



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques

2019

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

PARTIE A : Étude d'endomorphismes de polynômes

1. Vérifions la linéarité et la stabilité de l'espace. Pour $P, R \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la linéarité de la dérivation donne :

$$\Psi_a(\lambda P + \mu R) = \lambda \Psi_a(P) + \mu \Psi_a(R).$$

Si P est non constant, $\deg P' \leq n-1$, donc $\deg((X-a)P') \leq n$. Si P est constant, $P' = 0$ et $\Psi_a(P) = 2P$ appartient également à l'espace. Le polynôme nul est envoyé sur lui-même. Ainsi Ψ_a est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Les colonnes de la matrice sont les coordonnées des images des éléments de la base. On a $\Psi_a(1) = 2$ et, pour $1 \leq k \leq n$:

$$\Psi_a(X^k) = 2X^k + k(X-a)X^{k-1} = (k+2)X^k - akX^{k-1}.$$

En numérotant lignes et colonnes de 0 à n , la matrice M est définie par $M_{k,k} = k+2$, $M_{k-1,k} = -ak$ pour $1 \leq k \leq n$, et tous ses autres coefficients sont nuls. C'est une matrice triangulaire supérieure dont les seuls coefficients éventuellement non nuls sont situés sur la diagonale et immédiatement au-dessus. Cette description vaut pour tout $n \geq 1$. Par exemple :

$$\text{pour } n=1, \quad M = \begin{pmatrix} 2 & -a \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{pour } n=2, \quad M = \begin{pmatrix} 2 & -a & 0 \\ 0 & 3 & -2a \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

- 3.a. Méthode 1 — Éléments propres d'une matrice triangulaire.

La matrice précédente est triangulaire, donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux, $2, 3, \dots, n+2$. Elles sont réelles et deux à deux distinctes. Il y en a $n+1$, qui

est la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$. Le critère de diagonalisation par l'existence d'autant de valeurs propres distinctes que la dimension s'applique : Ψ_a est diagonalisable et son spectre est $\{2, 3, \dots, n+2\}$.

Méthode 2 — Construction d'une base propre.

Pour $k \geq 1$, on dérive $(X-a)^k$ et on obtient $\Psi_a((X-a)^k) = (k+2)(X-a)^k$. Pour $k=0$, $\Psi_a(1) = 2$. Chaque Q_k est donc un vecteur propre non nul associé à $k+2$. La famille $(Q_0, \dots, Q_n)$ est libre : dans une relation

$$\sum_{k=0}^n c_k Q_k = 0,$$

le terme de plus haut degré dont le coefficient est non nul ne peut pas s'annuler. Cette famille de $n+1$ polynômes est une base. La matrice dans cette base est diagonale, avec les coefficients $2, 3, \dots, n+2$.

La première méthode exploite immédiatement la matrice ; la seconde fournit aussi les vecteurs propres utiles à la suite.

3.b. En base propre, la matrice de Ψ_a est diagonale et ses coefficients sont tous non nuls. Elle est inversible : Ψ_a est un automorphisme. Explicitement, si

$$P = \sum c_k Q_k$$

et $\Psi_a(P) = 0$, alors

$$\sum (k+2)c_k Q_k = 0,$$

donc tous les c_k sont nuls. L'endomorphisme est injectif et, en dimension finie, bijectif.

3.c. Pour $k \geq 1$, $Q'_k = k(X-a)^{k-1}$, d'où $\Psi_a(Q_k) = (k+2)Q_k$. Pour $k=0$, $Q'_0 = 0$ et la même formule donne $\Psi_a(Q_0) = 2Q_0$.

Ainsi, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\Psi_a(Q_k) = (k + 2)Q_k$.

3.d. Fixons $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. En écrivant

$$P = \sum_{j=0}^n c_j Q_j,$$

l'égalité $\Psi_a(P) = (k + 2)P$ devient :

$$\sum_{j=0}^n (j - k) c_j Q_j = 0.$$

La famille étant libre, $c_j = 0$ pour chaque $j \neq k$, tandis que c_k est quelconque. Le sous-espace propre associé à $k + 2$ est donc $\text{Vect}(Q_k)$ et admet la base (Q_k) .

4.a. La règle de dérivation d'un produit donne :

$$((X - a)^2 P(X))' = 2(X - a)P + (X - a)^2 P' = (X - a)\Psi_a(P).$$

Cette identité fournit une primitive de l'intégrande de la question suivante.

4.b. Méthode 1 — Intégration de l'identité précédente.

Pour $x \neq a$, on intègre 4.a sur le segment d'extrémités a et x , avec l'orientation appropriée :

$$\int_a^x (t - a)\Psi_a(P)(t) dt = [(t - a)^2 P(t)]_a^x = (x - a)^2 P(x).$$

La division par $(x - a)^2$, non nul, donne $\Phi_a(\Psi_a(P))(x) = P(x)$. Pour $x = a$, $\Psi_a(P)(a) = 2P(a)$ et la définition donne encore $\Phi_a(\Psi_a(P))(a) = P(a)$. L'égalité est donc vraie sur tout $\mathbb{R}$.

Méthode 2 — Action sur une base adaptée.

Pour $x \neq a$ et $k \geq 0$:

$$\Phi_a(Q_k)(x) = \frac{1}{(x-a)^2} \int_a^x (t-a)^{k+1} dt = \frac{(x-a)^k}{k+2}.$$

Pour $x = a$, la même formule vaut $1/2$ pour $k = 0$ et 0 pour $k \geq 1$, conformément à la définition. Par linéarité de l'intégrale et de l'évaluation en a , $\Phi_a(Q_k) = Q_k/(k+2)$. Puisque $\Psi_a(Q_k) = (k+2)Q_k$, la composée fixe chaque élément de cette base, donc chaque polynôme.

La première preuve suit l'indication de l'énoncé ; la seconde explique directement l'action sur les coordonnées propres.

4.c. Vérifions d'abord que les fonctions obtenues sont bien des polynômes. Pour $R \in \mathbb{R}_n[X]$, l'automorphisme Ψ_a possède un unique antécédent $P = \Psi_a^{-1}(R)$. D'après 4.b :

$$\Phi_a(R) = \Phi_a(\Psi_a(P)) = P = \Psi_a^{-1}(R).$$

Ainsi Φ_a prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$ et coïncide avec l'application linéaire bijective Ψ_a^{-1} . C'est un automorphisme et $\Phi_a^{-1} = \Psi_a$.

4.d. Dans la base $(Q_0, \dots, Q_n)$, Ψ_a a pour matrice $\text{diag}(2, 3, \dots, n+2)$. Son inverse Φ_a a donc pour matrice :

$$\text{diag}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n+2}\right).$$

Ainsi Φ_a est diagonalisable ; ses valeurs propres sont $1/(k+2)$, pour $0 \leq k \leq n$, et les sous-espaces propres correspondants sont $\text{Vect}(Q_k)$.

PARTIE B : Étude d'une fonction définie par une intégrale

5.a. La fonction $t \mapsto tf(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Le théorème fondamental du calcul intégral donne donc $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et $h'(x) = xf(x)$ pour tout réel x .

5.b. Sur le segment $[0, x]$, la fonction continue f atteint son minimum et son maximum. Choisissons $\alpha_x, \beta_x \in [0, x]$ tels que ces valeurs soient respectivement $f(\alpha_x)$ et $f(\beta_x)$. Pour $t \in [0, x]$, $t \geq 0$, donc :

$$tf(\alpha_x) \leq tf(t) \leq tf(\beta_x).$$

La croissance de l'intégrale sur $[0, x]$ donne exactement l'encadrement demandé.

5.c. Puisque $\int_0^x t dt = x^2/2$ et $x^2 > 0$, l'encadrement précédent devient :

$$\frac{f(\alpha_x)}{2} \leq \frac{h(x)}{x^2} \leq \frac{f(\beta_x)}{2}.$$

Les inégalités $0 \leq \alpha_x, \beta_x \leq x$ impliquent que ces deux points tendent vers 0 lorsque $x \rightarrow 0^+$. La continuité de f en 0 donne $f(\alpha_x), f(\beta_x) \rightarrow f(0)$. Par encadrement, $h(x)/x^2 \rightarrow f(0)/2$ à droite.

5.d. Méthode 1 — Changement de variable affine.

Posons $y = -x > 0$ et $\tilde{f}(s) = f(-s)$, fonction continue sur $\mathbb{R}$. Le changement de variable $t = -s$ donne :

$$h(-y) = \int_0^y sf(-s) ds.$$

La question 5.c appliquée à $\tilde{f}$ donne $h(-y)/y^2 \rightarrow \tilde{f}(0)/2 = f(0)/2$. Comme $x^2 = y^2$, la limite à gauche est $f(0)/2$.

Méthode 2 — Contrôle direct par la continuité.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que $|t| < \delta$ implique $|f(t) - f(0)| < \varepsilon$. Pour $-\delta < x < 0$:

$$h(x) - \frac{f(0)x^2}{2} = \int_0^x t(f(t) - f(0)) dt.$$

En inversant les bornes pour majorer la valeur absolue :

$$\left| h(x) - \frac{f(0)x^2}{2} \right| \leq \varepsilon \int_x^0 |t| dt = \frac{\varepsilon x^2}{2}.$$

Après division par x^2 , l'écart est au plus $\varepsilon/2$, ce qui prouve la limite. Cette méthode apporte un contrôle quantifié de l'erreur.

6. Sur chacun des deux demi-axes ouverts, h/x^2 est de classe $\mathcal{C}^1$, puisque h l'est et que le dénominateur ne s'annule pas. Les limites de 5.c et 5.d sont égales à la valeur choisie en 0, donc $\Phi(f)$ est continue sur tout $\mathbb{R}$.

Pour $x \neq 0$:

$$(\Phi(f))'(x) = \frac{h'(x)}{x^2} - \frac{2h(x)}{x^3} = \frac{1}{x}(f(x) - 2\Phi(f)(x)).$$

Cela prouve la formule demandée. Aucune dérivabilité en 0 n'est affirmée.

7.a. Méthode 1 — Substitution dans l'intégrale.

Pour $x \neq 0$, le changement de variable $t = -s$ donne :

$$\Phi(f)(-x) = \frac{1}{x^2} \int_0^x s f(-s) ds.$$

Si f est paire, cette expression est $\Phi(f)(x)$. Si f est impaire, elle est $-\Phi(f)(x)$. Dans ce dernier cas, $f(0) = 0$, donc $\Phi(f)(0) = 0$; la propriété est également vraie au point 0.

Méthode 2 — Formule à bornes fixes.

Pour $x \neq 0$, la substitution affine $t = xu$ fournit, même lorsque $x < 0$:

$$\Phi(f)(x) = \int_0^1 u f(xu) du.$$

Cette formule est aussi vraie en 0, car son membre droit vaut $f(0)/2$. Remplacer x par $-x$ permet de lire directement la parité en utilisant celle de f sous l'intégrale. Cette représentation facilite aussi l'étude de la positivité.

7.b. Pour $x > 0$, $tf(t) \geq 0$ sur $[0, x]$, donc $\Phi(f)(x) \geq 0$. Pour $x < 0$, $tf(t) \leq 0$ sur $[x, 0]$, mais les bornes de l'intégrale sont inversées :

$$\int_0^x tf(t) dt = - \int_x^0 tf(t) dt \geq 0.$$

En 0, $\Phi(f)(0) = f(0)/2 \geq 0$. Ainsi $\Phi(f)$ est positive sur $\mathbb{R}$. La représentation $\int_0^1 u f(xu) du$ confirme ce résultat, puisque son intégrande est positif ou nul.

8. Résultat admis dans cette version adaptée : pour toute fonction f continue sur $\mathbb{R}$, si $f(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow +\infty$, alors $\Phi(f)(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow +\infty$. Il permettra de traiter une limite finie quelconque par soustraction d'une constante.

8.a. La fonction $g = f - \ell$ est continue et tend vers 0 en $+\infty$. Le résultat admis donne $\Phi(g)(x) \rightarrow 0$. Par linéarité, y compris au point 0, et parce que Φ envoie la constante ℓ sur la constante $\ell/2$:

$$\Phi(g) = \Phi(f) - \frac{\ell}{2}.$$

Il en résulte $\Phi(f)(x) \rightarrow \ell/2$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.

8.b. Posons $h(x) = f(-x)$, fonction continue tendant vers ℓ en $+\infty$. La question 8.a donne $\Phi(h)(x) \rightarrow \ell/2$ en $+\infty$. Le changement de variable affine $t = -s$ montre $\Phi(h)(x) = \Phi(f)(-x)$; l'égalité est aussi vraie en 0. En posant $y = -x$, on obtient $\Phi(f)(y) \rightarrow \ell/2$ lorsque $y \rightarrow -\infty$.

PARTIE C : Une application en probabilité

9. Une fonction de répartition est croissante et prend ses valeurs dans $[0, 1]$. Pour $x > 0$ et $t \in [0, x]$, $0 \leq F(t) \leq F(x)$, donc :

$$0 \leq \int_0^x tF(t) dt \leq F(x) \frac{x^2}{2}.$$

Après multiplication par $2/x^2$, on obtient $0 \leq G(x) \leq F(x)$.

Pour $x < 0$, écrivons $G(x) = \frac{2}{x^2} \int_x^0 (-t)F(t) dt$. Sur $[x, 0]$, $-t \geq 0$ et $F(t) \geq F(x) \geq 0$. Il vient :

$$\int_x^0 (-t)F(t) dt \geq F(x) \int_x^0 (-t) dt = F(x) \frac{x^2}{2}.$$

Ainsi $0 \leq F(x) \leq G(x)$ pour $x < 0$. Le renversement des bornes est indispensable pour conserver le bon sens d'inégalité.

10. La fonction de répartition d'une variable à densité est continue sur $\mathbb{R}$. Les hypothèses de la partie B sont donc satisfaites avec $f = F$. D'après 6., $G = 2\Phi(F)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur chaque demi-axe ouvert et :

$$G'(x) = \frac{2}{x}(F(x) - G(x)), \quad x \neq 0.$$

La question 6. garantit aussi la continuité de G en 0.

11. Pour montrer que g est une densité, vérifions sa régularité, son signe et son intégrale. Elle est continue sur chaque demi-axe ouvert et sa valeur est définie en 0; elle est donc continue sauf éventuellement en ce point. Pour $x > 0$, 9. donne $F(x) - G(x) \geq 0$, donc $G'(x) \geq 0$. Pour $x < 0$, $F(x) - G(x) \leq 0$ et $2/x < 0$, donc encore $G'(x) \geq 0$. En 0, $g(0) = 0$. Ainsi $g \geq 0$.

Comme $F(x) \rightarrow 0$ en $-\infty$ et $F(x) \rightarrow 1$ en $+\infty$, les questions 8.a et 8.b donnent :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} G(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 1.$$

Pour $A < 0 < B$ et $0 < \varepsilon < \min(-A, B)$, le théorème fondamental sur les segments évitant 0 donne :

$$\int_A^{-\varepsilon} g(x) dx = G(-\varepsilon) - G(A), \quad \int_{\varepsilon}^B g(x) dx = G(B) - G(\varepsilon).$$

Par continuité de G en 0, les intégrales impropres aux abords de 0 convergent. En faisant ensuite tendre A vers $-\infty$ et B vers $+\infty$, on obtient :

$$\int_{-\infty}^0 g(x) dx = G(0), \quad \int_0^{+\infty} g(x) dx = 1 - G(0).$$

L'intégrale totale est donc 1. Ainsi g est une densité de probabilité et définit une loi, que l'on réalise par une variable V .

Pour $x < 0$, les mêmes calculs donnent $\int_{-\infty}^x g(t) dt = G(x)$. Pour $x = 0$, l'intégrale vaut $G(0)$. Pour $x > 0$, elle vaut $G(0) + G(x) - G(0) = G(x)$. Donc G est bien la fonction de

répartition de V .

12.a. La fonction h_1 est positive ou nulle et continue sur $\mathbb{R}$, car $2xe^{-x^2} \rightarrow 0$ en 0^+ . Pour $R > 0$:

$$\int_0^R 2xe^{-x^2} dx = [-e^{-x^2}]_0^R = 1 - e^{-R^2}.$$

La limite lorsque $R \rightarrow +\infty$ vaut 1. Comme h_1 est nulle sur le demi-axe négatif, son intégrale totale vaut 1 : c'est une densité.

12.b. Méthode 1 — Intégration par parties et intégrale gaussienne.

La variable X_1 est positive presque sûrement. L'existence de son espérance équivaut ici à la convergence de $\int_0^{+\infty} 2x^2 e^{-x^2} dx$. Sur le segment $[0, R]$, une intégration par parties avec $u(x) = x$ et $v'(x) = 2xe^{-x^2}$ donne :

$$\int_0^R 2x^2 e^{-x^2} dx = -Re^{-R^2} + \int_0^R e^{-x^2} dx.$$

Par croissance comparée, $Re^{-R^2} \rightarrow 0$. Pour calculer la seconde intégrale, on utilise la normalisation de la densité de la loi normale centrée réduite et sa parité :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2/2} dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}.$$

Le changement de variable affine $t = \sqrt{2}x$ donne $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2$. L'intégrale du moment converge donc et $E(X_1) = \sqrt{\pi}/2$.

Méthode 2 — Utilisation du second moment normal.

Soit T de loi normale centrée réduite. La relation $E(T^2) = 1$ et le théorème de transfert donnent une intégrale convergente :

$$1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2/2} dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2/2} dt.$$

La seconde égalité utilise la parité de l'intégrande. Avec le changement de variable affine $t = \sqrt{2}x$, cette expression devient :

$$1 = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx.$$

L'intégrale du moment de X_1 est donc convergente et vaut $\int_0^{+\infty} 2x^2 e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2$.

Cela prouve l'existence et la valeur de son espérance.

La première méthode calcule le moment par une primitive ; la seconde identifie une intégrale à un moment normal connu.

12.c. On calcule d'abord H_1 . Pour $x \leq 0$, $H_1(x) = 0$. Pour $x > 0$, 12.a donne $H_1(x) = 1 - e^{-x^2}$. Si $x < 0$, l'intégrande définissant $\Phi(H_1)(x)$ est nul entre x et 0, donc $H_2(x) = 0$; en 0, $H_2(0) = H_1(0) = 0$.

Pour $x > 0$:

$$\int_0^x t H_1(t) dt = \int_0^x t dt - \int_0^x t e^{-t^2} dt = \frac{x^2}{2} - \frac{1 - e^{-x^2}}{2}.$$

Ainsi $H_2(x) = 1 - (1 - e^{-x^2})/x^2$, ce qui prouve la formule demandée.

La question 11. s'applique à H_1 , fonction de répartition d'une variable à densité. Une densité de X_2 est donc donnée par $h_2 = H_2'$ hors de 0, avec par exemple $h_2(0) = 0$. En

dérivant pour $x > 0$:

$$h_2(x) = \frac{2}{x^3}(1 - (1 + x^2)e^{-x^2}).$$

Pour $x \leq 0$, on choisit $h_2(x) = 0$. La positivité est également visible dans $e^{x^2} \geq 1 + x^2$, inégalité donnée par la convexité de l'exponentielle et sa tangente en 0.

Pour justifier l'espérance, on ne divise pas par une expression tendant vers 0 sans contrôle. Sur $[0, 1]$, $0 \leq xh_2(x) \leq h_2(x)$, dont l'intégrale est finie puisque h_2 est une densité. Pour $x \geq 1$, la formule et la positivité donnent :

$$0 \leq xh_2(x) \leq \frac{2}{x^2}.$$

L'intégrale de $2/x^2$ sur $[1, +\infty[$ converge. Ainsi $\int_0^{+\infty} xh_2(x) dx$ converge, et X_2 admet une espérance finie. Conformément à la consigne, on ne la calcule pas.

PARTIE D : Étude d'un espace vectoriel et d'un produit scalaire

Les arguments de continuité et de dérivation de la partie B valent sur $\mathbb{R}_+$ en ne conservant que la limite à droite en 0. On pourrait aussi prolonger f continûment sur le demi-axe négatif par la constante $f(0)$: les valeurs de $\Phi(f)$ sur $\mathbb{R}_+$ restent alors inchangées.

13.a. Pour tous réels x, y , le carré $(|x| - |y|)^2$ est positif ou nul. En le développant :

$$x^2 + y^2 - 2|xy| \geq 0.$$

Donc $|xy| \leq (x^2 + y^2)/2$, avec égalité exactement lorsque $|x| = |y|$.

13.b. Pour tout $x \geq 0$, 13.a donne :

$$|f(x)g(x)| \leq \frac{1}{2}(f(x)^2 + g(x)^2).$$

Le membre droit a une intégrale convergente sur $[0, +\infty[$ puisque $f, g \in E_2$. Le produit est continu. Par comparaison d'intégrales de fonctions positives, $\int_0^{+\infty} |f(x)g(x)| dx$ converge. L'intégrale du produit est donc absolument convergente.

- 14.** La fonction nulle appartient à E_2 . Si $f, g \in E_2$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda f + \mu g$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. De plus :

$$(\lambda f + \mu g)^2 = \lambda^2 f^2 + 2\lambda\mu fg + \mu^2 g^2.$$

Les trois termes ont des intégrales convergentes, celui du milieu absolument d'après 13.b. La linéarité des intégrales convergentes assure donc la convergence de l'intégrale du carré. Ainsi $\lambda f + \mu g \in E_2$. L'ensemble E_2 est un sous-espace vectoriel de E .

- 15.** L'application est bien définie par 13.b. La symétrie suit de $fg = gf$. La linéarité de l'intégrale, justifiée par la convergence absolue des produits, donne la bilinéarité. Enfin :

$$\langle f, f \rangle = \int_0^{+\infty} f(x)^2 dx \geq 0.$$

Si cette intégrale est nulle, montrons que f est identiquement nulle. Si $f(x_0) \neq 0$ pour un $x_0 \geq 0$, la continuité donne un intervalle de longueur strictement positive dans $\mathbb{R}_+$ sur lequel $|f(x)| \geq |f(x_0)|/2$. Ceci reste vrai sur un intervalle à droite si $x_0 = 0$. L'intégrale de f^2 sur cet intervalle serait strictement positive, contradiction. Donc $\langle f, f \rangle = 0$ implique $f = 0$.

On a bien un produit scalaire, avec $\|f\| = (\int_0^{+\infty} f(x)^2 dx)^{1/2}$. On n'utilise aucun résultat exigeant que E_2 soit de dimension finie.

16.a. La question 5.c donne $h(x)/x^2 \rightarrow f(0)/2$ lorsque $x \rightarrow 0^+$. Par continuité de la fonction carré :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{h(x)^2}{x^4} = \frac{f(0)^2}{4}.$$

Comme $h(x)^2/x^3 = x(h(x)/x^2)^2$, la seconde limite vaut 0.

16.b. Posons $p = \Phi(f)$, continue sur $\mathbb{R}_+$, et fixons $X > 0$. Pour $0 < \varepsilon < X$, l'intégration par parties est menée uniquement sur $[\varepsilon, X]$. On choisit $u = h^2$ et $v' = x^{-4}$, donc $u' = 2hh' = 2hxf$ et $v = -1/(3x^3)$. Il vient :

$$\int_{\varepsilon}^X \frac{h(x)^2}{x^4} dx = -\frac{h(X)^2}{3X^3} + \frac{h(\varepsilon)^2}{3\varepsilon^3} + \frac{2}{3} \int_{\varepsilon}^X \frac{h(x)f(x)}{x^2} dx.$$

Par 16.a, le terme de bord en ε tend vers 0. L'intégrande de gauche est $p(x)^2$ pour $x > 0$ et possède une limite finie en 0. Celui de droite est $f(x)p(x)$, continu après prolongement en 0. Les deux intégrales convergent donc près de 0. En passant à la limite :

$$\int_0^X p(x)^2 dx = -\frac{h(X)^2}{3X^3} + \frac{2}{3} \int_0^X f(x)p(x) dx.$$

Cette identité est celle demandée.

16.c. Méthode 1 — Positivité d'un polynôme du second degré.

Notons $A = \int_0^X f(x)^2 dx$, $B = \int_0^X p(x)^2 dx$ et $C = \int_0^X f(x)p(x) dx$. Ce sont des intégrales de fonctions continues sur un segment ; elles sont finies et $A, B \geq 0$. Le polynôme demandé est :

$$q(\lambda) = A\lambda^2 + 2C\lambda + B \geq 0 \quad \text{pour tout } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Si $A = 0$, la continuité de f implique $f = 0$ sur $[0, X]$, donc $C = 0$ et l'inégalité est vraie.

Si $A > 0$, évaluons en $\lambda = -C/A$:

$$0 \leq q(-C/A) = B - \frac{C^2}{A}.$$

Donc $C^2 \leq AB$, puis $C \leq |C| \leq \sqrt{AB}$, ce qui donne l'inégalité demandée.

Méthode 2 — Normalisation et comparaison de carrés.

Si $A = 0$ ou $B = 0$, l'une des fonctions est nulle sur le segment et $C = 0$. Si $A, B > 0$, posons $F_0 = f/\sqrt{A}$ et $P_0 = p/\sqrt{B}$. Leurs carrés ont chacun une intégrale égale à 1.

Alors :

$$0 \leq \int_0^X (F_0 - P_0)^2 dx = 2 - \frac{2C}{\sqrt{AB}}.$$

Donc $C \leq \sqrt{AB}$. L'utilisation du carré $(F_0 + P_0)^2$ donne aussi $C \geq -\sqrt{AB}$.

La première méthode respecte l'indication de l'énoncé ; la seconde montre que l'inégalité compare deux fonctions ramenées à une norme égale à 1.

16.d. Avec les notations de 16.c, 16.b et le signe du terme de bord donnent :

$$B \leq \frac{2}{3}C \leq \frac{2}{3}\sqrt{AB}.$$

Si $B = 0$, l'inégalité demandée est vraie. Si $B > 0$, on peut diviser par $\sqrt{B}$:

$\sqrt{B} \leq \frac{2}{3}\sqrt{A}$. Ceci établit le résultat pour tout $X > 0$, sans division par une quantité potentiellement nulle.

16.e. La fonction p est continue sur $\mathbb{R}_+$. La fonction $X \mapsto \int_0^X p(x)^2 dx$ est croissante puisque l'intégrande est positif ou nul. En élevant au carré l'inégalité de 16.d :

$$0 \leq \int_0^X p(x)^2 dx \leq \frac{4}{9} \int_0^X f(x)^2 dx \leq \frac{4}{9} \|f\|^2.$$

Elle est donc majorée et possède une limite finie. Cela prouve $p \in E_2$, puis, en passant à la limite et en prenant la racine carrée, $\|p\| \leq \frac{2}{3} \|f\|$.

16.f. Puisque $h(X) = X^2 p(X)$, 16.b se réécrit :

$$Xp(X)^2 = 2 \int_0^X f(x)p(x) dx - 3 \int_0^X p(x)^2 dx.$$

D'après 16.e, $f, p \in E_2$; la première intégrale converge absolument par 13.b, et la seconde converge par définition de E_2 . Le membre droit possède donc une limite finie, notée L . Comme le membre gauche est positif ou nul, $L \geq 0$.

Raisonnons par l'absurde comme demandé. Si $L > 0$, il existe $R > 0$ tel que, pour tout $X \geq R$, $Xp(X)^2 \geq L/2$, donc $p(X)^2 \geq L/(2X)$. Or l'intégrale de $1/X$ sur $[R, +\infty[$ diverge. Par comparaison, celle de p^2 divergerait aussi, ce qui contredit $p \in E_2$. Donc $L = 0$.

Ainsi $X(\Phi(f)(X))^2 \rightarrow 0$ en $+\infty$.

16.g. Dans l'égalité de 16.b, le terme $-h(X)^2/(3X^3) = -Xp(X)^2/3$ tend vers 0 par 16.f. Les deux intégrales convergent, comme vérifié précédemment. Le passage à la limite donne :

$$\|p\|^2 = \frac{2}{3} \int_0^{+\infty} f(x)p(x) dx = \frac{2}{3} \langle p, f \rangle.$$

C'est l'identité demandée pour $p = \Phi(f)$.

PARTIE E : Étude d'une suite

Dans cette partie, « positive » est compris au sens $u_n \geq 0$. Les arguments restent valables si tous les termes sont strictement positifs.

17. Code adapté en Python. Question adaptée au programme actuel.

On calcule la somme pondérée par une boucle finie. La fonction `suite_u` est celle dont l'énoncé suppose la disponibilité ; aucun `import` n'est nécessaire pour définir `suite_v`.

Python

```
def suite_v(n):
    somme = 0.0
    for k in range(1, n + 1):
        somme = somme + k * suite_u(k)
    return somme / (n * (n + 1))
```

La variable `somme` est initialisée à zéro. Après le passage d'indice k , elle contient

$$\sum_{j=1}^k j u_j.$$

La borne supérieure de `range` étant exclue, `range(1, n + 1)` parcourt exactement les entiers de 1 à n . À la sortie de la boucle, on divise par $n(n + 1)$, strictement positif puisque $n \geq 1$. La valeur renvoyée est donc v_n , à la précision des calculs flottants près.

Le code a été exécuté avec les trois expressions exactes de la figure et avec la suite de contrôle $u_n = 1/n$, pour laquelle la formule exacte donne $v_n = 1/(n + 1)$. Les résultats calculés concordent avec les formules. Cette vérification numérique complète la justification de la boucle ; elle ne remplace pas la preuve.

18.a. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0. Le théorème de convergence des suites monotones donne l'existence d'une limite finie $\ell \geq 0$.

18.b. Question adaptée au programme actuel. Rectification locale de la légende du quatrième graphique.

Les graphes suggèrent que (v_n) est décroissante, converge et possède une limite égale à la moitié de celle de (u_n) . Pour les trois premières expressions exactes, les limites conjecturées sont :

Exemple	Limite de (u_n)	Limite conjecturée de (v_n)
$u_n = e^{1/n^2}$	1	1/2
$u_n = e^{-n}$	0	0
$u_n = (6n + 1)/(3n - 1)$	2	1

Le quatrième graphique suggère des limites 4 et 2, sans permettre de les démontrer à partir des seuls termes visibles. La formule imprimée dans le PDF, $u_n = 4 + 5(0,9)^n$, ne correspond pas aux points : elle donnerait $u_1 = 8,5$ et $v_1 = 4,25$, tandis que les premiers points représentés sont proches de 5 et 2,5. La version adaptée conserve le nuage mesuré et remplace cette légende contradictoire par «Quatrième exemple». Aucune nouvelle formule n'est attribuée à cette suite.

Les quatre panneaux sont regroupés dans un SVG intégré au sujet. Chacun contient dix croix et dix cercles avec une croix, dans la disposition originale. Les trois premiers sont calculés à partir des expressions exactes et de la définition de v_n , puis comparés au graphique. Pour le quatrième, les centres des marqueurs sont mesurés après calibration des axes. Ses valeurs lues, approximatives à environ 0,02 près, sont :

n	u_n lu	v_n lu
1	5,00	2,50
2	4,32	2,27
3	4,14	2,16
4	4,07	2,11
5	4,04	2,08
6	4,02	2,06

n	u_n	v_n
7	4,01	2,04
8	4,00	2,03
9	4,00	2,02
10	4,00	2,02

La conjecture générale sera démontrée en 18.e; un graphique ne constitue pas une preuve de convergence.

18.c. Pour $1 \leq k \leq n$, la décroissance donne $u_k \geq u_n$. Puisque les poids k sont positifs :

$$v_n \geq \frac{u_n}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n k = \frac{u_n}{2}.$$

Pour la seconde inégalité, séparons la somme à l'indice n . Pour $n+1 \leq k \leq 2n$, on a $u_k \leq u_{n+1}$, donc :

$$\sum_{k=1}^{2n} k u_k \leq n(n+1) v_n + u_{n+1} \sum_{k=n+1}^{2n} k.$$

La somme arithmétique vaut :

$$\sum_{k=n+1}^{2n} k = \frac{2n(2n+1) - n(n+1)}{2} = \frac{n(3n+1)}{2}.$$

En divisant par $2n(2n+1)$, on obtient exactement :

$$v_{2n} \leq \frac{n+1}{2(2n+1)} v_n + \frac{3n+1}{4(2n+1)} u_{n+1}.$$

18.d. Cette relation n'exige pas la décroissance. Par définition :

$$(n+1)(n+2)v_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} ku_k = n(n+1)v_n + (n+1)u_{n+1}.$$

Après division par $n+1 > 0$, on obtient $(n+2)v_{n+1} = nv_n + u_{n+1}$. En retranchant nv_{n+1} , il vient :

$$n(v_{n+1} - v_n) = u_{n+1} - 2v_{n+1}.$$

Comme $n \geq 1$, la seconde égalité demandée s'ensuit.

18.e. Méthode 1 — Monotonie et comparaison des indices n et $2n$.

Par 18.c appliquée à l'indice $n+1$, $2v_{n+1} \geq u_{n+1}$. La relation de 18.d donne donc $v_{n+1} - v_n \leq 0$. La suite (v_n) est décroissante. Elle est positive ou nulle, donc converge vers une limite $L \geq 0$.

L'inégalité $v_n \geq u_n/2$ donne $L \geq \ell/2$ par passage à la limite. Comme (v_n) converge, sa sous-suite (v_{2n}) a la même limite. La seconde inégalité de 18.c donne, en passant à la limite dans chacun de ses termes :

$$L \leq \frac{1}{4}L + \frac{3}{8}\ell.$$

Ainsi $3L/4 \leq 3\ell/8$, soit $L \leq \ell/2$. Avec la minoration précédente, $L = \ell/2$. Toutes les conjectures générales de 18.b sont démontrées.

Méthode 2 — Séparation des premiers termes et de la fin de la somme.

La monotonie se prouve encore par 18.c et 18.d. Pour la limite, la somme des poids donne l'identité :

$$v_n - \frac{\ell}{2} = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n k(u_k - \ell).$$

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $u_k \rightarrow \ell$, il existe $K \geq 1$ tel que $|u_k - \ell| \leq \varepsilon$ pour $k \geq K$. Posons

$$C_K = \sum_{k=1}^{K-1} k|u_k - \ell|,$$

somme finie indépendante de n . Pour $n \geq K$:

$$\left| v_n - \frac{\ell}{2} \right| \leq \frac{C_K}{n(n+1)} + \frac{\varepsilon}{n(n+1)} \sum_{k=K}^n k \leq \frac{C_K}{n(n+1)} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Le premier terme tend vers 0. Pour tout seuil $\eta > 0$, choisir $\varepsilon = \eta$, puis n assez grand pour que le premier terme soit inférieur à $\eta/2$, donne un écart au plus η . Donc $v_n \rightarrow \ell/2$.

La première approche utilise spécifiquement la décroissance et les questions précédentes ; la seconde montre que la conclusion sur la limite reste vraie pour toute suite réelle convergente, même sans monotonie.

19.a. Méthode 1 — Identité télescopique.

La relation de 18.d, obtenue sans hypothèse de monotonie, donne pour $n \geq 2$:

$$u_n = (n+1)v_n - (n-1)v_{n-1}.$$

Pour $n = 1$, la définition donne $u_1 = 2v_1$. En sommant, les coefficients des termes intermédiaires se simplifient :

$$\sum_{n=1}^N u_n = \sum_{n=1}^N v_n + Nv_N.$$

Pour $N = 1$, cette égalité est aussi $u_1 = 2v_1$. On obtient donc l'identité demandée pour tout $N \geq 1$.

Méthode 2 — Permutation d'une somme double finie.

Toutes les sommes suivantes sont finies, leur ordre peut donc être changé :

$$\sum_{n=1}^N v_n = \sum_{k=1}^N k u_k \sum_{n=k}^N \frac{1}{n(n+1)}.$$

L'identité $1/(n(n+1)) = 1/n - 1/(n+1)$ donne :

$$\sum_{n=k}^N \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{N+1}.$$

Ainsi :

$$\sum_{n=1}^N v_n = \sum_{k=1}^N u_k - \frac{1}{N+1} \sum_{k=1}^N k u_k = \sum_{k=1}^N u_k - N v_N.$$

La première méthode exploite la récurrence ; la seconde révèle la structure télescopique des poids et n'effectue aucun échange de sommes infinies.

19.b. Les termes v_n sont positifs ou nuls. Par 19.a et $N v_N \geq 0$:

$$0 \leq \sum_{n=1}^N v_n \leq \sum_{n=1}^N u_n \leq S_u,$$

où

$$S_u = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

est fini par hypothèse. Les sommes partielles de la série de termes positifs v_n sont donc croissantes et majorées. La série converge ; notons sa somme S_v .

19.c. Méthode 1 — Existence d'une limite, puis contradiction.

D'après 19.a,

$$Nv_N = \sum_{n=1}^N u_n - \sum_{n=1}^N v_n.$$

Les deux sommes partielles convergent, donc $Nv_N \rightarrow L = S_u - S_v$, limite finie et positive ou nulle.

Si $L > 0$, il existe N_0 tel que pour $N \geq N_0$, $Nv_N \geq L/2$. Ainsi $v_N \geq L/(2N)$. Par comparaison à la série harmonique divergente, la série de termes positifs v_N divergerait, en contradiction avec 19.b. Donc $L = 0$.

Méthode 2 — Contrôle par le reste d'une série convergente.

La définition donne

$$Nv_N = \frac{1}{N+1} \sum_{k=1}^N ku_k.$$

Pour un entier fixé $K \geq 1$ et $N \geq K$:

$$0 \leq Nv_N \leq \frac{1}{N+1} \sum_{k=1}^{K-1} ku_k + \sum_{k=K}^N u_k.$$

En effet, $k/(N+1) \leq 1$. La convergence de la série positive permet, pour tout $\varepsilon > 0$, de choisir K tel que

$$\sum_{k=K}^{+\infty} u_k \leq \varepsilon.$$

Pour ce K fixé, le premier terme tend vers 0. On en déduit $Nv_N \rightarrow 0$.

La première méthode respecte le raisonnement par l'absurde demandé ; la seconde fournit une estimation directe sans utiliser la convergence de la série v_n .

19.d. On fait tendre N vers $+\infty$ dans 19.a. Les deux séries convergent par hypothèse et par 19.b, et $Nv_N \rightarrow 0$ par 19.c. Il vient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n.$$

20.a. Posons $u_k = P(Y = k)$. Puisque Y prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$, $u_k \geq 0$ et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = 1.$$

Les hypothèses de la question 19 sont donc satisfaites. Les nombres :

$$p_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n ku_k$$

sont positifs ou nuls et, par 19.d,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = 1.$$

Ils constituent une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$.

Pour rendre l'existence concrète, on peut prendre l'univers $\mathbb{N}^*$, donner à chaque entier n la probabilité p_n , et définir $Z(n) = n$. La variable ainsi construite a exactement la loi demandée. Il n'est pas nécessaire de la construire sur l'espace probabilisé initial de Y , que l'énoncé ne précise pas.

20.b. Puisque $Y \geq 1$ presque sûrement et admet une espérance, la série positive

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kP(Y = k)$$

converge vers $m = E(Y)$, avec $1 \leq m < +\infty$. Alors :

$$\frac{P(Z = n)}{m/n^2} = \frac{n}{n+1} \frac{\sum_{k=1}^n kP(Y = k)}{m} \rightarrow 1.$$

Le dénominateur est non nul car $m \geq 1$. Donc $P(Z = n) \sim m/n^2$.

En multipliant par n , on obtient $nP(Z = n) \sim m/n$. Les termes sont positifs ou nuls, et la série harmonique diverge. Par comparaison par équivalence,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nP(Z = n)$$

diverge vers $+\infty$. Ainsi Z n'admet pas d'espérance finie, même lorsque Y en admet une.

Relevé des adaptations

- 17. Code adapté en Python : remplacement de la demande dans l'ancien langage par `def suite_u(n):` et `def suite_v(n):`, en conservant la somme pondérée et les indices. Les calculs Python ont été exécutés.

- 18.b. Adaptation des références aux fonctions informatiques à Python. La figure est retranscrite en SVG dans l'énoncé à partir de l'original, avec les valeurs mesurées pour le quatrième panneau et les valeurs exactes, contrôlées sur l'original, pour les trois autres. La légende $u_n = 4 + 5(0,9)^n$ du quatrième panneau est remplacée par «Quatrième exemple», car elle contredit les points imprimés. Les vingt points de ce panneau sont conservés à la précision de lecture indiquée, sans inventer l'expression de la suite.