M^+ = Q J_r {}^t Q.$$

13.b. La matrice de $p = f \circ f^+$ dans $\mathcal{B}$ est $M M^+ = Q J_r {}^t Q$.

Méthode 1 — Caractérisation par la symétrie. On a

$(Q J_r {}^t Q)^2 = Q J_r ({}^t Q Q) J_r {}^t Q = Q J_r^2 {}^t Q = Q J_r {}^t Q$ car $J_r^2 = J_r$: donc $p \circ p = p$ et p est un projecteur. De plus ${}^t(Q J_r {}^t Q) = Q {}^t J_r {}^t Q = Q J_r {}^t Q$: la matrice de p dans la base orthonormée $\mathcal{B}$ est symétrique, donc p est un endomorphisme symétrique. Un projecteur est orthogonal si et seulement s'il est symétrique.

Méthode 2 — Lecture dans la base $\mathcal{B}_2$. Q est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}_2$, donc

$\text{Mat}_{\mathcal{B}_2}(p) = Q^{-1}(Q J_r {}^t Q)Q = J_r$. Ainsi $p(u_i) = u_i$ pour $i \leq r$ et $p(u_i) = 0$ pour $i > r$: p est la projection sur $F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_r)$ parallèlement à $G = \text{Vect}(u_{r+1}, \dots, u_n)$.

Comme $\mathcal{B}_2$ est orthonormée, G est orthogonal à F et $G = F^\perp$ (dimensions $n - r$) : p est la projection orthogonale sur F .

La méthode 1 est purement matricielle ; la méthode 2 identifie en plus l'image de p , ce qui prépare 13.c.

Conclusion

p est un projecteur orthogonal.

13.c. La multiplication à gauche ou à droite par une matrice inversible ne change pas le rang, donc $\text{rg}(MM^+) = \text{rg}(QJ_r^tQ) = \text{rg}(J_r) = r$ (J_r diagonale avec r coefficients non nuls, question 8).

Ainsi $\dim \text{Im}(p) = \text{rg}(p) = r$. Par ailleurs $\text{Im}(p) = \text{Im}(f \circ f^+) \subset \text{Im}(f)$ car tout $p(y) = f(f^+(y))$ est une image par f . Enfin $\dim \text{Im}(f) = r$. Un sous-espace inclus dans un autre de même dimension finie lui est égal.

Conclusion

$\text{rg}(MM^+) = r$ et $\text{Im}(p) = \text{Im}(f)$.

14.a. Soit $x \in \mathbb{R}^n$.

Méthode 1 — Pythagore. Comme p est le projecteur orthogonal sur $\text{Im}(p) = \text{Im}(f)$ (13.b, 13.c), $y - p(y) \in \text{Ker}(p) = \text{Im}(f)^\perp$. Par ailleurs $p(y) - f(x) \in \text{Im}(f)$. Ces deux vecteurs sont orthogonaux, et le théorème de Pythagore donne :

$$\|y - f(x)\|^2 = \|(y - p(y)) + (p(y) - f(x))\|^2 = \|y - p(y)\|^2 + \|p(y) - f(x)\|^2 \geq \|y - p(y)\|^2.$$

Méthode 2 — Caractérisation de la projection orthogonale par minimisation de la distance (cours). Pour un sous-espace F et sa projection orthogonale p_F , on a $\|y - p_F(y)\| = \min_{z \in F} \|y - z\|$. Avec $F = \text{Im}(f) = \text{Im}(p)$ et $z = f(x) \in F$, on obtient l'inégalité.

La méthode 1 redémontre en une ligne le résultat de cours invoqué par la méthode 2.

Conclusion

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \|y - p(y)\| \leq \|y - f(x)\|.$$

14.b. Posons $x^* = f^+(y)$. Alors $f(x^*) = f \circ f^+(y) = p(y)$, et par 14.a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \|y - f(x^*)\| = \|y - p(y)\| \leq \|y - f(x)\|.$$

Le minimum est donc atteint en $x^* : \|y - f(x^*)\| = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|y - f(x)\|$. Le vecteur $x^* = f^+(y)$, de colonne de coordonnées M^+Y , répond au problème.

Si $r < n$, le théorème du rang donne $\dim \text{Ker}(f) = n - r \geq 1$: il existe $z \in \text{Ker}(f)$, $z \neq 0$. Alors $x^* + z \neq x^*$ et $f(x^* + z) = f(x^*)$, donc $\|y - f(x^* + z)\| = \|y - f(x^*)\|$: $x^* + z$ répond aussi au problème.

Conclusion

$x^* = f^+(y)$ convient, et si $r < n$, x^* et $x^* + z$ ($z \in \text{Ker}(f) \setminus \{0\}$) sont deux solutions distinctes.

15.a. $\text{Im}(f_1)$ est engendrée par les colonnes de A , c'est-à-dire par $(0, 0, -1)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 0, 1)$. D'après 1.a, elle est de dimension 2 et engendrée par $(0, 0, -1)$ et $(1, 0, 0)$, soit par e_1 et e_3 :

$$\text{Im}(f_1) = \text{Vect}(e_1, e_3) = \{(a, 0, c) ; (a, c) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Le vecteur $y = (1, 1, 1)$ a une deuxième coordonnée non nulle.

Conclusion

$$\text{Im}(f_1) = \text{Vect}(e_1, e_3) \text{ et } y \notin \text{Im}(f_1).$$

15.b. Pour $x = (x_1, x_2, x_3)$,

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 + x_3 \\ 0 \\ -x_1 + x_3 \end{pmatrix},$$

donc $y - f_1(x) = (1 - x_2 - x_3, 1, 1 + x_1 - x_3)$ et

$$\begin{aligned} \|y - f_1(x)\|^2 &= (1 - x_2 - x_3)^2 + 1^2 + (1 + x_1 - x_3)^2 = (x_2 + x_3 - 1)^2 + (x_1 - x_3 + 1)^2 \\ &+ 1. \end{aligned}$$

Conclusion

l'égalité demandée est vérifiée pour tout $x \in \mathbb{R}^3$.

15.c. Par 15.b, $\|y - f_1(x)\|^2 \geq 1$ pour tout x , avec égalité si et seulement si $x_2 + x_3 = 1$ et $x_1 - x_3 = -1$. Ce système admet une infinité de solutions $(x_3 - 1, 1 - x_3, x_3)$, $x_3 \in \mathbb{R}$. Le minimum de $\|y - f_1(x)\|$ vaut donc 1 et il est atteint par exemple en :

$$x^* = (-1, 1, 0) \quad \text{et} \quad z^* = (0, 0, 1).$$

Remarque : ceci illustre 14.b ($r = 2 < 3$). La solution fournie par la pseudo-inverse est A^+Y avec

$$A^+ = P_1 \text{Diag}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1, 0\right)^t Q_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

soit $A^+Y = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, qui vérifie bien $x_2 + x_3 = 1$ et $x_1 - x_3 = -1$ (c'est le cas $x_3 = \frac{2}{3}$).

Conclusion

$x^* = (-1, 1, 0)$ et $z^* = (0, 0, 1)$ conviennent, avec $\min_{x \in \mathbb{R}^3} \|y - f_1(x)\| = 1$.

PROBLÈME 2

PARTIE A : Quelques propriétés sur les nombres de Catalan

1. $c_0 = \frac{1}{1} \binom{0}{0} = 1, \quad c_1 = \frac{1}{2} \binom{2}{1} = 1, \quad c_2 = \frac{1}{3} \binom{4}{2} = \frac{6}{3} = 2.$

Conclusion

$c_0 = 1, c_1 = 1, c_2 = 2.$

2.a. Pour $n = 0$: $\binom{0}{0} - \binom{0}{1} = 1 - 0 = 1 = c_0$, avec la convention $\binom{0}{1} = 0$.

Pour $n \geq 1$: $n + 1 \leq 2n$ et

$$\binom{2n}{n+1} = \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!} = \frac{(2n)!}{n!n!} \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{n}{n+1} \binom{2n}{n},$$

car $(n+1)! = (n+1)n!$ et $(n-1)! = \frac{n!}{n}$. Donc :

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \binom{2n}{n} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = c_n.$$

Conclusion

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}.$$

2.b. Les coefficients binomiaux sont des entiers (ce sont des cardinaux de parties), donc c_n , différence de deux entiers, est un entier relatif. De plus $c_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} > 0$.

Conclusion

c_n est un entier naturel non nul.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $c_n > 0$:

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2} \cdot \frac{n!^2}{(2n)!} = \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \frac{2(2n+1)}{n+2}.$$

Conclusion

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} c_n.$$

4. Code adapté en Python. On utilise la relation de récurrence de la question 3 à partir de $c_0 = 1$.

Python

```
def catalan(n):
    c = 1                                # c contient c_0
    for k in range(n):                  # k = 0, 1, ..., n-1
        c = c * 2 * (2*k + 1) // (k + 2) # c passe de c_k à c_{k+1}
    return c
```

Explications : après le passage dans la boucle d'indice k , la variable c contient c_{k+1} ; après les n passages (k de 0 à $n-1$, car $\text{range}(n)$ exclut n), elle contient c_n . Pour $n = 0$, la boucle n'est pas exécutée et la fonction renvoie $c_0 = 1$. La division entière $//$ est exacte :

$2(2k+1)c_k = (k+2)c_{k+1}$ est un multiple de $k+2$ car c_{k+1} est entier (question 2.b). On obtient ainsi des entiers exacts (on pourrait aussi écrire / et obtenir des flottants).

Code exécuté : `catalan(n)` pour $n = 0, \dots, 9$ renvoie 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, en accord avec la question 1.

5.a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n > 0$ et par 3 :

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} - 1 = \frac{4n+2-(n+2)}{n+2} = \frac{3n}{n+2} \geq 0.$$

Conclusion

$c_{n+1} \geq c_n$ pour tout n : la suite (c_n) est croissante.

5.b. Méthode 1 — Par l'absurde (méthode imposée). Supposons que (c_n) ne diverge pas vers $+\infty$. Étant croissante, si elle était non majorée elle divergerait vers $+\infty$; elle est donc majorée et, par le théorème de la limite monotone, elle converge vers un réel ℓ .

Comme $c_n \geq c_0 = 1$, on a $\ell \geq 1 > 0$. Par 3, $c_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2}c_n$; or

$\frac{2(2n+1)}{n+2} = \frac{4+2/n}{1+2/n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 4$. Le passage à la limite donne $\ell = 4\ell$, donc $\ell = 0$: contradiction.

Méthode 2 — Par minoration géométrique (complément). Pour $n \geq 1$,

$\frac{2(2n+1)}{n+2} \geq 2 \iff 4n+2 \geq 2n+4 \iff n \geq 1$. Donc $c_{n+1} \geq 2c_n$ pour $n \geq 1$, d'où par récurrence $c_n \geq 2^{n-1}c_1 = 2^{n-1}$ pour $n \geq 1$, et $c_n \rightarrow +\infty$ par comparaison.

La méthode 1 n'utilise que la limite du rapport ; la méthode 2 donne en plus une vitesse de divergence.

Conclusion

(c_n) diverge vers $+\infty$.

6.a. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Par 3, $\frac{c_{k+1}}{c_k} = \frac{2(2k+1)}{k+2}$, et l'encadrement équivaut, après division par 4, à :

$$\left(\frac{k}{k+1}\right)^{3/2} \leq \frac{2k+1}{2(k+2)} \leq \left(\frac{k+1}{k+2}\right)^{3/2}.$$

Tous ces nombres sont positifs et la fonction carré est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$; il suffit donc de comparer les carrés.

Inégalité de droite : elle équivaut à $\frac{(2k+1)^2}{4(k+2)^2} \leq \frac{(k+1)^3}{(k+2)^3}$, soit, en multipliant par $4(k+2)^3 > 0$, à $(2k+1)^2(k+2) \leq 4(k+1)^3$. Or

$$(2k+1)^2(k+2) = 4k^3 + 12k^2 + 9k + 2 \quad \text{et} \quad 4(k+1)^3 = 4k^3 + 12k^2 + 12k + 4,$$

dont la différence $4(k+1)^3 - (2k+1)^2(k+2) = 3k + 2$ est strictement positive.

Inégalité de gauche : elle équivaut à $\frac{k^3}{(k+1)^3} \leq \frac{(2k+1)^2}{4(k+2)^2}$, soit à $4k^3(k+2)^2 \leq (2k+1)^2(k+1)^3$. Or

$$4k^3(k+2)^2 = 4k^5 + 16k^4 + 16k^3,$$

$$(2k+1)^2(k+1)^3 = (4k^2 + 4k + 1)(k^3 + 3k^2 + 3k + 1) = 4k^5 + 16k^4 + 25k^3 + 19k^2 + 7k + 1,$$

dont la différence vaut $9k^3 + 19k^2 + 7k + 1 > 0$.

Conclusion

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, 4 \left(\frac{k}{k+1} \right)^{3/2} \leq \frac{c_{k+1}}{c_k} \leq 4 \left(\frac{k+1}{k+2} \right)^{3/2}.$$

6.b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par produit télescopique (les c_k sont non nuls) et $c_1 = 1$:

$$c_n = c_1 \prod_{k=1}^{n-1} \frac{c_{k+1}}{c_k}.$$

Les facteurs étant positifs, on peut multiplier les encadrements de 6.a pour $k = 1, \dots, n-1$ (produit vide égal à 1 si $n = 1$) :

$$4^{n-1} \left(\prod_{k=1}^{n-1} \frac{k}{k+1} \right)^{3/2} \leq c_n \leq 4^{n-1} \left(\prod_{k=1}^{n-1} \frac{k+1}{k+2} \right)^{3/2}.$$

Les produits sont télescopiques :

$$\prod_{k=1}^{n-1} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{n}$$

et

$$\prod_{k=1}^{n-1} \frac{k+1}{k+2} = \frac{2}{n+1}.$$

Donc :

$$\frac{4^{n-1}}{n^{3/2}} \leq c_n \leq 4^{n-1} \left(\frac{2}{n+1} \right)^{3/2} = \frac{2\sqrt{2} 4^{n-1}}{(n+1)^{3/2}} \leq \frac{2\sqrt{2} 4^{n-1}}{n^{3/2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{4^n}{n\sqrt{n}}.$$

Et $\frac{4^{n-1}}{n^{3/2}} = \frac{1}{4} \frac{4^n}{n\sqrt{n}}.$

Conclusion

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{4} \frac{4^n}{n\sqrt{n}} \leq c_n \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{4^n}{n\sqrt{n}}.$$

7.a. Avec le changement d'indice $i = n - k$ (k décrit $\llbracket 0; n \rrbracket$ si et seulement si i le décrit) :

$$T_n = \sum_{i=0}^n (n-i) c_{n-i} c_i = n \sum_{i=0}^n c_i c_{n-i} - \sum_{i=0}^n i c_i c_{n-i} = n S_n - T_n.$$

Conclusion

$$2T_n = nS_n, \text{ soit } T_n = \frac{n}{2} S_n.$$

7.b. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$T_{n+1} + S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} (k+1) c_k c_{n+1-k}.$$

Par la question 3 appliquée au rang $k-1$, pour $k \geq 1$:

$(k+1)c_k = 2(2k-1)c_{k-1} = (4k-2)c_{k-1}$. En isolant le terme $k=0$ (égal à $c_0 c_{n+1} = c_{n+1}$) :

$$T_{n+1} + S_{n+1} = c_{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} (4k-2) c_{k-1} c_{n+1-k} = c_{n+1} + \sum_{j=0}^n (4j+2) c_j c_{n-j},$$

avec $j = k-1$. Donc

$$T_{n+1} + S_{n+1} = c_{n+1} + 4 \sum_{j=0}^n j c_j c_{n-j} + 2 \sum_{j=0}^n c_j c_{n-j}.$$

Conclusion

$$T_{n+1} + S_{n+1} = c_{n+1} + 4T_n + 2S_n.$$

7.c. Par 7.a, $T_{n+1} = \frac{n+1}{2}S_{n+1}$ et $T_n = \frac{n}{2}S_n$, donc 7.b s'écrit :

$$\frac{n+3}{2}S_{n+1} = c_{n+1} + 2(n+1)S_n. \quad (*)$$

Montrons par récurrence la propriété $\mathcal{H}_n : \langle S_n = c_{n+1} \rangle$.

Initialisation : $S_0 = c_0^2 = 1 = c_1$.

Hérédité : supposons $\mathcal{H}_n$. Par (*), $\frac{n+3}{2}S_{n+1} = c_{n+1} + 2(n+1)c_{n+1} = (2n+3)c_{n+1}$,

donc $S_{n+1} = \frac{2(2n+3)}{n+3}c_{n+1}$. Par la question 3 au rang $n+1$:

$c_{n+2} = \frac{2(2(n+1)+1)}{(n+1)+2}c_{n+1} = \frac{2(2n+3)}{n+3}c_{n+1}$. Donc $S_{n+1} = c_{n+2} : \mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = c_{n+1}.$$

8.a. Pour $x = 0$, la série est nulle à partir du rang 1, donc converge. Soit $x \in [-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}]$.

Pour $n \geq 1$, par 6.b :

$$0 \leq |c_n x^n| \leq c_n 4^{-n} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{n^{3/2}}.$$

La série de Riemann

$$\sum \frac{1}{n^{3/2}}$$

converge ($\frac{3}{2} > 1$). Par comparaison de séries à termes positifs,

$$\sum |c_n x^n|$$

converge : la série

$$\sum c_n x^n$$

est absolument convergente, donc convergente.

Conclusion

pour tout $x \in [-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}]$,

$$\sum_{n \geq 0} c_n x^n$$

converge.

8.b. Question adaptée au programme actuel : l'égalité indiquée dans l'énoncé original, avec une somme intérieure

$$\sum_{k=0}^n,$$

est fausse pour $N \geq 1$ (pour $N = 1$, le membre de gauche vaut $1 + 2x + x^2$ et celui de droite $1 + 2x + 5x^2$); on utilise l'égalité rectifiée de l'énoncé adapté.

Justification de l'égalité rectifiée : en développant,

$$\left(\sum_{i=0}^N c_i x^i \right) \left(\sum_{j=0}^N c_j x^j \right) = \sum_{0 \leq i, j \leq N} c_i c_j x^{i+j}.$$

On regroupe les couples selon $n = i + j \in \llbracket 0; 2N \rrbracket$; pour n fixé, $i = k$ et $j = n - k$ avec $0 \leq k \leq N$ et $0 \leq n - k \leq N$, c'est-à-dire $\max(0, n - N) \leq k \leq \min(n, N)$.

Notons $\Pi_N(x)$ ce produit et

$$b_{n,N} = \sum_{k=\max(0, n-N)}^{\min(n, N)} c_k c_{n-k}.$$

Pour $n \leq N$: $\max(0, n - N) = 0$ et $\min(n, N) = n$, donc

$$b_{n,N} = \sum_{k=0}^n c_k c_{n-k} = c_{n+1}$$

(question 7.c).

Pour $N < n \leq 2N$: $b_{n,N}$ est une somme de certains termes positifs de

$$\sum_{k=0}^n c_k c_{n-k},$$

donc $0 \leq b_{n,N} \leq c_{n+1}$.

Ainsi :

$$\Pi_N(x) = \sum_{n=0}^N c_{n+1} x^n + \sum_{n=N+1}^{2N} b_{n,N} x^n.$$

Convergence de

$$\sum c_{n+1} x^n :$$

$|c_{n+1}x^n| \leq c_{n+1}4^{-n} = 4c_{n+1}4^{-(n+1)}$, terme général d'une série convergente (8.a avec $x = \frac{1}{4}$, à un décalage d'indice près). Notons

$$\rho_N = \sum_{m=N+2}^{+\infty} c_m 4^{-m}$$

le reste de la série convergente

$$\sum c_m 4^{-m};$$

$$\rho_N \rightarrow 0.$$

Majoration du terme parasite :

$$\left| \sum_{n=N+1}^{2N} b_{n,N} x^n \right| \leq \sum_{n=N+1}^{2N} c_{n+1} |x|^n \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} c_{n+1} 4^{-n} = 4\rho_N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

Passage à la limite :

$$\Pi_N(x) = \left(\sum_{i=0}^N c_i x^i \right)^2 \rightarrow f(x)^2$$

(8.a et continuité du carré), et

$$\sum_{n=0}^N c_{n+1} x^n \rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} c_{n+1} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^{n-1}.$$

Donc :

$$f(x)^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^{n-1}.$$

Conclusion

pour tout $x \in [-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}]$,

$$(f(x))^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^{n-1}.$$

8.c. Soit $x \in [-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}]$. Par 8.b, par linéarité des séries convergentes et $c_0 = 1$:

$$g(x)^2 = 4x^2 f(x)^2 = 4x \sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^n = 4x(f(x) - c_0) = 4x f(x) - 4x = 2g(x) - 4x.$$

Conclusion

$\forall x \in [-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}], (g(x))^2 = 2g(x) - 4x.$

8.d. Soit $x \in [-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}]$. Par 8.c, $(g(x) - 1)^2 = g(x)^2 - 2g(x) + 1 = 1 - 4x \geq 0$, donc $|g(x) - 1| = \sqrt{1 - 4x}$.

Posons $\varepsilon(x) = 1$ si $g(x) \geq 1$ et $\varepsilon(x) = -1$ sinon. Alors

$g(x) - 1 = \varepsilon(x) |g(x) - 1| = \varepsilon(x) \sqrt{1 - 4x}$, soit $g(x) = 1 + \varepsilon(x) \sqrt{1 - 4x}$, avec

$\varepsilon(x) \in \{-1; 1\}$.

Continuité : pour $x \in [-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}[$, $\sqrt{1 - 4x} > 0$ et $\varepsilon(x) = \frac{g(x) - 1}{\sqrt{1 - 4x}}$. La fonction $g : x \mapsto 2xf(x)$ est continue (produit de fonctions continues, f étant continue par hypothèse admise), et $x \mapsto \sqrt{1 - 4x}$ est continue et ne s'annule pas sur $[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}[$.

Conclusion

une telle fonction ε existe, et elle est continue sur $[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}[$ comme quotient de fonctions continues.

8.e. Sur l'intervalle $I = [-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}]$, ε est continue et ne prend que les valeurs -1 et 1 . Si

elle prenait les deux valeurs, le théorème des valeurs intermédiaires fournirait un point de I où elle vaut 0 : impossible. Donc ε est constante sur I .

En $x = 0 \in I : g(0) = 0$, donc $0 = 1 + \varepsilon(0) \cdot 1$ et $\varepsilon(0) = -1$. Ainsi $g(x) = 1 - \sqrt{1 - 4x}$ pour tout $x \in I$.

En $x = \frac{1}{4} : g(\frac{1}{4}) = 1 + \varepsilon(\frac{1}{4}) \cdot 0 = 1 = 1 - \sqrt{0}$.

Conclusion

$$\forall x \in [-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}], g(x) = 1 - \sqrt{1 - 4x}.$$

PARTIE B : Loi du demi-cercle

9.a. Méthode 1 — Linéarisation. Par la formule d'addition, $\cos(2t) = \cos^2 t - \sin^2 t = 2\cos^2 t - 1$, donc $\cos^2 t = \frac{1 + \cos(2t)}{2}$. Ainsi :

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t \, dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{\sin \pi - \sin(-\pi)}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Méthode 2 — Intégration par parties. Notons $I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t \, dt$. Avec $u = \cos$, $v = \sin$ (de classe C^1) :

$$I = [\sin t \cos t]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 t \, dt = 0 + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \cos^2 t) \, dt = \pi - I.$$

Donc $2I = \pi$.

La méthode 1 utilise une identité trigonométrique ; la méthode 2 n'utilise que $\cos^2 + \sin^2 = 1$ et se généralise aux puissances de $\cos$ (intégrales de Wallis).

Conclusion

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t \, dt = \frac{\pi}{2}.$$

9.b. La fonction $t \mapsto 2 \sin t$ est de classe C^1 sur $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, avec $2 \sin(-\frac{\pi}{2}) = -2$ et $2 \sin(\frac{\pi}{2}) = 2$. Pour $t \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, $\cos t \geq 0$, donc $\sqrt{4 - 4 \sin^2 t} = 2\sqrt{\cos^2 t} = 2 \cos t$. Par changement de variable $x = 2 \sin t$, $dx = 2 \cos t \, dt$:

$$\int_{-2}^2 \varphi(x) \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2 \cos t \cdot 2 \cos t \, dt = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 1.$$

Conclusion

$$\int_{-2}^2 \varphi(x) \, dx = 1.$$

10. La fonction φ est positive sur $\mathbb{R}$. Elle est continue sur $] -\infty; -2[$ et $]2; +\infty[$ (nulle), sur $[-2; 2]$ (composée et produit de fonctions continues), et en ± 2 ses limites à gauche et à droite valent $0 = \varphi(\pm 2)$: elle est continue sur $\mathbb{R}$. Enfin φ est nulle hors de $[-2; 2]$, donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi$ converge et vaut $\int_{-2}^2 \varphi = 1$ (9.b).

Conclusion

φ est une densité de probabilité.

11.a. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $x \mapsto x^n \varphi(x)$ est nulle hors de $[-2; 2]$ et continue sur ce segment, donc $\int_{-\infty}^{+\infty} |x^n| \varphi(x) \, dx$ converge et vaut $\int_{-2}^2 |x|^n \varphi(x) \, dx$. Par le théorème de transfert, X admet un moment d'ordre n et $E(X^n) = \int_{-2}^2 x^n \varphi(x) \, dx$.

φ est paire. Par le changement de variable $x = -u$:

$$\int_{-2}^0 x^n \varphi(x) \, dx = \int_0^2 (-u)^n \varphi(u) \, du = (-1)^n \int_0^2 u^n \varphi(u) \, du.$$

Pour n impair, les deux moitiés se compensent : $E(X^{2n+1}) = 0$. Pour n pair, elles sont égales :

$$E(X^{2n}) = 2 \int_0^2 x^{2n} \frac{1}{2\pi} \sqrt{4-x^2} \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^2 x^{2n} \sqrt{4-x^2} \, dx.$$

Conclusion

X admet des moments de tout ordre, $E(X^{2n+1}) = 0$ et $E(X^{2n}) = \frac{1}{\pi} \int_0^2 x^{2n} \sqrt{4-x^2} \, dx$.

11.b.i. $u_0 = E(X^0) = E(1) = 1$ (on peut aussi écrire $u_0 = \int_{-2}^2 \varphi = 1$ par 9.b).

Conclusion

$u_0 = 1$.

11.b.ii. Soit $n \in \mathbb{N}$. On écrit $\pi u_{n+1} = \int_0^2 x^{2n+1} \cdot x \sqrt{4-x^2} \, dx$ et on pose, pour $x \in [0; 2]$:

$$a(x) = x^{2n+1}, \quad b(x) = -\frac{1}{3}(4-x^2)^{3/2}.$$

La fonction $t \mapsto t^{3/2}$ est de classe C^1 sur $[0; +\infty[$, de dérivée $\frac{3}{2}t^{1/2}$; comme $4-x^2 \geq 0$ sur $[0; 2]$, b est de classe C^1 sur $[0; 2]$ avec $b'(x) = -\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2}(-2x)(4-x^2)^{1/2} = x\sqrt{4-x^2}$. L'intégration par parties sur le segment $[0; 2]$ donne :

$$\pi u_{n+1} = \left[-\frac{1}{3} x^{2n+1} (4-x^2)^{3/2} \right]_0^2 + \frac{2n+1}{3} \int_0^2 x^{2n} (4-x^2)^{3/2} \, dx.$$

Le crochet est nul (facteur $(4 - x^2)^{3/2}$ nul en 2, facteur x^{2n+1} nul en 0). Et

$(4 - x^2)^{3/2} = (4 - x^2)\sqrt{4 - x^2}$, d'où :

$$\pi u_{n+1} = \frac{2n+1}{3} \left(4 \int_0^2 x^{2n} \sqrt{4 - x^2} dx - \int_0^2 x^{2n+2} \sqrt{4 - x^2} dx \right) = \frac{2n+1}{3} (4\pi u_n - \pi u_{n+1}).$$

Conclusion

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2n+1}{3} (4u_n - u_{n+1}).$$

11.b.iii. Par 11.b.ii, $u_{n+1} \left(1 + \frac{2n+1}{3}\right) = \frac{4(2n+1)}{3} u_n$, soit $\frac{2n+4}{3} u_{n+1} = \frac{4(2n+1)}{3} u_n$ et :

$$u_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} u_n.$$

Les suites (u_n) et (c_n) vérifient la même relation de récurrence (question 3) et

$u_0 = c_0 = 1$. Par récurrence immédiate ($u_n = c_n \Rightarrow u_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} c_n = c_{n+1}$) :

Conclusion

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = E(X^{2n}) = c_n.$$

PARTIE C : Étude d'une expérience aléatoire

Notations : pour $k \geq 1$, on note Δ_k la différence «nombre de Pile moins nombre de Face» au cours des k premiers lancers, et $\Delta_0 = 0$. À chaque lancer, Δ augmente ou diminue de 1. On pose $q = p(1 - p)$.

12.a. Code adapté en Python. On compte les Pile et les Face au fur et à mesure ; on s'arrête au premier instant où les deux nombres sont égaux, ou après 10^4 lancers.

Python

```
import numpy.random as rd

def simule(p):
    nbP = 0                # nombre de Pile obtenus
    nbF = 0                # nombre de Face obtenus
    T = 0                  # vaut 0 tant qu'il n'y a pas eu égalité
    k = 0                  # nombre de lancers effectués

    while k < 10**4 and T == 0:
        k = k + 1
        if rd.random() < p:    # Pile avec probabilité p
            nbP = nbP + 1
        else:
            nbF = nbF + 1
        if nbP == nbF:
            T = k                # première égalité au lancer k
    return T
```

Explications : `rd.random()` suit la loi uniforme sur $[0; 1[$, donc l'événement `rd.random() < p` a pour probabilité p ; les appels successifs sont indépendants. La boucle s'arrête dès que T devient non nul (première égalité, au lancer k) ou lorsque $k = 10^4$; si aucune égalité n'a eu lieu, la fonction renvoie 0, conformément à la convention de l'énoncé. Comme T ne peut pas valoir 0 après une égalité (au moins deux lancers), le test `T == 0` joue bien le rôle d'indicateur «pas encore d'égalité».

Code exécuté.

12.b. Code adapté en Python. Lecture du script : pour $i = 1, 2, 3$, on prend $p = \frac{i}{4}$, c'est-à-dire successivement $p = \frac{1}{4}$, $p = \frac{1}{2}$, $p = \frac{3}{4}$. Pour chaque p , on calcule trois fois ($j = 0, 1, 2$) la moyenne $m/1000$ de 1000 valeurs simulées de T , et on affiche le tableau L de ces trois moyennes. Le script affiche donc trois lignes de trois nombres : la ligne i contient trois moyennes empiriques de T (sur 1000 simulations) pour $p = \frac{i}{4}$.

Interprétation :

- Pour $p = \frac{1}{4}$ (ligne 1) et $p = \frac{3}{4}$ (ligne 3), les trois moyennes sont proches les unes des autres, autour de 1,4 à 1,5. On verra en 16.a que T admet une espérance lorsque $p \neq \frac{1}{2}$; on montre de même (le terme général est dominé par $n^2(4q)^n$) qu'elle admet une variance. Par la loi faible des grands nombres, la moyenne empirique de 1000 simulations indépendantes est alors proche de $E(T)$ avec une forte probabilité : les valeurs affichées sont des estimations de $E(T)$. Un calcul numérique de la somme

$$\sum_{n \geq 1} 2n P(T = 2n)$$

avec la loi de 14.c donne une valeur proche de 1,5 pour $p = \frac{1}{4}$ (observation numérique, non démontrée ici), cohérente avec les résultats.

- Les lignes 1 et 3 sont comparables : échanger les rôles de Pile et Face transforme l'expérience de paramètre p en celle de paramètre $1 - p$ sans changer T ; ainsi T a la même loi pour $p = \frac{1}{4}$ et $p = \frac{3}{4}$ (ce que confirme la formule de 14.c, symétrique en p et $1 - p$).
- Pour $p = \frac{1}{2}$ (ligne 2), les moyennes sont grandes (71 à 125) et très dispersées d'une série à l'autre : elles ne se stabilisent pas. Cela traduit le fait que T n'admet pas d'espérance lorsque $p = \frac{1}{2}$ (question 16.b) : de très grandes valeurs de T apparaissent avec une probabilité non négligeable et dominent la moyenne. La troncature à 10^4 lancers rend la variable simulée bornée, ce qui explique que les moyennes restent finies.

À titre de contrôle, une exécution du script Python ci-dessus a donné [1.556 1.406 1.432], [94.716 76.77 89.384], [1.45 1.526 1.522], du même ordre que les résultats de l'énoncé (les valeurs varient d'une exécution à l'autre). Une simulation n'est pas une preuve : elle illustre les résultats des questions 15 et 16.

Conclusion

le script affiche, pour $p = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$, trois moyennes empiriques de T ; stables (environ 1,5) pour $p \neq \frac{1}{2}$, grandes et instables pour $p = \frac{1}{2}$, en accord avec l'existence ou non de $E(T)$.

- 13.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Si les $2n + 1$ premiers lancers comportent a Pile et b Face, alors $a + b = 2n + 1$ est impair, donc $a \neq b$ (sinon $a + b = 2a$ serait pair). L'égalité ne peut jamais se produire à l'issue d'un nombre impair de lancers; en particulier $(T = 2n + 1) = \emptyset$.

Conclusion

$\forall n \in \mathbb{N}, P(T = 2n + 1) = 0$.

14.a. Rectification : dans l'énoncé original, l'exemple indique « $d_3 = 3$ », alors que l'ensemble D_3 écrit juste avant comporte deux éléments; la valeur correcte est $d_3 = 2$ (ce que confirme $d_3 = e_2 = c_2 = 2$). L'énoncé adapté donne $d_3 = 2$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_{2n}) \in D_n$. On a $\Delta_k > 0$ pour $1 \leq k \leq 2n - 1$ et $\Delta_{2n} = 0$.

- $\Delta_1 > 0$ impose $\omega_1 = P$.
- $\Delta_{2n-1} > 0, \Delta_{2n} = 0$ et $|\Delta_{2n} - \Delta_{2n-1}| = 1$ imposent $\Delta_{2n-1} = 1$ et $\omega_{2n} = F$.

Pour $n = 1$: $D_1 = \{P-F\}$, donc $d_1 = 1 = e_0$.

Pour $n \geq 2$: on associe à ω le mot $w = (\omega_2, \dots, \omega_{2n-1})$ de longueur $2(n - 1)$. Ses différences partielles sont $\Delta'_k = \Delta_{k+1} - 1$ pour $1 \leq k \leq 2n - 2$ (on retire le Pile initial). Comme $\Delta_{k+1} \geq 1$ pour $k \leq 2n - 2$, on a $\Delta'_k \geq 0$, et $\Delta'_{2n-2} = \Delta_{2n-1} - 1 = 0$: donc $w \in E_{n-1}$.

Réciproquement, si $w \in E_{n-1}$, le mot P- w -F a pour différences partielles $\Delta_1 = 1$, $\Delta_{k+1} = 1 + \Delta'_k \geq 1$ pour $1 \leq k \leq 2n - 2$, et $\Delta_{2n} = 1 + 0 - 1 = 0$: il appartient à D_n .

Les applications $\omega \mapsto w$ et $w \mapsto P-w-F$ sont réciproques l'une de l'autre : ce sont des bijections entre D_n et E_{n-1} .

Conclusion

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, d_n = e_{n-1}.$$

14.b.i. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega \in E_n$. Comme $\Delta_{2n} = 0$, l'ensemble des $j \in \llbracket 1; 2n \rrbracket$ tels que $\Delta_j = 0$ est non vide ; soit j_0 son plus petit élément. Par la question 13 (raisonnement de parité), j_0 est pair : $j_0 = 2k$ avec $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

- Les $2k$ premiers lancers forment un élément de D_k : pour $j < 2k$, $\Delta_j \geq 0$ (car $\omega \in E_n$) et $\Delta_j \neq 0$ (minimalité de j_0), donc $\Delta_j > 0$; et $\Delta_{2k} = 0$.
- Si $k < n$, les $2(n - k)$ derniers lancers forment un élément de E_{n-k} : leurs différences partielles sont $\Delta_{2k+j} - \Delta_{2k} = \Delta_{2k+j}$, positives ou nulles, et nulles à la fin. Si $k = n$, il ne reste aucun lancer.

Réciproquement, pour $k \in \llbracket 1; n - 1 \rrbracket$, la concaténation d'un élément de D_k et d'un élément de E_{n-k} est un élément de E_n dont la première égalité a lieu au lancer $2k$; et pour $k = n$, les éléments de D_n sont les éléments de E_n dont la première égalité a lieu au lancer $2n$.

Ainsi E_n est la réunion disjointe, pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, des ensembles F_k des éléments dont la première égalité a lieu au lancer $2k$, avec $\text{Card}(F_k) = d_k e_{n-k}$ (principe multiplicatif, et $e_0 = 1$ pour $k = n$).

Conclusion

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, e_n = \sum_{k=1}^n d_k e_{n-k}.$$

14.b.ii. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par 14.b.i au rang $n + 1$ puis 14.a :

$$e_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} d_k e_{n+1-k} = \sum_{k=1}^{n+1} e_{k-1} e_{n+1-k} = \sum_{j=0}^n e_j e_{n-j} \quad (j = k - 1).$$

Conclusion

$$\forall n \in \mathbb{N}, e_{n+1} = \sum_{k=0}^n e_k e_{n-k}.$$

14.b.iii. Récurrence forte sur n , propriété $\mathcal{P}_n : \ll \forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, e_k = c_k \gg$.

Initialisation : $e_0 = 1 = c_0$.

Hérédité : si $\mathcal{P}_n$ est vraie, alors par 14.b.ii et la conclusion de 7.c :

$$e_{n+1} = \sum_{k=0}^n e_k e_{n-k} = \sum_{k=0}^n c_k c_{n-k} = c_{n+1},$$

donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion

$$\forall n \in \mathbb{N}, e_n = c_n \text{ (par exemple } e_3 = c_3 = 5 \text{)}.$$

14.c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'événement $(T = 2n)$ est réalisé si et seulement si $\Delta_j \neq 0$ pour $1 \leq j \leq 2n - 1$ et $\Delta_{2n} = 0$. Comme Δ varie de ± 1 à chaque lancer, elle ne peut changer de signe sans s'annuler ; donc ou bien $\Delta_j > 0$ pour tout $j \leq 2n - 1$, ou bien $\Delta_j < 0$ pour tout $j \leq 2n - 1$.

- Premier cas : le résultat des $2n$ premiers lancers appartient à D_n .
- Second cas : en échangeant Pile et Face, on obtient un élément de D_n ; l'ensemble D'_n de ces résultats est en bijection avec D_n , donc de cardinal d_n .

Ainsi $(T = 2n)$ est la réunion disjointe des événements « les $2n$ premiers lancers donnent le mot w », pour $w \in D_n \cup D'_n$ (ensembles disjoints). Chaque mot w comporte n Pile et n Face, et, les lancers étant indépendants, a pour probabilité $p^n(1-p)^n$. Par 14.a et 14.b.iii, $d_n = e_{n-1} = c_{n-1}$, d'où :

$$P(T = 2n) = 2 d_n p^n (1-p)^n = 2 c_{n-1} p^n (1-p)^n.$$

Conclusion

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(T = 2n) = 2c_{n-1}p^n(1-p)^n.$$

15.a. T est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, donc

$$\sum_{n \geq 0} P(T = n)$$

converge et vaut 1 (les événements $(T = n)$, $n \in \mathbb{N}$, forment un système complet). Pour $x \in [-1; 1]$, $0 \leq |P(T = n)x^n| \leq P(T = n)$. Par comparaison de séries à termes positifs, la série converge absolument.

Conclusion

pour tout $x \in [-1; 1]$,

$$\sum_{n \geq 0} P(T = n)x^n$$

converge.

15.b. Pour tout réel p : $\frac{1}{4} - p(1-p) = p^2 - p + \frac{1}{4} = \left(p - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$, avec égalité si et seulement si $p = \frac{1}{2}$.

Conclusion

$$p(1-p) \leq \frac{1}{4}, \text{ et } p(1-p) = \frac{1}{4} \iff p = \frac{1}{2}.$$

15.c. Soit $x \in [-1; 1]$ et $y = qx^2$. Par 15.b, $0 \leq y \leq \frac{1}{4}$, donc $f(y)$ et $g(y)$ sont définis. Pour $N \in \mathbb{N}^*$, par 13 et 14.c :

$$\sum_{n=0}^{2N+1} P(T=n)x^n = P(T=0) + \sum_{n=1}^N 2c_{n-1}q^n x^{2n} = P(T=0) + 2y \sum_{m=0}^{N-1} c_m y^m$$

$$(m = n-1).$$

Quand $N \rightarrow +\infty$, le membre de gauche tend vers $G_T(x)$ (sous-suite des sommes partielles d'une série convergente, 15.a) et le membre de droite vers $P(T=0) + 2yf(y) = P(T=0) + g(y)$ (8.a).

Conclusion

$$\forall x \in [-1; 1], G_T(x) = P(T=0) + g(p(1-p)x^2).$$

15.d. Par 15.a,

$$G_T(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(T=n) = 1.$$

Par 15.c et 8.e :

$$1 = P(T=0) + g(q) = P(T=0) + 1 - \sqrt{1-4q}.$$

Or $1 - 4q = 1 - 4p + 4p^2 = (2p-1)^2$, donc $\sqrt{1-4q} = |2p-1|$.

Conclusion

$$P(T=0) = |2p-1|.$$

Interprétation pour $p = \frac{1}{2}$: $P(T=0) = 0$. Avec une pièce équilibrée, il est presque sûr qu'à un moment le nombre de Pile égalera le nombre de Face. Pour $p \neq \frac{1}{2}$, au contraire, avec une probabilité $|2p-1| > 0$ l'égalité ne se produit jamais : le côté favorisé prend l'avantage dès le début (avec probabilité non nulle) et ne le perd plus.

16. T est à valeurs dans $\mathbb{N}$, avec $P(T = 2n + 1) = 0$. Elle admet une espérance si et seulement si la série à termes positifs

$$\sum_{n \geq 1} 2n P(T = 2n)$$

converge. Par 14.c, $2n P(T = 2n) = 4n c_{n-1} q^n$. Pour $n \geq 2$, on applique 6.b à $n - 1 \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{4} \frac{4^{n-1}}{(n-1)^{3/2}} \leq c_{n-1} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{4^{n-1}}{(n-1)^{3/2}}.$$

16.a. Supposons $p \neq \frac{1}{2}$; par 15.b, $0 < 4q < 1$. Pour $n \geq 2$, avec $(n-1)^{3/2} \geq 1$:

$$0 \leq 4n c_{n-1} q^n \leq 4n \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} 4^{n-1} q^n = \frac{\sqrt{2}}{2} n (4q)^n = \frac{\sqrt{2}}{2} (4q) n (4q)^{n-1}.$$

La série

$$\sum_{n \geq 1} n t^{n-1}$$

converge pour $|t| < 1$ (série géométrique dérivée), ici avec $t = 4q$. Par comparaison de séries à termes positifs,

$$\sum 2n P(T = 2n)$$

converge.

Conclusion

si $p \neq \frac{1}{2}$, T admet une espérance.

16.b. Supposons $p = \frac{1}{2}$: $q = \frac{1}{4}$. Pour $n \geq 2$:

$$4n c_{n-1} 4^{-n} \geq 4n \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{4^{n-1}}{(n-1)^{3/2}} \cdot 4^{-n} = \frac{n}{4(n-1)^{3/2}} \geq \frac{n-1}{4(n-1)^{3/2}} = \frac{1}{4\sqrt{n-1}}.$$

La série

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{\sqrt{n-1}}$$

est une série de Riemann d'exposant $\frac{1}{2} \leq 1$ (après décalage d'indice), donc divergente.
Par comparaison de séries à termes positifs,

$$\sum 2n P(T = 2n)$$

diverge.

Conclusion

si $p = \frac{1}{2}$, T n'admet pas d'espérance.

Relevé des adaptations

- Problème 2, préambule : ajout de la convention $\binom{n}{k} = 0$ pour $k > n$, nécessaire pour donner un sens à $\binom{2n}{n+1}$ lorsque $n = 0$ (question 2.a), et des conventions d'importation Python (numpy, numpy.random, rd.random) pour les questions de programmation.

- Problème 2, question 4 : Code adapté en Python. La fonction Scilab `function c = catalan(n)` devient la fonction Python `def catalan(n) :`, même rôle et même valeur renvoyée.
- Problème 2, question 8.b : erreur de l'énoncé original rectifiée. L'égalité suggérée

$$\left(\sum_{i=0}^N c_i x^i\right) \left(\sum_{j=0}^N c_j x^j\right) = \sum_{n=0}^{2N} \left(\sum_{k=0}^n c_k c_{n-k}\right) x^n$$

est fausse dès $N = 1$; la somme intérieure est remplacée par

$$\sum_{k=\max(0, n-N)}^{\min(n, N)} c_k c_{n-k}.$$

Le résultat demandé est inchangé.

- Problème 2, question 12.a : Code adapté en Python. La fonction Scilab `function T = simule(p)` devient `def simule(p) :`, avec le même comportement (au plus 10^4 lancers, valeur 0 en l'absence d'égalité).
- Problème 2, question 12.b : Code adapté en Python. Le script Scilab (boucles `for i = 1 :3, for j = 1 :3, for k = 1 :1000, zeros(1,3), disp(L)`) est traduit en Python (`range(1, 4), range(3), range(1000), np.zeros(3), print(L)`) ; les valeurs affichées de l'énoncé original sont conservées dans un tableau.
- Problème 2, question 14 (exemple) : erreur de l'énoncé original rectifiée, « $d_3 = 3$ » remplacé par « $d_3 = 2$ », en accord avec l'ensemble D_3 donné (deux éléments) et avec $d_3 = c_2 = 2$.