



**PRÉPASIMPLE**

prepasimple.fr

---

**EM Lyon**

**Mathématiques 1**

**2015**

*Corrigé de mathématiques approfondies*

---

**Mathématiques approfondies — Prépa ECG**

*Annales de concours · Corrigé*

## PROBLÈME 1

---

### Partie I : Étude d'endomorphismes

---

#### 1. Méthode 1 — Stabilité par combinaison linéaire

Le polynôme nul appartient à  $E$ . Si  $P, Q \in E$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , alors  $\alpha P + \beta Q \in \mathbb{R}_4[X]$  et

$$(\alpha P + \beta Q)(0) = \alpha P(0) + \beta Q(0) = 0, \quad (\alpha P + \beta Q)(4) = \alpha P(4) + \beta Q(4) = 0.$$

Ainsi  $E$  est non vide et stable par combinaison linéaire : c'est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}_4[X]$ .

#### Méthode 2 — Noyau d'une application linéaire

---

Définissons  $T : \mathbb{R}_4[X] \rightarrow \mathbb{R}^2$  par  $T(P) = (P(0), P(4))$ . L'évaluation étant linéaire,  $T$  est linéaire et  $E = \text{Ker } T$ . Le noyau d'une application linéaire est un sous-espace vectoriel.

La première méthode vérifie directement la définition ; la seconde permet de reconnaître rapidement un espace défini par des conditions linéaires.

#### 2. Vérifions que $\phi$ est linéaire et bijective.

Si  $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ , alors  $WQ$  est de degré au plus 4 et s'annule en 0 et en 4 ; donc  $\phi(Q) \in E$ .

Pour tous  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  et  $Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}_2[X]$ ,

$$\phi(\alpha Q_1 + \beta Q_2) = W(\alpha Q_1 + \beta Q_2) = \alpha \phi(Q_1) + \beta \phi(Q_2).$$

Si  $\phi(Q) = 0$  et  $Q \neq 0$ , le produit  $WQ$  est non nul et de degré  $2 + \deg Q$ , ce qui contredit  $WQ = 0$ . Ainsi  $\text{Ker } \phi = \{0\}$  :  $\phi$  est injective.

Soit maintenant  $P \in E$ . Si  $P = 0$ , il est l'image de  $Q = 0$ . Sinon, puisque  $P(0) = 0$ , il existe un polynôme  $S$  tel que  $P = XS$ . L'égalité  $P(4) = 4S(4) = 0$  donne  $S(4) = 0$ , donc  $S = (X - 4)Q$ . Ainsi  $P = WQ$  et  $\deg Q = \deg P - 2 \leq 2$ . Cela prouve la surjectivité.

Par conséquent,  $\phi$  est un isomorphisme de  $\mathbb{R}_2[X]$  sur  $E$ .

**3.** Un isomorphisme transforme une base en une base. L'image de la base  $(1, X, X^2)$  de  $\mathbb{R}_2[X]$  est donc

$$(W, XW, X^2W) = (X^2 - 4X, X^3 - 4X^2, X^4 - 4X^3).$$

C'est une base de  $E$ , d'où  $\dim E = 3$ .

**4. a.** Écrivons  $Q = aX^2 + bX + c$ , avec  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Alors

$$\Delta(Q) = a((X + 1)^2 - X^2) + b((X + 1) - X) = 2aX + a + b.$$

Ainsi  $\Delta(Q) \in \mathbb{R}_1[X] \subset \mathbb{R}_2[X]$ . De plus, pour tous polynômes  $Q_1, Q_2$  et tous réels  $\alpha, \beta$ ,

$$\Delta(\alpha Q_1 + \beta Q_2) = \alpha \Delta(Q_1) + \beta \Delta(Q_2).$$

L'application  $\Delta$  est donc un endomorphisme de  $\mathbb{R}_2[X]$ .

**4. b.** La formule précédente distingue tous les cas.

Si  $\deg Q = 2$ , alors  $a \neq 0$ , donc  $\deg \Delta(Q) = 1$ .

Si  $\deg Q = 1$ , alors  $a = 0$  et  $b \neq 0$ , donc  $\Delta(Q) = b$  et  $\deg \Delta(Q) = 0$ .

Si  $Q$  est constant, y compris le polynôme nul, alors  $\Delta(Q) = 0$ . Le polynôme nul n'a pas de degré fini ; avec la convention  $\deg 0 = -\infty$ , son degré est  $-\infty$ .

Ainsi  $\deg \Delta(Q) = \deg Q - 1$  pour tout polynôme non constant de  $\mathbb{R}_2[X]$  ; les constantes sont envoyées sur le polynôme nul.

**4. c.** Méthode 1 — Résolution sur les coefficients

Pour  $Q = aX^2 + bX + c$ , on a

$$\Delta(Q) = 0 \iff 2a = 0 \text{ et } a + b = 0 \iff a = b = 0.$$

Donc  $\text{Ker } \Delta = \mathbb{R}_0[X] = \text{Vect}(1).$

Nous savons que  $\text{Im } \Delta \subset \mathbb{R}_1[X]$ . Réciproquement, pour  $A, B \in \mathbb{R}$ , choisissons

$$Q = \frac{A}{2}X^2 + \left(B - \frac{A}{2}\right)X.$$

Alors  $\Delta(Q) = AX + B$ . Tout polynôme de  $\mathbb{R}_1[X]$  possède donc un antécédent, et  $\text{Im } \Delta = \mathbb{R}_1[X] = \text{Vect}(1, X).$

## Méthode 2 — Degré puis théorème du rang

D'après 4. b, seuls les polynômes constants ont une image nulle, donc  $\dim \text{Ker } \Delta = 1$  et  $\text{Ker } \Delta = \mathbb{R}_0[X]$ . Le théorème du rang donne

$$\dim \text{Im } \Delta = 3 - 1 = 2.$$

Or  $\text{Im } \Delta \subset \mathbb{R}_1[X]$ , espace de dimension 2. Cette inclusion entre espaces de même dimension est une égalité.

La première approche construit les antécédents ; la seconde remplace cette construction par un argument de dimension.

4. d. Pour  $Q = aX^2 + bX + c$ , les images successives sont

$$\Delta(Q) = 2aX + a + b, \quad \Delta^2(Q) = 2a, \quad \Delta^3(Q) = 0.$$

Ces égalités étant valables pour tout  $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ , on obtient  $\Delta \circ \Delta \circ \Delta = 0$ .

5. a. En utilisant  $\phi^{-1} \circ \phi = \text{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}$ , on peut simplifier les compositions :

$$f^3 = (\phi \circ \Delta \circ \phi^{-1})^3 = \phi \circ \Delta^3 \circ \phi^{-1} = 0.$$

Ainsi  $f \circ f \circ f = 0$  sur  $E$ .

5. b. Tout  $P \in E$  s'écrit de manière unique  $P = \phi(Q)$  et vérifie  $f(P) = \phi(\Delta(Q))$ .

L'injectivité de  $\phi$  donne

$$f(P) = 0 \iff \Delta(Q) = 0.$$

Par conséquent,

$$\text{Ker } f = \phi(\text{Ker } \Delta) = \text{Vect}(W).$$

D'autre part, lorsque  $Q$  parcourt  $\mathbb{R}_2[X]$ ,  $\Delta(Q)$  parcourt  $\text{Im } \Delta$ . Ainsi

$$\text{Im } f = \phi(\text{Im } \Delta) = \text{Vect}(W, XW).$$

Les familles  $(W)$  et  $(W, XW)$  sont libres, car ce sont les images de familles libres par l'isomorphisme  $\phi$ . Elles fournissent les bases demandées.

5. c. Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$  une valeur propre de  $f$  et  $P \in E \setminus \{0\}$  un vecteur propre associé. Alors  $f(P) = \lambda P$ , donc  $f^3(P) = \lambda^3 P$ . La question 5. a donne  $\lambda^3 P = 0$ ; puisque  $P \neq 0$ ,  $\lambda = 0$ .

Réciproquement,  $W \neq 0$  et  $f(W) = \phi(\Delta(1)) = 0$ , donc 0 est effectivement une valeur propre.

Ainsi  $f$  possède exactement une valeur propre, 0. Son sous-espace propre est

$$E_0(f) = \text{Ker } f = \text{Vect}(W),$$

de base  $(W)$  et de dimension 1.

5. d. Méthode 1 — Dimension du sous-espace propre

La seule valeur propre est 0 et son sous-espace propre a dimension 1, alors que  $\dim E = 3$ . Il n'existe donc pas de base de  $E$  formée de vecteurs propres :  $f$  n'est pas diagonalisable.

## Méthode 2 — Conséquence d'une diagonalisation supposée

---

Si  $f$  était diagonalisable, sa matrice dans une base de vecteurs propres serait diagonale avec seulement des zéros sur la diagonale. Ce serait la matrice nulle, et  $f$  serait l'endomorphisme nul.

Mais  $f(XW) = \phi(\Delta(X)) = \phi(1) = W \neq 0$ . Cette contradiction prouve encore que  $f$  n'est pas diagonalisable.

La première méthode utilise le critère des dimensions ; la seconde montre plus généralement qu'un endomorphisme diagonalisable dont la seule valeur propre est 0 est nécessairement nul.

## Partie II : Étude d'un produit scalaire

---

### 6. La somme finie

$$\langle P_1, P_2 \rangle = \sum_{k=0}^4 P_1(k)P_2(k)$$

est bilinéaire, car chaque évaluation est linéaire. Elle est symétrique, car  $P_1(k)P_2(k) = P_2(k)P_1(k)$ .

De plus,

$$\langle P, P \rangle = \sum_{k=0}^4 P(k)^2 \geq 0.$$

Si  $\langle P, P \rangle = 0$ , tous les termes, positifs ou nuls, sont nuls. Donc  $P(0) = P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = 0$ . Un polynôme non nul de degré au plus 4 ne peut pas posséder cinq racines distinctes. Il s'ensuit que  $P = 0$ .

Ainsi l'application est bilinéaire, symétrique et définie positive : c'est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}_4[X]$ .

## 7. Méthode 1 — Évaluation aux racines

Les trois polynômes appartiennent à  $\mathbb{R}_2[X]$  et leurs valeurs en 1, 2, 3 sont :

| Polynôme | En 1 | En 2 | En 3 |
|----------|------|------|------|
| $L_1$    | 2    | 0    | 0    |
| $L_2$    | 0    | -1   | 0    |
| $L_3$    | 0    | 0    | 2    |

Supposons  $\alpha L_1 + \beta L_2 + \gamma L_3 = 0$ . En évaluant successivement en 1, 2, 3, on obtient  $2\alpha = 0$ ,  $-\beta = 0$ ,  $2\gamma = 0$ . Ainsi les trois coefficients sont nuls, donc la famille est libre. Elle contient trois éléments dans un espace de dimension 3 : c'est une base.

## Méthode 2 — Comparaison des coefficients

Les développements sont

$$L_1 = X^2 - 5X + 6, \quad L_2 = X^2 - 4X + 3, \quad L_3 = X^2 - 3X + 2.$$

Une combinaison linéaire nulle conduit au système

$$\alpha + \beta + \gamma = 0, \quad -5\alpha - 4\beta - 3\gamma = 0, \quad 6\alpha + 3\beta + 2\gamma = 0.$$

La première équation donne  $\gamma = -\alpha - \beta$ . Les deux autres deviennent  $-2\alpha - \beta = 0$  et  $4\alpha + \beta = 0$ . D'où  $\beta = -2\alpha$ , puis  $2\alpha = 0$  et finalement  $\alpha = \beta = \gamma = 0$ . La famille est libre, donc constitue une base.

L'évaluation exploite les racines et réduit les calculs ; la comparaison des coefficients s'applique aussi lorsque des points d'évaluation adaptés ne sont pas disponibles.

8. a. Écrivons  $P = \alpha L_1 + \beta L_2 + \gamma L_3$ . Le tableau de la question 7 donne

$$P(1) = 2\alpha, \quad P(2) = -\beta, \quad P(3) = 2\gamma.$$

Les coordonnées de  $P$  sont donc

$$[P]_{(L_1, L_2, L_3)} = \begin{pmatrix} \frac{P(1)}{2} \\ -P(2) \\ \frac{P(3)}{2} \end{pmatrix},$$

et l'on a l'identité d'interpolation

$$P = \frac{P(1)}{2} L_1 - P(2) L_2 + \frac{P(3)}{2} L_3.$$

8. b. Pour  $Q = X^2 + bX + c$ , la question 4. a donne  $\Delta(Q) = 2X + 1 + b$ . Ainsi

$$\Delta(L_1) = 2X - 4, \quad \Delta(L_2) = 2X - 3, \quad \Delta(L_3) = 2X - 2.$$

Leurs triplets de valeurs en 1, 2, 3 sont respectivement  $(-2, 0, 2)$ ,  $(-1, 1, 3)$  et  $(0, 2, 4)$ . En appliquant 8. a :

$$\Delta(L_1) = -L_1 + L_3,$$

$$\Delta(L_2) = -\frac{1}{2}L_1 - L_2 + \frac{3}{2}L_3,$$

$$\Delta(L_3) = -2L_2 + 2L_3.$$

La matrice d'un endomorphisme a pour colonnes les coordonnées des images des

vecteurs de base. On obtient donc

$$A = \text{Mat}_{(L_1, L_2, L_3)}(\Delta) = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & \frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}.$$

9. a. On a  $W(1) = -3$ ,  $W(2) = -4$ ,  $W(3) = -3$ . Avec les valeurs de  $L_i(i)$  :

$$M_1(1) = -3 \times 2 = -6, \quad M_2(2) = -4 \times (-1) = 4, \quad M_3(3) = -3 \times 2 = -6.$$

Ces trois nombres sont non nuls, ce qui justifie la définition des  $N_i$ .

En particulier,

$$\begin{aligned} N_1 &= -\frac{1}{6}W(X-2)(X-3), & N_2 &= \frac{1}{4}W(X-1)(X-3), & N_3 \\ &= -\frac{1}{6}W(X-1)(X-2). \end{aligned}$$

9. b. Les  $M_i = \phi(L_i)$  forment une base de  $E$ , puisque  $\phi$  est un isomorphisme. Chaque  $N_i$  est un multiple non nul de  $M_i$ , donc  $(N_1, N_2, N_3)$  est aussi une base de  $E$ .

Tous les  $N_i$  s'annulent en 0 et en 4, à cause du facteur  $W$ . Pour  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ , les facteurs de  $L_i$  donnent

$$N_i(j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i, \\ 0 & \text{si } j \neq i. \end{cases}$$

Par conséquent, dans la somme définissant  $\langle N_i, N_j \rangle$ , un terme non nul ne peut apparaître que si  $i = j$ , au point  $k = i$ . Il vaut alors 1. Ainsi

$$\langle N_i, N_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

La base  $(N_1, N_2, N_3)$  est donc orthonormée.

**10.** Notons  $\mathcal{L} = (L_1, L_2, L_3)$  et  $\mathcal{N} = (N_1, N_2, N_3)$ .

Par définition,  $\phi(L_i) = M_i = M_i(i)N_i$ . Ainsi

$$\phi(L_1) = -6N_1, \quad \phi(L_2) = 4N_2, \quad \phi(L_3) = -6N_3.$$

La matrice de  $\phi$  avec la base  $\mathcal{L}$  au départ et  $\mathcal{N}$  à l'arrivée est donc

$$D = \text{Mat}_{\mathcal{N} \leftarrow \mathcal{L}}(\phi) = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

**11.** La matrice  $D$  est inversible, car ses trois coefficients diagonaux sont non nuls.

Comme  $f = \phi \circ \Delta \circ \phi^{-1}$ ,

$$\text{Mat}_{\mathcal{N}}(f) = DAD^{-1}, \quad D^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Si  $d_1 = -6, d_2 = 4, d_3 = -6$ , le coefficient de ligne  $i$  et colonne  $j$  de  $DAD^{-1}$  vaut

$d_i A_{ij}/d_j$ . Cela donne

$$\text{Mat}_{\mathcal{N}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & -1 & \frac{4}{3} \\ 1 & -\frac{9}{4} & 2 \end{pmatrix}.$$

On peut contrôler les colonnes directement :

$$f(N_1) = -N_1 + N_3, \quad f(N_2) = \frac{3}{4}N_1 - N_2 - \frac{9}{4}N_3, \quad f(N_3) = \frac{4}{3}N_2 + 2N_3.$$

Par exemple,  $N_2 = M_2/4$  et  $f(M_2) = \phi(\Delta(L_2)) = -\frac{1}{2}M_1 - M_2 + \frac{3}{2}M_3$ . La substitution  $M_1 = -6N_1$ ,  $M_2 = 4N_2$ ,  $M_3 = -6N_3$  donne bien la deuxième colonne.

- 12. a.** Pour tout  $P \in \mathbb{R}_4[X]$ ,  $u(P)$  est une combinaison linéaire des  $N_i$ , donc appartient à  $E \subset \mathbb{R}_4[X]$ .

Pour  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  et  $P, Q \in \mathbb{R}_4[X]$ , la linéarité des évaluations donne

$$u(\alpha P + \beta Q) = \sum_{i=1}^3 (\alpha P(i) + \beta Q(i)) N_i = \alpha u(P) + \beta u(Q).$$

L'application  $u$  est donc un endomorphisme de  $\mathbb{R}_4[X]$ .

- 12. b.** Les valeurs de  $N_j$  aux entiers  $0, \dots, 4$  montrent que

$$\langle P, N_j \rangle = \sum_{k=0}^4 P(k) N_j(k) = P(j).$$

D'autre part, par orthonormalité,

$$\langle u(P), N_j \rangle = \sum_{i=1}^3 P(i) \langle N_i, N_j \rangle = P(j).$$

Par soustraction,  $\langle P - u(P), N_j \rangle = 0$  pour tout  $j \in \{1, 2, 3\}$ .

**12. c.** D'après 12. a,  $u(P) \in E$ . D'après 12. b et le fait que les  $N_j$  engendrent  $E$ ,  $P - u(P)$  est orthogonal à tout élément de  $E$ . Nous avons donc la décomposition

$$P = u(P) + (P - u(P)), \quad u(P) \in E, \quad P - u(P) \in E^\perp.$$

La décomposition sur  $E \oplus E^\perp$  est unique : sa composante dans  $E$  est le projeté orthogonal. Ainsi  $u$  est la projection orthogonale sur  $E$ .

En particulier,

$$u(P) = \sum_{i=1}^3 \langle P, N_i \rangle N_i,$$

conformément à la formule de projection dans une base orthonormée.

**12. d.** Pour  $Q = X^2(X - 2)(X - 3)$ , on calcule

$$Q(1) = 2, \quad Q(2) = 0, \quad Q(3) = 0.$$

Le projeté orthogonal vaut donc

$$u(Q) = 2N_1 = -\frac{1}{3}X(X - 4)(X - 2)(X - 3).$$

On peut vérifier le résultat par le résidu :

$$Q - u(Q) = \frac{4}{3}X(X - 1)(X - 2)(X - 3).$$

Ce polynôme s'annule en 1, 2, 3 ; comme les éléments de  $E$  s'annulent en 0, 4, il est orthogonal à  $E$  pour le produit scalaire considéré. Le polynôme  $u(Q)$  appartient bien à  $E$ , ce qui confirme la projection.

## PROBLÈME 2

Dans ce problème,  $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ . Pour une fonction de classe  $C^1$  ou  $C^2$  sur cet intervalle, les dérivées en 0 se comprennent comme des dérivées à droite. L'espace  $E$  désigne désormais l'espace de fonctions défini dans le préambule du deuxième problème.

### Partie I : Définition de la transformée de Laplace

1. La fonction nulle est continue et vérifie la condition de croissance, par exemple avec  $p = 0$ ; elle appartient donc à  $E$ .

Soient  $u, v \in E$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Il existe  $p, q \in \mathbb{N}$  tels que  $u(t)/t^p \rightarrow 0$  et  $v(t)/t^q \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow +\infty$ . Posons  $r = \max(p, q)$ . Pour  $t \geq 1$ , les facteurs  $t^{p-r}$  et  $t^{q-r}$  appartiennent à  $[0, 1]$ . Ainsi

$$\left| \frac{\alpha u(t) + \beta v(t)}{t^r} \right| \leq |\alpha| \left| \frac{u(t)}{t^p} \right| + |\beta| \left| \frac{v(t)}{t^q} \right| \rightarrow 0.$$

La fonction  $\alpha u + \beta v$  est continue. Elle appartient donc à  $E$ , qui est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}$ .

2. Fixons  $x > 0$  et choisissons  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $u(t)/t^p \rightarrow 0$ . Pour  $t > 0$ ,

$$t^2 u(t) e^{-xt} = \frac{u(t)}{t^p} t^{p+2} e^{-xt}.$$

Le premier facteur tend vers 0 et le second aussi, par croissances comparées entre puissance et exponentielle. Le produit tend donc vers 0.

Cette limite implique qu'il existe  $A \geq 1$  tel que, pour tout  $t \geq A$ ,

$$t^2 |u(t)| e^{-xt} \leq 1, \quad \text{donc} \quad |u(t)| e^{-xt} \leq \frac{1}{t^2}.$$

L'intégrale  $\int_A^{+\infty} t^{-2} dt$  converge. Le critère de comparaison pour les intégrales positives donne la convergence de  $\int_A^{+\infty} |u(t)| e^{-xt} dt$ . Sur  $[0, A]$ , l'intégrande est continue, donc intégrable.

Ainsi  $\int_0^{+\infty} u(t)e^{-xt} dt$  converge absolument pour tout  $x > 0$ . Cette conclusion justifie toutes les utilisations ultérieures de  $L(u)$ .

3. Comme  $E$  est un sous-espace vectoriel,  $\alpha u + v \in E$ . Pour chaque  $x > 0$ , les trois intégrales correspondantes sont absolument convergentes par la question 2. Sur un segment  $[0, T]$ , la linéarité de l'intégrale donne

$$\int_0^T (\alpha u(t) + v(t))e^{-xt} dt = \alpha \int_0^T u(t)e^{-xt} dt + \int_0^T v(t)e^{-xt} dt.$$

En faisant tendre  $T$  vers  $+\infty$ , on obtient  $L(\alpha u + v)(x) = \alpha L(u)(x) + L(v)(x)$ . L'égalité étant vraie pour tout  $x > 0$ ,  $L(\alpha u + v) = \alpha L(u) + L(v)$ .

## Partie II : Quelques exemples

---

4. Pour  $i \in \{0, 1, 2\}$ , la fonction  $v_i(t) = t^i e^{-at}$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$  et tend vers 0 à l'infini, car  $a > 0$ . Elle appartient donc à  $E$  avec  $p = 0$ . Sa transformée est absolument convergente par la question 2.

Fixons  $x > 0$  et posons  $b = x + a > 0$ . Alors

$$L(v_i)(x) = \int_0^{+\infty} t^i e^{-bt} dt.$$

### Méthode 1 — Moments de la loi exponentielle

---

Soit  $Y$  une variable de loi exponentielle de taux  $b$ , donc de densité  $be^{-bt}$  sur  $\mathbb{R}_+$ . Ses moments d'ordres 1 et 2 existent, avec

$$E(Y) = \frac{1}{b}, \quad V(Y) = \frac{1}{b^2}, \quad E(Y^2) = V(Y) + (E(Y))^2 = \frac{2}{b^2}.$$

La normalisation de la densité donne  $\int_0^{+\infty} e^{-bt} dt = 1/b$ . Le théorème de transfert donne ensuite

$$\int_0^{+\infty} t e^{-bt} dt = \frac{E(Y)}{b} = \frac{1}{b^2}, \quad \int_0^{+\infty} t^2 e^{-bt} dt = \frac{E(Y^2)}{b} = \frac{2}{b^3}.$$

Ainsi

$$L(v_0)(x) = \frac{1}{x+a}, \quad L(v_1)(x) = \frac{1}{(x+a)^2}, \quad L(v_2)(x) = \frac{2}{(x+a)^3}.$$

## Méthode 2 — Intégrations par parties sur des segments

Notons  $I_i(T) = \int_0^T t^i e^{-bt} dt$ . D'abord,

$$I_0(T) = \frac{1 - e^{-bT}}{b} \rightarrow \frac{1}{b}.$$

Une intégration par parties sur  $[0, T]$  donne

$$I_1(T) = -\frac{T}{b} e^{-bT} + \frac{1}{b} I_0(T).$$

Comme  $T e^{-bT} \rightarrow 0$ , on obtient  $I_1(T) \rightarrow 1/b^2$ . De même,

$$I_2(T) = -\frac{T^2}{b} e^{-bT} + \frac{2}{b} I_1(T).$$

Puisque  $T^2 e^{-bT} \rightarrow 0$ ,  $I_2(T) \rightarrow 2/b^3$ . On retrouve les trois résultats annoncés.

Les moments permettent un calcul rapide lorsque la loi est reconnue ; les intégrations par parties fournissent une méthode analytique réutilisable à tout ordre.

5. La fonction  $w_n(t) = t^n$  est continue et, pour  $t > 0$ ,

$$\frac{w_n(t)}{t^{n+1}} = \frac{1}{t} \rightarrow 0.$$

Ainsi  $w_n \in E$ , et  $L(w_n)(x)$  existe absolument pour tout  $x > 0$ .

## Méthode 1 — Récurrence par intégration par parties

Fixons  $x > 0$  et posons  $J_n(x) = \int_0^{+\infty} t^n e^{-xt} dt$ . Pour  $n = 0$ , la primitive  $-e^{-xt}/x$  donne  $J_0(x) = 1/x$ .

Pour  $n \geq 1$ , une intégration par parties sur  $[0, T]$  fournit

$$\int_0^T t^n e^{-xt} dt = -\frac{T^n}{x} e^{-xT} + \frac{n}{x} \int_0^T t^{n-1} e^{-xt} dt.$$

Le terme au bord inférieur est nul, puisque  $n \geq 1$ . Le terme  $T^n e^{-xT}$  tend vers 0 par croissances comparées, et les intégrales convergent. En passant à la limite,

$$J_n(x) = \frac{n}{x} J_{n-1}(x).$$

En partant de  $J_0(x) = 1/x$ , la récurrence donne  $J_n(x) = n!/x^{n+1}$ , y compris pour  $n = 0$  avec  $0! = 1$ .

## Méthode 2 — Changement de variable affine et fonction gamma

Sur  $[0, T]$ , posons  $s = xt$ , changement de variable affine de facteur strictement positif.

On obtient

$$\int_0^T t^n e^{-xt} dt = \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^{xT} s^n e^{-s} ds.$$

En passant à la limite, l'intégrale de droite est  $\Gamma(n+1)$ . Pour l'entier  $n \geq 0$ , la propriété de la fonction gamma donne  $\Gamma(n+1) = n!$ . D'où

$$L(w_n)(x) = \frac{\Gamma(n+1)}{x^{n+1}} = \frac{n!}{x^{n+1}}.$$

La récurrence établit le calcul par une méthode élémentaire ; la fonction gamma reconnaît directement une intégrale de référence du programme.

## Partie III : Propriétés des transformées de Laplace

### 6. Limite de $L(u)$ en $+\infty$

Choisissons  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $u(t)/t^p \rightarrow 0$ . Il existe  $A \geq 1$  tel que  $|u(t)|/t^p \leq 1$  pour  $t \geq A$ , donc  $|u(t)| \leq t^p$  sur  $[A, +\infty[$ .

La fonction  $|u|$  est continue sur le segment  $[0, A]$  : elle y atteint un maximum fini  $M \geq 0$ . Pour  $t \leq A$ ,  $|u(t)| \leq M \leq M + t^p$  ; pour  $t \geq A$ ,  $|u(t)| \leq t^p \leq M + t^p$ . Ainsi

$$\forall t \geq 0, \quad |u(t)| \leq M + t^p.$$

Pour  $x > 0$ , la question 2 et la positivité de l'intégrale permettent d'écrire

$$|L(u)(x)| \leq \int_0^{+\infty} |u(t)|e^{-xt} dt \leq M \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt + \int_0^{+\infty} t^p e^{-xt} dt.$$

La question 5 donne alors

$$|L(u)(x)| \leq \frac{M}{x} + \frac{p!}{x^{p+1}}.$$

Le membre de droite tend vers 0 quand  $x \rightarrow +\infty$ . Par encadrement,  $L(u)(x) \rightarrow 0$ .

7. a. Notons  $I = \int_0^{+\infty} u(s) ds$ , intégrale convergente par hypothèse, sans supposer sa convergence absolue. Par Chasles,

$$R(t) = I - \int_0^t u(s) ds.$$

La définition de la convergence de l'intégrale donne  $\int_0^t u(s) ds \rightarrow I$ , donc  $R(t) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow +\infty$ .

Comme  $u$  est continue, sa primitive  $t \mapsto \int_0^t u(s) ds$  est continue. Ainsi  $R$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$  et vérifie la condition définissant  $E$  avec  $p = 0$ . Donc  $R \in E$ .

7. b. Le théorème fondamental du calcul intégral s'applique à la fonction continue  $u$ . En dérivant l'expression obtenue en 7. a, on obtient

$$R'(t) = -u(t).$$

Cette dérivée est continue, donc  $R$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+$ , avec dérivée à droite en 0.

7. c. Fixons  $x > 0$ . Sur le segment  $[0, T]$ , l'intégration par parties est permise puisque  $R$  est de classe  $C^1$  :

$$\int_0^T u(t)e^{-xt} dt = - \int_0^T R'(t)e^{-xt} dt = -[R(t)e^{-xt}]_0^T - x \int_0^T R(t)e^{-xt} dt.$$

Ainsi

$$\int_0^T u(t)e^{-xt} dt = R(0) - R(T)e^{-xT} - x \int_0^T R(t)e^{-xt} dt.$$

Les transformées de  $u$  et de  $R$  existent absolument, puisque ces fonctions appartiennent à  $E$ . De plus  $R(T) \rightarrow 0$ , donc  $R(T)e^{-xT} \rightarrow 0$ . En faisant tendre  $T$  vers  $+\infty$ ,

$$L(u)(x) = R(0) - xL(R)(x).$$

7. d. Soit  $\varepsilon > 0$ . La limite  $R(t) \rightarrow 0$  assure l'existence d'un réel  $B \geq 0$  tel que  $|R(t)| \leq \varepsilon/2$  pour tout  $t \geq B$ .

Pour  $x > 0$ , la question 7. c et la convergence absolue de  $L(R)(x)$  donnent

$$|L(u)(x) - R(0)| \leq x \int_0^B |R(t)|e^{-xt} dt + x \int_B^{+\infty} |R(t)|e^{-xt} dt.$$

Sur  $[0, B]$ ,  $e^{-xt} \leq 1$ . Sur  $[B, +\infty[$ ,  $|R(t)| \leq \varepsilon/2$ . Par conséquent,

$$|L(u)(x) - R(0)| \leq x \int_0^B |R(t)| dt + \frac{\varepsilon}{2} x \int_B^{+\infty} e^{-xt} dt.$$

La dernière intégrale vaut  $e^{-xB}/x$ , donc son coefficient donne  $(\varepsilon/2)e^{-xB} \leq \varepsilon/2$ . Nous obtenons bien

$$|L(u)(x) - R(0)| \leq x \int_0^B |R(t)| dt + \frac{\varepsilon}{2}.$$

7. e. Soit  $\varepsilon > 0$  et choisissons  $B$  comme en 7. d. La quantité  $C_B = \int_0^B |R(t)| dt$  est finie, car  $R$  est continue sur le segment  $[0, B]$ .

Si  $C_B > 0$ , choisissons  $\delta = \varepsilon/(2C_B)$ . Pour  $0 < x < \delta$ ,  $xC_B < \varepsilon/2$  et donc  $|L(u)(x) - R(0)| < \varepsilon$ .

Si  $C_B = 0$ , la majoration de 7. d donne directement  $|L(u)(x) - R(0)| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$  pour tout  $x > 0$ .

Ainsi  $L(u)(x) \rightarrow R(0)$  lorsque  $x \rightarrow 0^+$ . Comme  $R(0) = I$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} L(u)(x) = \int_0^{+\infty} u(t) dt.$$

La limite est établie même lorsque l'intégrale de  $u$  n'est pas absolument convergente : la preuve utilise sa fonction reste  $R$  et des majorations explicites.

8. a. Puisque  $u' \in E$ , il existe  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $u'(t)/t^p \rightarrow 0$ . Choisissons  $A \geq 1$  tel que  $|u'(s)| \leq s^p$  pour  $s \geq A$ .

Pour  $t \geq A$ , le théorème fondamental du calcul intégral donne

$$u(t) = u(A) + \int_A^t u'(s) ds.$$

L'inégalité triangulaire et la majoration de  $u'$  entraînent

$$|u(t)| \leq |u(A)| + \int_A^t s^p ds = |u(A)| + \frac{t^{p+1} - A^{p+1}}{p+1} \leq |u(A)| + \frac{t^{p+1}}{p+1}.$$

Cela fournit les valeurs de  $p$  et de  $A$  demandées.

8. b. Il faut obtenir une limite nulle, et pas seulement une majoration d'ordre polynomial. Divisons donc l'inégalité de 8. a par  $t^{p+2}$ , pour  $t \geq A \geq 1$  :

$$\frac{|u(t)|}{t^{p+2}} \leq \frac{|u(A)|}{t^{p+2}} + \frac{1}{(p+1)t} \rightarrow 0.$$

La fonction  $u$  est continue, puisqu'elle est de classe  $C^1$ . Elle satisfait la définition de  $E$  avec l'entier  $p+2$ , donc  $u \in E$ .

8. c. Fixons  $x > 0$ . Sur  $[0, T]$ , l'intégration par parties donne

$$\int_0^T u'(t)e^{-xt} dt = [u(t)e^{-xt}]_0^T + x \int_0^T u(t)e^{-xt} dt,$$

soit

$$\int_0^T u'(t)e^{-xt} dt = u(T)e^{-xT} - u(0) + x \int_0^T u(t)e^{-xt} dt.$$

Les deux intégrales impropres convergent absolument, car  $u, u' \in E$ . D'après 8. a et les croissances comparées,

$$|u(T)e^{-xT}| \leq \left( |u(A)| + \frac{T^{p+1}}{p+1} \right) e^{-xT} \rightarrow 0.$$

En passant à la limite dans l'égalité sur le segment,

$$L(u')(x) = -u(0) + xL(u)(x).$$

9. a. Choisissons  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $u(t)/t^p \rightarrow 0$ . Pour un entier  $n \geq 1$ ,  $u_n(t) = t^n u(t)$  est continue et, pour  $t > 0$ ,

$$\frac{u_n(t)}{t^{p+n}} = \frac{u(t)}{t^p} \rightarrow 0.$$

Donc  $u_n \in E$ . En particulier, toutes les transformées utilisées ci-dessous sont définies pour  $x > 0$ .

9. b. Appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction exponentielle, de classe  $C^2$ , entre 0 et le réel  $a$ . Sur le segment ayant pour extrémités 0 et  $a$ , sa dérivée seconde

est  $e^s$ , dont la valeur absolue est au plus  $e^{|a|}$ . Il vient

$$|e^a - e^0 - ae^0| \leq \frac{|a|^2}{2} e^{|a|},$$

c'est-à-dire  $|e^a - 1 - a| \leq (a^2/2)e^{|a|}$ . Cette majoration vaut aussi pour  $a = 0$ , où les deux membres sont nuls.

9. c. Les hypothèses  $x > 0$  et  $|h| \leq x/2$  donnent  $x + h \geq x/2 > 0$ , ce qui assure que les transformées en  $x + h$  sont définies.

Pour  $t \geq 0$ , factorisons l'expression :

$$\frac{e^{-(x+h)t} - e^{-xt}}{h} + te^{-xt} = \frac{e^{-xt}}{h} (e^{-ht} - 1 + ht).$$

En appliquant 9. b au réel  $a = -ht$ , puis en utilisant  $|h| \leq x/2$ , on obtient

$$\left| \frac{e^{-(x+h)t} - e^{-xt}}{h} + te^{-xt} \right| \leq \frac{e^{-xt}}{|h|} \frac{h^2 t^2}{2} e^{|h|t} = \frac{|h|t^2}{2} e^{-(x-|h|)t} \leq \frac{|h|t^2}{2} e^{-xt/2}.$$

Pour intégrer cette majoration, vérifions que le membre de droite, multiplié par  $|u(t)|$ , est intégrable. La fonction  $t \mapsto t^2|u(t)|$  est continue et appartient à  $E$ , puisque  $t^2u(t) \in E$  et que la valeur absolue conserve la condition de limite nulle. La question 2, au paramètre  $x/2 > 0$ , assure donc

$$C_x = \int_0^{+\infty} t^2|u(t)|e^{-xt/2} dt < +\infty.$$

Par linéarité des intégrales absolument convergentes,

$$\frac{L(u)(x+h) - L(u)(x)}{h} + L(u_1)(x) = \int_0^{+\infty} u(t) \left( \frac{e^{-(x+h)t} - e^{-xt}}{h} + te^{-xt} \right) dt.$$

L'inégalité triangulaire et la majoration ponctuelle précédente donnent alors

$$\left| \frac{L(u)(x+h) - L(u)(x)}{h} + L(u_1)(x) \right| \leq \frac{|h|}{2} C_x = \frac{|h|}{2} \int_0^{+\infty} t^2|u(t)|e^{-xt/2} dt.$$

9. d. Fixons  $x > 0$ . Le nombre  $C_x$  défini en 9. c est fini et ne dépend pas de  $h$ . Ainsi, lorsque  $h \rightarrow 0$  avec  $h \neq 0$  et  $|h| \leq x/2$ , la majoration précédente tend vers 0.

Par définition de la dérivée,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{L(u)(x+h) - L(u)(x)}{h} = -L(u_1)(x).$$

Donc  $L(u)$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et  $(L(u))' = -L(u_1)$ . La preuve repose sur une estimation du taux d'accroissement, avec un reste majoré par une constante fois  $|h|$ .

9. e. Posons également  $u_0 = u$ . Pour tout entier  $n \geq 0$ ,  $u_n \in E$  et la question 9. d s'applique à cette fonction. Comme  $t u_n(t) = u_{n+1}(t)$ ,

$$(L(u_n))' = -L(u_{n+1}).$$

Une récurrence donne alors, pour tout  $n \geq 1$ ,

$$(L(u))^{(n)} = (-1)^n L(u_n).$$

Plus précisément, la formule est établie pour  $n = 1$  en 9. d. Si elle est vraie à l'ordre  $n$ , son membre de droite est dérivable et sa dérivée vaut  $(-1)^{n+1} L(u_{n+1})$ , ce qui établit l'ordre  $n + 1$ .

Enfin, chaque fonction  $L(u_n)$  est dérivable, donc continue. Ainsi toutes les dérivées obtenues sont continues. Par conséquent  $L(u)$  est de classe  $C^\infty$  sur  $]0, +\infty[$  et

$$(L(u))^{(n)}(x) = (-1)^n \int_0^{+\infty} t^n u(t) e^{-xt} dt.$$

L'existence de cette intégrale a été justifiée en 9. a et 2; la formule résulte de la récurrence précédente, sans échange de limite et d'intégrale non démontré.

## Partie IV : Application à la résolution d'une équation fonctionnelle

10. a. La fonction  $u$  est de classe  $C^2$ , donc  $u'$  est de classe  $C^1$ . Puisque sa dérivée  $u''$  appartient à  $E$ , la question 8 appliquée à  $u'$  donne  $u' \in E$  et

$$L(u'')(x) = -u'(0) + xL(u')(x).$$

On peut ensuite appliquer la même question à  $u$ , dont la dérivée  $u'$  appartient désormais à  $E$ . Il vient  $u \in E$  et

$$L(u')(x) = -u(0) + xL(u)(x).$$

En remplaçant cette expression dans la première égalité,

$$L(u'')(x) = -u'(0) + x(-u(0) + xL(u)(x)) = -xu(0) - u'(0) + x^2L(u)(x).$$

Ces égalités sont valables pour tout  $x > 0$ .

**10. b.** Les fonctions  $u, u', u''$  appartiennent à  $E$ , ainsi que  $t \mapsto e^{-t}$  d'après la question 4 avec  $a = 1$ . La linéarité de  $L$  peut donc être appliquée à l'équation :

$$L(u'')(x) + 5L(u')(x) + 6L(u)(x) = \frac{1}{x+1}.$$

Avec  $u(0) = 1$  et  $u'(0) = -2$ , les formules précédentes deviennent

$$L(u'')(x) = -x + 2 + x^2L(u)(x), \quad L(u')(x) = -1 + xL(u)(x).$$

En les substituant,

$$(-x + 2 + x^2L(u)(x)) + 5(-1 + xL(u)(x)) + 6L(u)(x) = \frac{1}{x+1},$$

soit

$$(x^2 + 5x + 6)L(u)(x) = \frac{1}{x+1} + 3 + x.$$

Pour  $x > 0$ ,  $x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3) > 0$  : la division est légitime. En réduisant le numérateur au même dénominateur,

$$L(u)(x) = \frac{1 + (x+3)(x+1)}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{x^2 + 4x + 4}{(x+1)(x+2)(x+3)}.$$

Comme  $x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$  et  $x+2 \neq 0$ ,

$$L(u)(x) = \frac{x+2}{(x+1)(x+3)}.$$

Cherchons des réels  $A, B$  tels que  $x + 2 = A(x + 3) + B(x + 1)$ . En identifiant les coefficients :  $A + B = 1$ ,  $3A + B = 2$ , donc  $A = B = 1/2$ . Finalement,

$$L(u)(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{x+3}.$$

## 11. Méthode 1 — Reconnaissance des transformées et vérification directe

La question 4 donne  $L(t \mapsto e^{-t})(x) = 1/(x+1)$  et  $L(t \mapsto e^{-3t})(x) = 1/(x+3)$ . La formule de 10. b suggère donc la fonction

$$u_*(t) = \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-3t}, \quad t \geq 0.$$

L'égalité des transformées fournit ici une candidate ; pour établir qu'elle résout le problème, vérifions directement toutes les conditions, sans supposer un théorème d'injectivité de la transformée.

La fonction  $u_*$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+$ . Ses deux premières dérivées sont

$$u'_*(t) = -\frac{1}{2}e^{-t} - \frac{3}{2}e^{-3t}, \quad u''_*(t) = \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{9}{2}e^{-3t}.$$

Ainsi

$$u''_*(t) + 5u'_*(t) + 6u_*(t) = \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{2} + 3\right)e^{-t} + \left(\frac{9}{2} - \frac{15}{2} + 3\right)e^{-3t} = e^{-t}.$$

De plus,

$$u_*(0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1, \quad u'_*(0) = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -2.$$

Enfin,  $u''_*$  est continue et tend vers 0, donc  $u''_* \in E$ , ce qui assure aussi la cohérence avec l'hypothèse de la question 10. Par conséquent,  $u_*$  est une solution du problème posé.

## Méthode 2 — Deux identités de dérivation successives

Cette approche retrouve la solution par des primitives et montre qu'elle est la seule solution de classe  $C^2$ , sans utiliser de résultat général sur les équations différentielles.

Si  $u$  est une telle solution, définissons  $v = u' + 3u$ . Elle est de classe  $C^1$  et

$$v' + 2v = u'' + 5u' + 6u = e^{-t}, \quad v(0) = u'(0) + 3u(0) = 1.$$

Par la règle de dérivation d'un produit,

$$\frac{d}{dt}(e^{2t}v(t)) = e^{2t}(v'(t) + 2v(t)) = e^t.$$

En intégrant sur  $[0, t]$ ,

$$e^{2t}v(t) - v(0) = e^t - 1.$$

Comme  $v(0) = 1$ , on obtient  $v(t) = e^{-t}$ , donc  $u'(t) + 3u(t) = e^{-t}$ . Une seconde dérivation de produit donne

$$\frac{d}{dt}(e^{3t}u(t)) = e^{3t}(u'(t) + 3u(t)) = e^{2t}.$$

Après intégration sur  $[0, t]$ ,

$$e^{3t}u(t) - u(0) = \frac{e^{2t} - 1}{2}.$$

Comme  $u(0) = 1$ , il vient nécessairement

$$u(t) = e^{-3t} \left( 1 + \frac{e^{2t} - 1}{2} \right) = \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-3t}.$$

La vérification directe effectuée dans la première méthode prouve que cette fonction satisfait effectivement toutes les conditions. La première approche exploite la transformée calculée dans le problème ; la seconde s'appuie seulement sur la dérivation de produits et le calcul de primitives.

## Relevé des adaptations

---

Aucune adaptation mathématique n'est nécessaire. Toutes les questions sont conservées et résolues avec les outils du référentiel. La limite en 0 du problème 2, question 7. e, est écrite  $x \rightarrow 0^+$  pour expliciter le domaine de définition déjà imposé par l'énoncé.