



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques

2021

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

PROBLÈME 1

PARTIE A : Étude de deux suites

On définit les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1) \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n).$$

1. a. Montrer : $\forall t \in]0; +\infty[, \quad \frac{1}{t+1} \leq \ln(t+1) - \ln(t) \leq \frac{1}{t}.$
- b. En déduire que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont monotones, puis qu'elles convergent vers une même limite notée γ .

2. Montrer alors :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n).$$

3. a. Justifier : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \leq \gamma \leq v_n$ puis
 $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left| \frac{u_n + v_n}{2} - \gamma \right| \leq \frac{1}{2} (v_n - u_n).$
- b. En déduire une fonction Python d'en-tête `def approx()` : qui renvoie une approximation du réel γ à 10^{-5} près. On suppose la bibliothèque `numpy` importée par la commande `import numpy as np` ; la commande `np.log(x)` renvoie $\ln(x)$.

PARTIE B : Étude d'une fonction définie par une série

4. Montrer que, pour tout x de $[0; +\infty[$, la série

$$\sum_{k \geq 1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right)$$

converge.

On pose alors, pour tout x de $[0; +\infty[$:

$$S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right).$$

5. a. Calculer $S(0)$ et vérifier : $S(1) = 1$.

b. Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k + \frac{1}{2}} \right) = 2 - 2 \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k} = 2 - \frac{2}{2n+1} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{2}{1 + \frac{k}{n}}.$$

En déduire la valeur de $S\left(\frac{1}{2}\right)$.

6. a. Montrer :

$$\forall (x, y) \in [0; +\infty[^2, \quad S(y) - S(x) = (y - x) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)(k+y)}.$$

b. En déduire que S est une fonction croissante sur $[0; +\infty[$.

c. Montrer : $\forall x \in [0; +\infty[, \forall h \in \mathbb{R}^*$ tel que $x+h \in [0; +\infty[$,

$$\left| \frac{S(x+h) - S(x)}{h} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2} \right| \leq |h| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}.$$

En déduire que S est dérivable sur $[0; +\infty[$ et :

$$\forall x \in [0; +\infty[, \quad S'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2}.$$

On admet que S' est également continue sur $[0; +\infty[$.

7. a. Montrer : $\forall x \in [0; +\infty[, \quad S(x+1) = S(x) + \frac{1}{x+1}.$

b. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

c. En utilisant la croissance de la fonction S sur $[0; +\infty[$, montrer : $S(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(x).$

8. a. Vérifier :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \int_0^1 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right) dx,$$

le réel u_n étant défini dans la partie A.

b. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq \int_0^1 S(x) dx - u_n \leq \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

c. Conclure : $\int_0^1 S(x) dx = \gamma.$

PARTIE C : Application en probabilité

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{x^2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

9. Montrer que f est une densité de probabilité.

Dans toute la suite, on considère une variable aléatoire réelle X à densité, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de densité f .

10. a. Déterminer la fonction de répartition de X .

b. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?

On définit la variable aléatoire Y par : $Y = X - \lfloor X \rfloor$, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du réel x .

11. a. Montrer, pour tout x de $[0; 1[$:

$$P(Y \leq x) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(k \leq X \leq k+x)$$

puis $P(Y \leq x) = S(x).$

b. En déduire la fonction de répartition de Y .

c. Montrer que Y est une variable aléatoire à densité et préciser une densité de Y .

12. Justifier que Y admet une espérance puis, à l'aide d'une intégration par parties, montrer : $E(Y) = 1 - \gamma.$

PROBLÈME 2

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n .

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ et T un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$.

On dit que la suite de polynômes $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers T lorsque :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} T_k(x) = T(x).$$

Dans ce cas, on admet que si, pour tout k de $\mathbb{N}$,

$$T_k = \sum_{i=0}^n a_{k,i} X^i$$

avec $(a_{k,0}, \dots, a_{k,n}) \in \mathbb{R}^{n+1}$, et si

$$T = \sum_{i=0}^n b_i X^i$$

avec $(b_0, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, alors : pour tout i de $\llbracket 0; n \rrbracket$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{k,i} = b_i$.

PARTIE A : Étude d'endomorphismes de polynômes

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on définit l'application φ_n sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \varphi_n(P) = XP - \frac{1}{n^2}((2n-1)X+1)(X-1)P' + \frac{1}{n^2}X(X-1)^2P''.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Calculer $\varphi_n(1)$ et vérifier :

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad \varphi_n(X^i) = \frac{(n-i)^2}{n^2} X^{i+1} + \frac{2i(n-i)}{n^2} X^i + \frac{i^2}{n^2} X^{i-1}.$$

b. Montrer que φ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on note A_n la matrice de φ_n dans la base canonique

$\mathcal{B}_n = (1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$; ainsi, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, A_n est une matrice de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.

2. Cas $n = 2$:

a. Vérifier : $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$.

b. Montrer que le spectre de A_2 est $\left\{-\frac{1}{2}, 0, 1\right\}$.

Justifier alors que A_2 est diagonalisable et déterminer les sous-espaces propres de A_2 .

c. En déduire le spectre de φ_2 et une base de $\mathbb{R}_2[X]$ formée de vecteurs propres de φ_2 .

3. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $(X - 1)^n$ est vecteur propre de φ_n associé à la valeur propre $\frac{-1}{n}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Vérifier : $\forall i \in \llbracket 0; n \rrbracket, (\varphi_n(X^i))(1) = 1$.

b. En déduire que la somme des coefficients sur chaque colonne de A_n est égale à 1.

c. Montrer alors que 1 est une valeur propre de φ_n .

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Montrer :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad (n+1)^2 \varphi_{n+1}((X-1)P) = (X-1)(n^2 \varphi_n(P) - P).$$

b. En déduire que si P est un vecteur propre de φ_n associé à une valeur propre λ , alors $(X-1)P$ est un vecteur propre de φ_{n+1} et préciser la valeur propre associée en fonction de λ .

6. a. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$\text{Sp}(\varphi_n) = \left\{ \frac{-n + j(j+1)}{n^2} ; j \in \llbracket 0; n \rrbracket \right\}.$$

b. En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, φ_n est diagonalisable et déterminer la dimension de chacun de ses sous-espaces propres.

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note Π_n le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par :

$$\Pi_n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 X^i.$$

a. À l'aide de la question 1.a., montrer : $\varphi_n(\Pi_n) = \Pi_n$.

b. En déduire le sous-espace propre de φ_n associé à la valeur propre 1.

8. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et P un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$. On note, pour tout j de $\llbracket 0; n \rrbracket$, R_j un vecteur propre de φ_n associé à la valeur propre $\lambda_j = \frac{-n + j(j+1)}{n^2}$.

a. Justifier qu'il existe $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que :

pour tout k de $\mathbb{N}^*$,

$$\varphi_n^k(P) = \sum_{j=0}^n \alpha_j (\lambda_j)^k R_j,$$

où φ_n^k désigne l'endomorphisme $\varphi_n \circ \dots \circ \varphi_n$ (k fois).

- b.** On suppose dans cette question $n \geq 2$. En déduire qu'il existe un réel α tel que la suite de polynômes $(\varphi_n^k(P))_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers le polynôme $\alpha \Pi_n$.

PARTIE B : Étude d'une expérience aléatoire

Dans cette partie, n désigne un entier de $\mathbb{N}$ supérieur ou égal à 2.

On dispose d'une urne rouge et d'une urne bleue ainsi que de n boules rouges et de n boules bleues, ces $2n$ boules étant supposées indiscernables au toucher.

Initialement, on place les n boules rouges dans l'urne rouge et les n boules bleues dans l'urne bleue.

On procède alors à une succession d'épreuves aléatoires, chaque épreuve consistant à échanger au hasard une boule de l'urne rouge avec une boule de l'urne bleue. Après chaque épreuve, chaque urne contient donc toujours n boules.

On modélise cette expérience par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Pour tout entier k de $\mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire Z_k égale au nombre de boules rouges présentes dans l'urne rouge à l'issue de la k -ième épreuve. On pose également $Z_0 = n$.

On pourra remarquer que, après chaque épreuve, le nombre de boules rouges dans l'urne rouge est toujours égal au nombre de boules bleues dans l'urne bleue.

- 9.** Déterminer la loi de la variable aléatoire Z_1 .

10. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer : pour tout i de $\llbracket 0; n \rrbracket$,

$$P(Z_{k+1} = i) = \left(1 - \frac{i-1}{n}\right)^2 P(Z_k = i-1) + 2 \frac{i}{n} \left(1 - \frac{i}{n}\right) P(Z_k = i) + \left(\frac{i+1}{n}\right)^2 P(Z_k = i+1).$$

11. a. Recopier et compléter les lignes incomplètes de la fonction Python suivante pour que, prenant en entrée le nombre n initial de boules rouges et le nombre k d'épreuves réalisées, elle renvoie une simulation de Z_k . La commande `np.random.random()` renvoie un réel choisi au hasard selon la loi uniforme sur $[0; 1[$.

Python

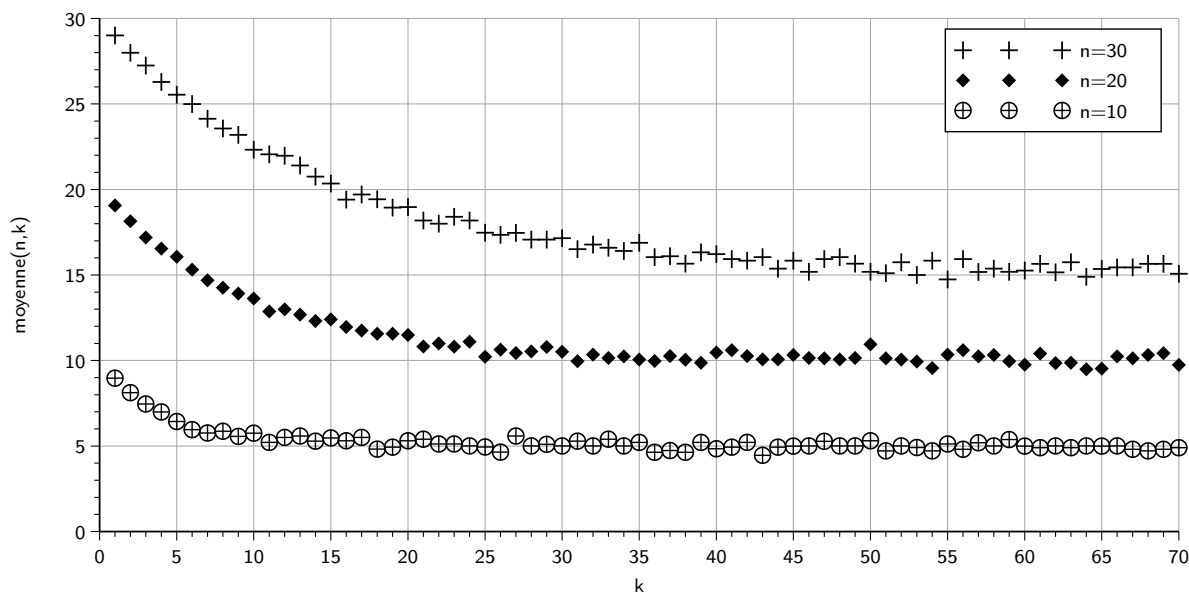
```
import numpy as np

def simule(n, k):
    R = n # R désigne le nombre de boules rouges dans l'urne rouge
    for j in range(1, k + 1):
        aleaR = np.random.random()
        aleaB = np.random.random()
        if aleaR <= R/n and aleaB <= R/n:
            R = .....
        elif ..... :
            R = R + 1
    Z = .....
    return Z
```

b. Écrire une fonction Python d'en-tête `def esperance(n, k)` : qui, prenant en entrée le nombre n initial de boules rouges et le nombre k d'épreuves réalisées, renvoie une estimation de l'espérance de Z_k .

On justifiera, en particulier, la méthode d'estimation.

c. On utilise la fonction précédente et on trace l'espérance de Z_k en fonction de k pour différentes valeurs de n . On obtient le graphe ci-dessous.



Le graphe représente, pour k entier de 1 à 70, les valeurs renvoyées par $\text{esperance}(n, k)$ pour $n = 30$ (croix), $n = 20$ (losanges pleins) et $n = 10$ (cercles barrés). Les trois nuages de points décroissent : celui de $n = 30$ part de 29 en $k = 1$ et se stabilise autour de 15 ; celui de $n = 20$ part de 19 et se stabilise autour de 10 ; celui de $n = 10$ part de 9 et se stabilise autour de 5.

Émettre une conjecture sur la valeur de la limite de l'espérance de Z_k lorsque k tend vers $+\infty$.

12. On note, pour tout k de $\mathbb{N}$: $\Delta_k = Z_{k+1} - Z_k$.

a. Déterminer, pour tout k de $\mathbb{N}$, l'ensemble $\Delta_k(\Omega)$.

b. Montrer, pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$P(\Delta_k = -1) = \sum_{i=0}^n \left(\frac{i}{n}\right)^2 P(Z_k = i)$$

et

$$P(\Delta_k = 1) = \sum_{i=0}^n \left(1 - \frac{i}{n}\right)^2 P(Z_k = i).$$

c. Montrer alors, pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$E(\Delta_k) = 1 - \frac{2}{n}E(Z_k) \quad \text{puis} \quad E(Z_{k+1}) = \left(1 - \frac{2}{n}\right) E(Z_k) + 1.$$

d. En déduire, pour tout k de $\mathbb{N}$, une expression de $E(Z_k)$ en fonction de k et de n .

Calculer $\lim_{k \rightarrow +\infty} E(Z_k)$ et commenter le résultat obtenu.

13. Pour tout k de $\mathbb{N}$, on définit le polynôme Q_k de $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$Q_k = \sum_{i=0}^n P(Z_k = i) X^i.$$

a. À l'aide de la question 1.a., démontrer, pour tout k de $\mathbb{N}$: $\varphi_n(Q_k) = Q_{k+1}$, où φ_n est l'endomorphisme étudié dans la partie A.

b. En déduire qu'il existe un réel α tel que la suite de polynômes $(Q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers le polynôme $\alpha \Pi_n$, où Π_n est le polynôme défini à la question 7.

14. a. Déduire de la question précédente : pour tout i de $\llbracket 0; n \rrbracket$,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} P(Z_k = i) = \alpha \binom{n}{i}^2.$$

b. On admet la formule suivante :

$$\forall (a, b, m) \in \mathbb{N}^3, \quad \sum_{i=0}^m \binom{a}{i} \binom{b}{m-i} = \binom{a+b}{m}.$$

Montrer : $\alpha = \frac{1}{\binom{2n}{n}}.$

- c. Montrer que la suite de variables aléatoires $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire Z dont on précisera la loi et l'espérance.