



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques 1

2015

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

PROBLÈME 1

Dans tout le problème, on confond polynôme et application polynomiale de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On note, pour tout k de $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}_k[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ formé des polynômes de degré inférieur ou égal à k .

On définit l'ensemble $E = \{P \in \mathbb{R}_4[X] ; P(0) = P(4) = 0\}$ et le polynôme $W = X(X - 4)$.

Partie I : Étude d'endomorphismes

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_4[X]$.

Pour tout polynôme Q de $\mathbb{R}_2[X]$, on note $\phi(Q) = WQ$.

2. Montrer que l'application $\phi : Q \mapsto WQ$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ sur E .

3. En déduire une base de E et la dimension de E .

Pour tout polynôme Q de $\mathbb{R}_2[X]$, on considère le polynôme $\Delta(Q)$ défini par :

$$\Delta(Q) = Q(X + 1) - Q(X).$$

Ainsi, par exemple, si $Q = X^2 - 3X + 5$, alors

$$\Delta(Q) = ((X + 1)^2 - 3(X + 1) + 5) - (X^2 - 3X + 5) = 2X - 2.$$

4. a. Montrer que l'application Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

4. b. Déterminer, pour tout polynôme Q de $\mathbb{R}_2[X]$, le degré de $\Delta(Q)$ en fonction du degré de Q .

4. c. Déterminer le noyau et l'image de Δ .

4. d. Établir : $\Delta \circ \Delta \circ \Delta = 0$.

On définit l'endomorphisme f de E suivant : $f = \phi \circ \Delta \circ \phi^{-1}$, où ϕ^{-1} désigne l'application réciproque de l'application ϕ .

5. a. Montrer : $f \circ f \circ f = 0$.

5. b. Déterminer une base du noyau de f et une base de l'image de f .

5. c. Démontrer que f admet une valeur propre et une seule et déterminer celle-ci. Donner une base et la dimension du sous-espace propre pour f associé à cette valeur propre.

5. d. Est-ce que f est diagonalisable ?

Partie II : Étude d'un produit scalaire

On considère l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de $\mathbb{R}_4[X] \times \mathbb{R}_4[X]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (P_1, P_2) \in \mathbb{R}_4[X] \times \mathbb{R}_4[X], \quad \langle P_1, P_2 \rangle = \sum_{k=0}^4 P_1(k)P_2(k).$$

6. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_4[X]$.

On munit dorénavant $\mathbb{R}_4[X]$ de ce produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme associée $\| \cdot \|$.

On considère les trois polynômes suivants :

$$L_1 = (X - 2)(X - 3), \quad L_2 = (X - 1)(X - 3), \quad L_3 = (X - 1)(X - 2).$$

7. Montrer que la famille (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

8. a. Exprimer, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_2[X]$, les coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3) en fonction de $P(1), P(2), P(3)$.

8. b. Exprimer $\Delta(L_1), \Delta(L_2), \Delta(L_3)$ sur la base (L_1, L_2, L_3) de $\mathbb{R}_2[X]$ et en déduire que la matrice de l'endomorphisme Δ dans la base (L_1, L_2, L_3) de $\mathbb{R}_2[X]$ est

$$\begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & \frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}.$$

On note, pour tout i de $\{1, 2, 3\}$, $M_i = WL_i$.

9. a. Montrer que, pour tout i de $\{1, 2, 3\}$, $M_i(i)$ est non nul.

On note alors, pour tout i de $\{1, 2, 3\}$, $N_i = \frac{1}{M_i(i)} M_i$.

9. b. Montrer que (N_1, N_2, N_3) est une base orthonormée du sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}_4[X]$.

10. Déterminer la matrice de l'application linéaire ϕ dans les bases (L_1, L_2, L_3) de $\mathbb{R}_2[X]$ et (N_1, N_2, N_3) de E .

11. Déterminer la matrice de l'endomorphisme f dans la base (N_1, N_2, N_3) de E .

12. On note, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_4[X]$:

$$u(P) = \sum_{i=1}^3 P(i) N_i.$$

12. a. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_4[X]$.

12. b. Montrer : $\forall P \in \mathbb{R}_4[X], \forall j \in \{1, 2, 3\}, \langle P - u(P), N_j \rangle = 0.$

12. c. En déduire que u est la projection orthogonale sur E .

12. d. Déterminer le projeté orthogonal de $Q = X^2(X - 2)(X - 3)$ sur E .

PROBLÈME 2

Dans tout le problème, on note E l'ensemble des fonctions $u : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continues sur $\mathbb{R}_+$ vérifiant :

Il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{u(t)}{t^p} = 0$.

On remarquera que l'entier p dépend a priori de la fonction u considérée.

Partie I : Définition de la transformée de Laplace

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

2. Soit u un élément de E .

Montrer, pour tout $x \in]0, +\infty[$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 u(t) e^{-xt} = 0.$$

En déduire que, pour tout $x \in]0, +\infty[$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} u(t) e^{-xt} dt$ est convergente.

Dans toute la suite du problème, pour tout élément u de E , on définit la fonction $L(u)$ sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad L(u)(x) = \int_0^{+\infty} u(t) e^{-xt} dt.$$

3. Montrer, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et pour tout $(u, v) \in E^2$:

$$L(\alpha u + v) = \alpha L(u) + L(v).$$

Partie II : Quelques exemples

4. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ fixé. On considère, pour tout i de $\{0, 1, 2\}$, la fonction $v_i : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad v_i(t) = t^i e^{-at}.$$

Pour tout i de $\{0, 1, 2\}$, montrer que la fonction v_i appartient à E et, en utilisant par exemple des résultats sur la loi exponentielle, calculer, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $L(v_i)(x)$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On considère la fonction $w_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad w_n(t) = t^n.$$

Montrer que la fonction w_n appartient à E et montrer, pour tout $x \in]0, +\infty[$:

$$L(w_n)(x) = \frac{n!}{x^{n+1}}.$$

Partie III : Propriétés des transformées de Laplace

6. Limite de $L(u)$ en $+\infty$

Soit u un élément de E . Justifier qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ et $A, M \in \mathbb{R}_+$ tels que :

$$\forall t \in [A, +\infty[, \quad |u(t)| \leq t^p \quad \text{et} \quad \forall t \in [0, A], \quad |u(t)| \leq M.$$

Établir : $\forall t \in \mathbb{R}_+, |u(t)| \leq M + t^p$. En déduire :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} L(u)(x) = 0.$$

7. Limite de $L(u)$ en 0

Soit u un élément de E tel que l'intégrale $\int_0^{+\infty} u(s) ds$ converge.

On note, pour tout t de $\mathbb{R}_+$, $R(t) = \int_t^{+\infty} u(s) ds$.

7. a. Déterminer la limite en $+\infty$ de R . Montrer que R appartient à E .
7. b. Montrer que R est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et : $\forall t \in \mathbb{R}_+, R'(t) = -u(t)$.
7. c. En déduire : $\forall x \in]0, +\infty[, L(u)(x) = R(0) - xL(R)(x)$.
7. d. Soit $\varepsilon \in]0, +\infty[$. Justifier qu'il existe $B \in [0, +\infty[$ tel que :
 $\forall t \in [B, +\infty[, |R(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$

En déduire :

$$\forall x \in]0, +\infty[, |L(u)(x) - R(0)| \leq x \int_0^B |R(t)| dt + \frac{\varepsilon}{2}.$$

7. e. Conclure :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} L(u)(x) = \int_0^{+\infty} u(t) dt.$$

8. Transformée de Laplace d'une dérivée

Soit $u : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ telle que $u' \in E$.

8. a. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ et $A \in [0, +\infty[$ tels que :

$$\forall t \in [A, +\infty[, |u(t)| \leq |u(A)| + \frac{t^{p+1}}{p+1}.$$

8. b. En déduire que u appartient à E .

8. c. Établir : $\forall x \in]0, +\infty[, L(u')(x) = -u(0) + xL(u)(x)$.

9. Dérivée puis dérivée n -ième d'une transformée de Laplace

Soit u un élément de E . On considère, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la fonction $u_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad u_n(t) = t^n u(t).$$

9. a. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la fonction u_n appartient à E .

9. b. Montrer : $\forall a \in \mathbb{R}, |e^a - 1 - a| \leq \frac{a^2}{2} e^{|a|}$.

9. c. Soient $x \in]0, +\infty[$ et $h \in \mathbb{R}^*$ tels que $|h| \leq \frac{x}{2}$.

Montrer :

$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad \left| \frac{e^{-(x+h)t} - e^{-xt}}{h} + te^{-xt} \right| \leq |h| \frac{t^2}{2} e^{-xt/2}.$$

En déduire :

$$\left| \frac{L(u)(x+h) - L(u)(x)}{h} + L(u_1)(x) \right| \leq \frac{|h|}{2} \int_0^{+\infty} t^2 |u(t)| e^{-xt/2} dt.$$

9. d. Montrer que $L(u)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et exprimer $(L(u))'$ à l'aide de $L(u_1)$.

9. e. Montrer que $L(u)$ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ et exprimer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $(L(u))^{(n)}$ à l'aide de $L(u_n)$.

Partie IV : Application à la résolution d'une équation fonctionnelle

Dans cette partie, on cherche à déterminer une fonction $u : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$ vérifiant :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad u''(t) + 5u'(t) + 6u(t) = e^{-t} \quad \text{et} \quad u(0) = 1 \quad \text{et} \quad u'(0) = -2.$$

10. On suppose qu'il existe une fonction $u : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$, solution du problème et telle que $u'' \in E$.

10. a. Montrer que u appartient à E et :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad L(u'')(x) = -xu(0) - u'(0) + x^2L(u)(x).$$

10. b. En déduire :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad (x^2 + 5x + 6)L(u)(x) = \frac{1}{x+1} + 3 + x,$$

puis :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad L(u)(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{x+3}.$$

11. En déduire une fonction $u : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ solution du problème posé.