



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques 1

2014

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Problème 1

Partie I : Propriétés générales de T

1. Il s'agit de justifier la dérivation de l'intégrale à bornes variables à partir de la seule continuité de f .

Méthode 1 — Utilisation d'une primitive

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. Le théorème fondamental du calcul intégral assure que $G : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ est de classe C^1 et vérifie $G' = f$. Par la relation de Chasles :

$$T(f)(x) = \frac{1}{2}(G(x+1) - G(x-1)).$$

La composition par les fonctions affines $x \mapsto x+1$ et $x \mapsto x-1$ préserve la classe C^1 . En dérivant cette expression :

$$(T(f))'(x) = \frac{1}{2}(f(x+1) - f(x-1)).$$

Cette dérivée est continue, donc $T(f) \in E_1$.

Méthode 2 — Taux d'accroissement et continuité

Fixons $x \in \mathbb{R}$. Pour tout réel $u \neq 0$, Chasles donne :

$$\frac{T(f)(x+u) - T(f)(x)}{u} = \frac{1}{2u} \int_{x+1}^{x+1+u} f(t) dt - \frac{1}{2u} \int_{x-1}^{x-1+u} f(t) dt.$$

Pour tout réel c , le changement de variable affine $t = c + uv$ donne, y compris lorsque $u < 0$:

$$\frac{1}{u} \int_c^{c+u} f(t) dt - f(c) = \int_0^1 (f(c + uv) - f(c)) dv.$$

La continuité de f en c implique que, pour tout $\varepsilon > 0$, la valeur absolue de cette dernière intégrale est inférieure à ε pour $|u|$ assez petit. Les deux moyennes tendent donc respectivement vers $f(x+1)$ et $f(x-1)$. Le taux d'accroissement a la limite annoncée, et la continuité de la dérivée donne $T(f) \in E_1$.

La primitive fournit la preuve la plus courte ; les taux d'accroissement expliquent directement pourquoi la continuité de f suffit.

2. La question 1 donne $T(f) \in E_1 \subset E$ pour tout $f \in E$. Il reste à établir la linéarité.

Pour $f, g \in E$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$, la linéarité de l'intégrale sur le segment $[x-1, x+1]$ donne :

$$T(\alpha f + \beta g)(x) = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} (\alpha f(t) + \beta g(t)) dt = \alpha T(f)(x) + \beta T(g)(x).$$

L'égalité étant valable en tout x , $T(\alpha f + \beta g) = \alpha T(f) + \beta T(g)$. Ainsi T est un endomorphisme de E .

3. Nous utilisons la régularité de toutes les fonctions de l'image de T .

D'après la question 1, $\text{Im}(T) \subset E_1$. Or la fonction $g : x \mapsto |x|$ appartient à E mais n'est pas dérivable en 0 : ses dérivées unilatérales valent -1 et 1 .

Elle n'appartient donc pas à $\text{Im}(T)$. Conclusion : T n'est pas surjectif sur E .

4. Fixons $x \in \mathbb{R}$. Le changement de variable affine $u = -t$ donne :

$$T(f)(-x) = \frac{1}{2} \int_{-x-1}^{-x+1} f(t) dt = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(-u) du.$$

Si f est paire, $f(-u) = f(u)$, donc $T(f)(-x) = T(f)(x)$: $T(f)$ est paire.

Si f est impaire, $f(-u) = -f(u)$, donc $T(f)(-x) = -T(f)(x)$: $T(f)$ est impaire.

5. La convergence de l'intégrale sur $\mathbb{R}$ signifie que les deux intégrales sur $] -\infty, 0]$ et $[0, +\infty[$ convergent séparément.

Posons $G(x) = \int_0^x f(t) dt$. Il existe donc deux limites finies :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = L_+, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} G(x) = L_-.$$

Pour tout x , $T(f)(x) = \frac{1}{2}(G(x+1) - G(x-1))$. Lorsque $x \rightarrow +\infty$, les deux termes tendent vers L_+ ; lorsque $x \rightarrow -\infty$, ils tendent vers L_- .

Par différence de limites finies, $\lim_{x \rightarrow +\infty} T(f)(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} T(f)(x) = 0$. La preuve ne suppose pas la convergence absolue de l'intégrale.

6. La fonction $s : t \mapsto \sin(\pi t)$ est continue, donc appartient à E . Une primitive est $-\cos(\pi t)/\pi$. Ainsi :

$$T(s)(x) = \frac{\cos(\pi(x-1)) - \cos(\pi(x+1))}{2\pi} = 0.$$

En effet, les formules d'addition donnent $\cos(\pi(x-1)) = \cos(\pi(x+1)) = -\cos(\pi x)$.

Mais s n'est pas la fonction nulle, puisque $s(1/2) = 1$. Ainsi $s \in \text{Ker}(T) \setminus \{0\}$ et T n'est pas injectif.

Partie II : Premier exemple

7. La fonction f_a est continue pour tout $a \in \mathbb{R}$. Nous séparons le cas $a = 0$ pour éviter une division par zéro.

Si $a = 0$, $f_0 = 1$ et $T(f_0)(x) = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} 1 \, dt = 1$.

Si $a \neq 0$, une primitive de $t \mapsto e^{at}$ est e^{at}/a . Donc :

$$T(f_a)(x) = \frac{e^{a(x+1)} - e^{a(x-1)}}{2a} = \frac{e^a - e^{-a}}{2a} e^{ax}.$$

Ces deux expressions répondent à la question pour tous les paramètres réels.

8. Pour $a \neq 0$, la question 7 donne, en tout x , $T(f_a)(x) = \varphi(a)f_a(x)$. Pour $a = 0$, $\varphi(0) = 1$ et $T(f_0) = f_0$.

Ainsi, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $T(f_a) = \varphi(a)f_a$. De plus, f_a n'est jamais la fonction nulle, puisque $f_a(0) = 1$.

9. Nous étudions séparément la régularité en 0, le signe de la dérivée et les limites aux extrémités.

Sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, les règles de dérivation donnent :

$$\varphi'(a) = \frac{a(e^a + e^{-a}) - (e^a - e^{-a})}{2a^2} = \frac{e^a(a-1) + e^{-a}(a+1)}{2a^2}.$$

Au voisinage de 0, les développements limités usuels de l'exponentielle, appliqués à a et à $-a$, donnent :

$$e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{6} + o(a^3), \quad e^{-a} = 1 - a + \frac{a^2}{2} - \frac{a^3}{6} + o(a^3).$$

Par soustraction puis division par $2a$, pour $a \neq 0$:

$$\varphi(a) = 1 + \frac{a^2}{6} + o(a^2).$$

Ainsi φ est continue en 0 et $\frac{\varphi(a) - \varphi(0)}{a} = \frac{a}{6} + o(a) \rightarrow 0$. Elle est dérivable en 0, avec $\varphi'(0) = 0$.

Posons $N(a) = e^a(a - 1) + e^{-a}(a + 1)$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$, $N(0) = 0$ et :

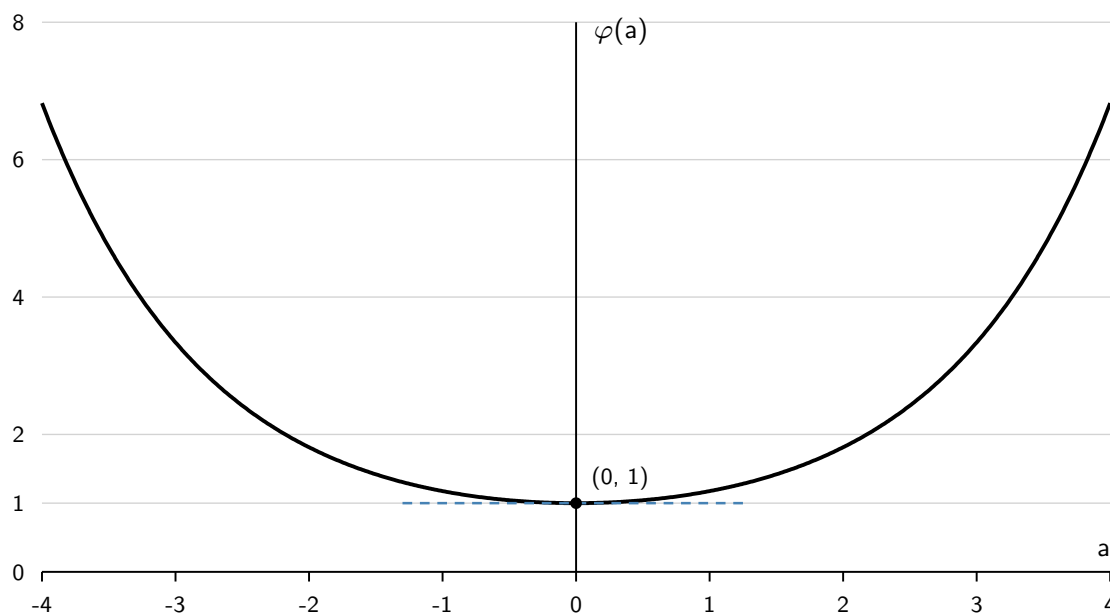
$$N'(a) = a(e^a - e^{-a}).$$

Pour $a > 0$, les deux facteurs sont positifs ; pour $a < 0$, ils sont tous deux négatifs. Par conséquent, $N'(a) > 0$ pour $a \neq 0$. Le théorème des accroissements finis sur $[0, a]$ si $a > 0$, et sur $[a, 0]$ si $a < 0$, donne respectivement $N(a) > 0$ et $N(a) < 0$.

Comme $2a^2 > 0$ pour $a \neq 0$, φ' est négative sur $] -\infty, 0[$ et positive sur $]0, +\infty[$. La fonction φ est donc strictement décroissante jusqu'à 0, puis strictement croissante ; son minimum global vaut $\varphi(0) = 1$.

Pour $a \rightarrow +\infty$, $\varphi(a) = \frac{e^a}{2a}(1 - e^{-2a}) \rightarrow +\infty$ par croissance comparée. Pour $a \neq 0$, $\varphi(-a) = \varphi(a)$, et cette parité reste vraie en 0. La limite en $-\infty$ vaut donc également $+\infty$.

La courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, passe par $(0, 1)$ et possède en ce point la tangente horizontale d'équation $y = 1$. Le tracé ci-dessous représente les valeurs de la formule sur $[-4, 4]$.



- 10.** La restriction de φ à $[0, +\infty[$ est continue et strictement croissante. Elle prend la valeur 1 en 0 et tend vers $+\infty$.

Par le théorème de la bijection, pour tout $\lambda \in [1, +\infty[$, il existe un unique $a \in [0, +\infty[$ tel que $\varphi(a) = \lambda$. Pour $\lambda = 1$, ce paramètre est $a = 0$.

La fonction $f = f_a$ appartient à E et est non nulle. La question 8 donne

$T(f) = \varphi(a)f = \lambda f$, ce qui établit l'existence demandée.

Partie III : Deuxième exemple

- 11.** La fonction $t \mapsto |t| + 1$ est continue et strictement positive sur $\mathbb{R}$. Son inverse h est donc continue : $h \in E$. Elle est paire, donc $T(h)$ est paire par la question 4.

Pour $0 \leq x \leq 1$, le segment d'intégration contient 0. Sur sa partie négative,

$h(t) = 1/(1 - t)$; sur sa partie positive, $h(t) = 1/(1 + t)$. Ainsi :

$$T(h)(x) = \frac{1}{2} \left(\int_{x-1}^0 \frac{dt}{1-t} + \int_0^{x+1} \frac{dt}{1+t} \right) = \frac{1}{2} (\ln(2-x) + \ln(x+2)) = \frac{1}{2} \ln(4-x^2).$$

Pour $x > 1$, toutes les bornes sont positives, donc :

$$T(h)(x) = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} \frac{dt}{1+t} = \frac{1}{2} (\ln(x+2) - \ln x).$$

Par parité, pour tout réel x :

$$T(h)(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \ln(4 - x^2) & \text{si } |x| \leq 1, \\ \frac{1}{2} \ln \left(\frac{|x| + 2}{|x|} \right) & \text{si } |x| > 1. \end{cases}$$

En $x = 1$ et en $x = -1$, les deux expressions se raccordent à $\frac{1}{2} \ln 3$.

12. Posons $g = T(h)$. La question 1 assure que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Méthode 1 — Dérivation des expressions obtenues

Pour $0 < x < 1$, $g'(x) = -\frac{x}{4-x^2} < 0$. Pour $x > 1$,

$$g'(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x} \right) = -\frac{1}{x(x+2)} < 0.$$

Au point 0, $g'(0) = 0$. Au point 1, les deux expressions de la dérivée tendent vers $-1/3$; la continuité de g' donne $g'(1) = -1/3$. Par parité de g , sa dérivée est impaire : elle est strictement positive sur $] -\infty, 0[$.

Ainsi g est strictement croissante sur $] -\infty, 0]$, strictement décroissante sur $[0, +\infty[$, et son maximum global vaut $g(0) = \ln 2$.

Méthode 2 — Comparaison des valeurs de h aux bornes

La formule de la question 1 donne $g'(x) = \frac{1}{2}(h(x+1) - h(x-1))$. Pour $x > 0$, on a $|x+1| > |x-1|$. Comme $u \mapsto 1/(u+1)$ est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$, $h(x+1) < h(x-1)$ et donc $g'(x) < 0$.

De même, pour $x < 0$, $|x+1| < |x-1|$, donc $g'(x) > 0$. Pour $x = 0$, les deux valeurs sont égales et $g'(0) = 0$. Cette preuve donne les mêmes variations sans séparer les intervalles en 1.

Les expressions de la question 11 donnent $g(0) = \ln 2 \approx 0,69$ et $g(1) = \frac{1}{2} \ln 3 \approx 0,55$.

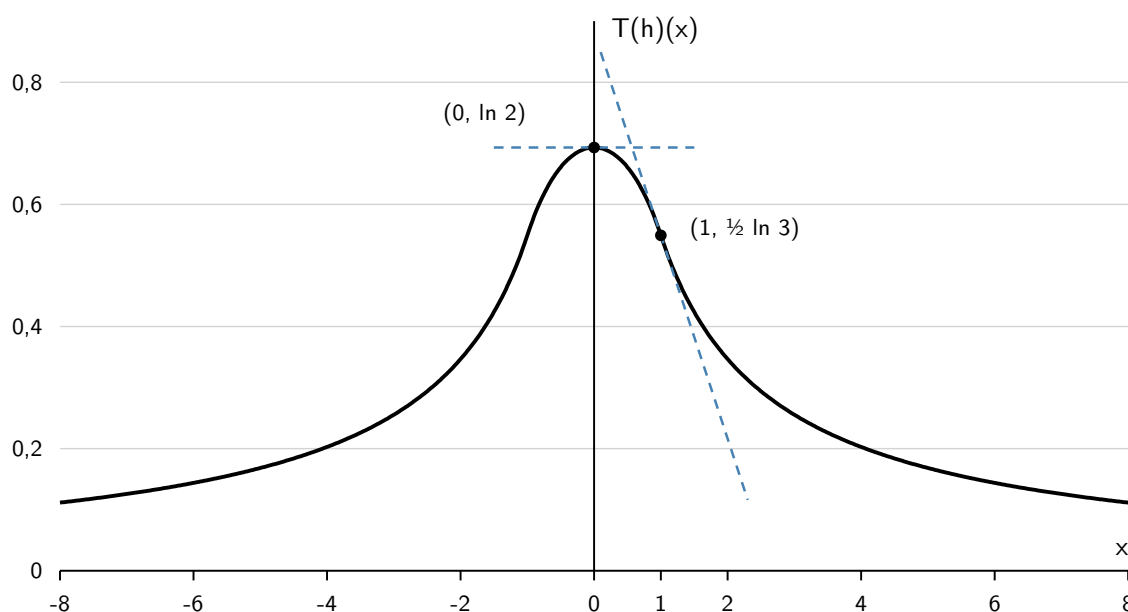
La formule générale de la dérivée donne aussi

$$g'(1) = \frac{1}{2}(h(2) - h(0)) = \frac{1}{2}(1/3 - 1) = -1/3.$$

Les tangentes demandées sont donc $y = \ln 2$ en 0 et $y = \frac{1}{2} \ln 3 - \frac{1}{3}(x-1)$ en 1.

Enfin, pour $x \rightarrow +\infty$, $g(x) = \frac{1}{2} \ln(1 + 2/x) \rightarrow 0$ par continuité du logarithme en 1. Par parité, la limite en $-\infty$ est aussi nulle. La droite $y = 0$ est une asymptote horizontale aux deux extrémités, et g reste strictement positive.

Le premier calcul donne les pentes explicitement ; la comparaison aux bornes montre directement comment la moyenne mobile conserve ici la monotonie de chaque côté du maximum.



13. La réciproque est fausse. Deux contre-exemples permettent de comprendre deux raisons différentes de cet échec.

Méthode 1 — Une fonction positive dont l'intégrale diverge

La fonction h de la partie III appartient à E , et la question 12 donne $T(h)(x) \rightarrow 0$ aux deux extrémités. Pourtant, pour $R > 0$:

$$\int_0^R h(t) \, dt = \int_0^R \frac{dt}{1+t} = \ln(1+R) \rightarrow +\infty.$$

L'intégrale sur $[0, +\infty[$ diverge, donc celle sur $\mathbb{R}$ ne converge pas. Ce contre-exemple établit que la décroissance de la moyenne mobile ne garantit pas une décroissance assez rapide pour l'intégrabilité.

Méthode 2 — Une oscillation annulée par T

La question 6 donne $T(s) = 0$ pour $s(t) = \sin(\pi t)$. Ses limites aux deux extrémités sont donc nulles. Mais :

$$\int_0^R s(t) \, dt = \frac{1 - \cos(\pi R)}{\pi}.$$

Pour $R = 2m$, cette expression vaut 0 ; pour $R = 2m + 1$, elle vaut $2/\pi$. Les deux suites de bornes tendent vers $+\infty$ et donnent deux valeurs distinctes : l'intégrale sur $[0, +\infty[$ ne converge pas. Ici, la moyenne mobile annule des oscillations, sans rendre l'intégrale impropre convergente.

Partie IV : Recherche d'extremums locaux pour une fonction réelle de deux variables réelles

- 14.** L'ensemble $U =]1, +\infty[^2$ est ouvert. Pour $(x, y) \in U$, on a $x > 1, y > 1$ et $xy > 1$, donc tous les arguments de F appartiennent à son domaine.

Les fonctions logarithmes intervenant dans F sont de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$ et l'application $(x, y) \mapsto xy$ est polynomiale. Les règles de composition donnent $H \in C^\infty(U)$, en particulier $H \in C^1(U)$ et $H \in C^2(U)$.

Pour $z > 1$, $F'(z) = \frac{1}{z+2} - \frac{1}{z} = -\frac{2}{z(z+2)}$. En utilisant la dérivation composée :

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) = F'(x) - 2yF'(xy) = -\frac{2}{x(x+2)} + \frac{4}{x(xy+2)} = \frac{2}{x} \left(\frac{2}{xy+2} - \frac{1}{x+2} \right).$$

De même :

$$\frac{\partial H}{\partial y}(x, y) = F'(y) - 2xF'(xy) = -\frac{2}{y(y+2)} + \frac{4}{y(xy+2)} = \frac{2}{y} \left(\frac{2}{xy+2} - \frac{1}{y+2} \right).$$

Tous les dénominateurs sont strictement positifs sur U .

- 15.** Un point critique de H est un point de U où les deux dérivées de la question 14 s'annulent. Comme $x, y, x+2, y+2$ et $xy+2$ sont positifs, ces annulations équivalent à :

$$xy+2 = 2(x+2), \quad xy+2 = 2(y+2).$$

En soustrayant les deux égalités, $x = y$. En remplaçant y par x , il vient $x^2 - 2x - 2 = 0$, soit $(x-1)^2 = 3$.

Les solutions réelles sont $x = 1 + \sqrt{3}$ et $x = 1 - \sqrt{3}$. Seule la première satisfait $x > 1$.

Posons $a = 1 + \sqrt{3}$. Le point (a, a) appartient à U et vérifie bien les deux équations. Il est donc l'unique point critique : $(x_0, y_0) = (a, a)$, avec $a^2 = 2a + 2$.

16. Question adaptée au programme actuel : l'étude repose sur la hessienne exacte et les signes de ses valeurs propres.

La régularité C^2 sur l'ouvert U a été vérifiée à la question 14. Nous calculons d'abord la hessienne, sans déduire un signe exact d'une valeur arrondie.

Pour $z > 1$, la dérivation de F' donne :

$$F''(z) = \frac{4(z+1)}{z^2(z+2)^2}.$$

En dérivant les expressions de la question 14 :

$$H_{xx}(x, y) = F''(x) - 2y^2 F''(xy), \quad H_{yy}(x, y) = F''(y) - 2x^2 F''(xy),$$

$$H_{xy}(x, y) = -2F'(xy) - 2xyF''(xy) = -\frac{4}{(xy+2)^2}.$$

Au point (a, a) , utilisons $a^2 = 2a + 2$ et $a^2 + 2 = 2(a + 2)$. Les deux coefficients diagonaux sont égaux à :

$$\alpha = \frac{4(a+1)}{a^2(a+2)^2} - \frac{8(a^2+1)}{a^2(a^2+2)^2} = \frac{4(a+1) - 2(a^2+1)}{a^2(a+2)^2} = -\frac{2}{a^2(a+2)^2}.$$

Le coefficient mixte vaut $\beta = -\frac{4}{(a^2+2)^2} = -\frac{1}{(a+2)^2}$. Ainsi :

$$\nabla^2 H(a, a) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Méthode 1 — Deux vecteurs propres explicites

Les vecteurs $u = {}^t(1, 1)$ et $v = {}^t(1, -1)$ sont non nuls et indépendants. Une multiplication directe donne :

$$\nabla^2 H(a, a)u = (\alpha + \beta)u, \quad \nabla^2 H(a, a)v = (\alpha - \beta)v.$$

Ils forment une base de $\mathbb{R}^2$; les deux valeurs propres sont donc :

$$\alpha + \beta = -\frac{a^2 + 2}{a^2(a + 2)^2} = -\frac{2}{a^2(a + 2)} < 0,$$

$$\alpha - \beta = \frac{a^2 - 2}{a^2(a + 2)^2} = \frac{2a}{a^2(a + 2)^2} > 0.$$

La hessienne possède une valeur propre strictement positive et une strictement négative. Le point (a, a) est un point selle, et non un extremum local.

Méthode 2 — Signe de la forme quadratique et restrictions

Pour $w = {}^t(u, v)$, la forme quadratique associée est :

$${}^t w \nabla^2 H(a, a) w = \alpha(u^2 + v^2) + 2\beta uv.$$

Dans la direction $(1, 1)$, elle vaut $2(\alpha + \beta) < 0$; dans la direction $(1, -1)$, elle vaut $2(\alpha - \beta) > 0$.

Pour t assez petit, les points $(a + t, a + t)$ et $(a + t, a - t)$ restent dans U . Comme le gradient de H s'annule en (a, a) , le développement limité d'ordre deux donne :

$$H(a + t, a + t) - H(a, a) = (\alpha + \beta)t^2 + o(t^2),$$

$$H(a + t, a - t) - H(a, a) = (\alpha - \beta)t^2 + o(t^2).$$

Les coefficients sont strictement négatif et strictement positif. Pour tout $t \neq 0$ assez petit, les deux différences ont donc des signes opposés. Aucun voisinage de (a, a) ne peut faire de ce point un maximum ou un minimum.

Enfin, tout extremum local d'une fonction C^1 sur un ouvert est un point critique.

Comme (a, a) est l'unique point critique et n'est pas un extremum, H n'admet aucun extremum local sur U .

La première méthode utilise directement le critère spectral; la seconde montre les deux directions où les valeurs de H augmentent ou diminuent.

Partie V : Transformée d'une densité

17. Nous construisons une identité à partir de primitives, sans échanger deux intégrales.

Puisque f et $t \mapsto tf(t)$ sont continues sur $\mathbb{R}$, définissons les primitives :

$$G(z) = \int_0^z f(t) \, dt, \quad K(z) = \int_0^z tf(t) \, dt.$$

Elles sont de classe C^1 , avec $G'(z) = f(z)$ et $K'(z) = zf(z)$. Ces intégrales ont des bornes finies ; aucune hypothèse de moment de la densité n'est nécessaire.

Posons $J(z) = \frac{1}{2} \int_{z-1}^{z+1} (z-t)f(t) dt$. Par linéarité et Chasles :

$$J(z) = \frac{z}{2}(G(z+1) - G(z-1)) - \frac{1}{2}(K(z+1) - K(z-1)).$$

En dérivant cette expression :

$$\begin{aligned} J'(z) &= \frac{1}{2}(G(z+1) - G(z-1)) + \frac{z}{2}(f(z+1) - f(z-1)) \\ &\quad - \frac{1}{2}((z+1)f(z+1) - (z-1)f(z-1)). \end{aligned}$$

Les termes portant sur les valeurs de f se simplifient et donnent :

$$J'(z) = T(f)(z) - \frac{1}{2}(f(z+1) + f(z-1)).$$

Pour tous réels A, B , le théorème fondamental du calcul intégral donne alors :

$$\int_A^B T(f)(z) dz = J(B) - J(A) + \frac{1}{2} \int_A^B f(z+1) dz + \frac{1}{2} \int_A^B f(z-1) dz.$$

Les changements de variable affines $t = z + 1$ et $t = z - 1$ transforment les deux dernières intégrales en $\int_{A+1}^{B+1} f(t) dt$ et $\int_{A-1}^{B-1} f(t) dt$. En remplaçant $J(A)$ et $J(B)$ par leurs définitions, on obtient exactement l'identité demandée. Elle reste valable pour $A > B$, avec la convention des intégrales orientées, ainsi que pour $A = B$.

18. Une densité continue est positive ou nulle en tout point. Pour $x \in [B-1, B+1]$, on a $|B-x| \leq 1$.

L'inégalité triangulaire pour l'intégrale, puis sa croissance, donnent :

$$|J(B)| \leq \frac{1}{2} \int_{B-1}^{B+1} |B-x|f(x) \, dx \leq \frac{1}{2} \int_{B-1}^{B+1} f(x) \, dx = T(f)(B).$$

L'intégrale de f sur $\mathbb{R}$ converge puisqu'elle vaut 1. La question 5 assure donc que $T(f)(B) \rightarrow 0$ lorsque $B \rightarrow +\infty$.

Par encadrement, $J(B) \rightarrow 0$ lorsque $B \rightarrow +\infty$. La même majoration et la limite en $-\infty$ de la question 5 donnent également $J(B) \rightarrow 0$ lorsque $B \rightarrow -\infty$, ce qui sera utile à la question suivante.

19. Nous vérifions la positivité, la régularité et la normalisation de $T(f)$.

Méthode 1 — Utilisation de l'identité de la question 17

Pour tout x , $T(f)(x) \geq 0$ car $f \geq 0$ et l'intégrale est prise sur un segment orienté de gauche à droite. La question 1 assure que $T(f)$ est continue, et même de classe C^1 .

Appliquons l'identité de la question 17 avec $A = -R$ et $B = R$, pour $R > 1$:

$$\int_{-R}^R T(f)(x) \, dx = J(R) - J(-R) + \frac{1}{2} \int_{-R+1}^{R+1} f(x) \, dx + \frac{1}{2} \int_{-R-1}^{R-1} f(x) \, dx.$$

Les deux termes J tendent vers 0 par la question 18. Chacune des deux intégrales de f tend vers 1, puisque ses bornes tendent respectivement vers $-\infty$ et $+\infty$ et que les deux intégrales impropres de f convergent. Ainsi :

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R T(f)(x) \, dx = 1.$$

Pour justifier la convergence impropre au sens usuel, et pas seulement une limite symétrique, remarquons que les fonctions $R \mapsto \int_0^R T(f)(x) \, dx$ et

$R \mapsto \int_{-R}^0 T(f)(x) \, dx$ sont croissantes et positives. Chacune est majorée par $\int_{-R}^R T(f)$, dont la limite finie fournit une borne pour les grands R . Elles admettent donc chacune une limite finie. Leur somme vaut 1.

Conclusion

$\int_{-\infty}^{+\infty} T(f)(x) \, dx = 1$; avec la positivité et la continuité, cela montre que $T(f)$ est une densité.

Méthode 2 — Interprétation par convolution

Considérons deux variables indépendantes X et U , de densités respectives f et $u : t \mapsto \frac{1}{2} \mathbf{1}_{[-1,1]}(t)$. La deuxième densité est celle de la loi uniforme sur $[-1, 1]$.

Le théorème de convolution pour des variables indépendantes à densité donne une densité de $X + U$ par :

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)u(x-t) \, dt = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(t) \, dt = T(f)(x).$$

L'intégrale définissant $g(x)$ existe : elle porte sur un segment et f y est continue.

L'expression obtenue est continue par la question 1, donc fournit une densité répondant aux conditions de régularité du programme.

Cette interprétation conclut aussi que $T(f)$ est une densité. La première preuve suit les questions précédentes ; la seconde explique le rôle probabiliste de T , qui correspond à l'ajout d'un bruit uniforme indépendant.

Problème 2

Partie I : Quelques généralités

1. Pour toute matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$, les produits AM et MA appartiennent à $M_n(\mathbb{R})$, donc Φ_A prend ses valeurs dans cet espace.

Pour $M, N \in M_n(\mathbb{R})$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la distributivité du produit matriciel donne :

$$\Phi_A(\alpha M + \beta N) = A(\alpha M + \beta N) - (\alpha M + \beta N)A = \alpha(AM - MA) + \beta(AN - NA).$$

Ainsi Φ_A est linéaire de $M_n(\mathbb{R})$ dans lui-même : c'est un endomorphisme.

2. Comme $AI_n = I_n A = A$, $\Phi_A(I_n) = 0$. Or $I_n \neq 0$, donc le noyau n'est pas réduit à la matrice nulle et Φ_A n'est pas injectif.

Méthode 1 — Théorème du rang

L'espace $M_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie n^2 . Le théorème du rang donne :

$$\text{rg}(\Phi_A) = n^2 - \dim \text{Ker}(\Phi_A) \leq n^2 - 1 < n^2.$$

L'image n'est donc pas tout l'espace : Φ_A n'est pas surjectif.

Méthode 2 — Obstruction donnée par la trace

La propriété du cours $\text{Tr}(AM) = \text{Tr}(MA)$ donne, pour toute matrice M :

$$\text{Tr}(\Phi_A(M)) = \text{Tr}(AM) - \text{Tr}(MA) = 0.$$

La matrice I_n a pour trace $n \neq 0$, donc ne possède aucun antécédent par Φ_A . Cela prouve directement la non-surjectivité.

La première méthode s'applique à tout endomorphisme d'un espace de dimension finie ; la seconde identifie une propriété concrète des matrices de l'image.

Partie II : Étude d'un cas particulier

3. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ est triangulaire ; ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux, 1 et 3.

Elles sont distinctes et l'espace des colonnes est de dimension 2. Le critère de diagonalisation par deux valeurs propres distinctes donne que A est diagonalisable.

On peut préciser une base propre en résolvant les systèmes :

$$(A - I_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \iff y = 0, \quad (A - 3I_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \iff y = 2x.$$

Les colonnes ${}^t(1, 0)$ et ${}^t(1, 2)$ sont donc deux vecteurs propres indépendants. La matrice

de passage $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ est triangulaire à diagonale non nulle, donc inversible, et :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, calculons d'abord les deux produits :

$$AM = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ 3c & 3d \end{pmatrix}, \quad MA = \begin{pmatrix} a & a+3b \\ c & c+3d \end{pmatrix}.$$

Ainsi $\Phi_A(M) = \begin{pmatrix} c & d-a-2b \\ 2c & -c \end{pmatrix}$. Dans la base ordonnée $\mathcal{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$,

les coordonnées de M sont ${}^t(a, b, c, d)$. On lit donc :

$$K = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\Phi_A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Méthode 1 — Rang des colonnes

Les colonnes de K sont $U = {}^t(0, -1, 0, 0)$, $2U$, $V = {}^t(1, 0, 2, -1)$ et $-U$. Les colonnes U et V sont indépendantes : la première coordonnée de $\alpha U + \beta V = 0$ impose $\beta = 0$, puis la deuxième impose $\alpha = 0$.

Toutes les colonnes sont engendrées par ces deux colonnes indépendantes, donc $\text{rg}(K) = 2$.

Méthode 2 — Dimension du noyau

L'égalité $\Phi_A(M) = 0$ équivaut à $c = 0$ et $d = a + 2b$. Par conséquent :

$$\text{Ker}(\Phi_A) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a + 2b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(I_2, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right).$$

Les deux matrices indiquées sont indépendantes, comme le montrent leurs coefficients de positions $(1, 1)$ et $(1, 2)$. Le noyau est de dimension 2. Le théorème du rang donne $\text{rg}(\Phi_A) = 4 - 2 = 2$, qui est aussi le rang de K .

La lecture des colonnes répond rapidement à la question ; le noyau décrit en plus toutes les matrices qui commutent avec A .

5. Nous cherchons les vecteurs propres en résolvant $\Phi_A(M) = \nu M$, sans calcul de déterminant.

Méthode 1 — Résolution des systèmes propres

Pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, l'équation équivaut au système :

$$c = \nu a, \quad d - a - 2b = \nu b, \quad 2c = \nu c, \quad -c = \nu d.$$

Si $\nu = 0$, on retrouve $c = 0$ et $d = a + 2b$. L'espace propre associé est donc de dimension 2, avec pour base I_2 et A . Ces deux matrices sont indépendantes : si $\alpha I_2 + \beta A = 0$, le coefficient $(1, 2)$ impose $\beta = 0$, puis $\alpha = 0$.

Si $\nu \neq 0$ et $c = 0$, la première et la dernière équation donnent $a = d = 0$. La deuxième devient $-2b = \nu b$. Pour obtenir une matrice non nulle, il faut $b \neq 0$, donc $\nu = -2$.

L'espace propre associé est $\text{Vect}(E_{1,2})$.

Si $c \neq 0$, la troisième équation impose $\nu = 2$. Les autres équations donnent $c = 2a$, $d = -a$ et $b = -a/2$. L'espace propre associé est donc :

$$\text{Vect}(Q), \quad Q = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ces cas sont exhaustifs : les valeurs propres sont exactement 0, -2 et 2. Les dimensions des espaces propres sont respectivement 2, 1 et 1. Leur somme est 4, la dimension de $M_2(\mathbb{R})$. Ainsi Φ_A est diagonalisable, avec la base propre $(I_2, A, E_{1,2}, Q)$.

Méthode 2 — Transport par une diagonalisation de A

Avec les matrices P et $D = \text{diag}(1, 3)$ de la question 3, définissons $S(N) = PNP^{-1}$.

L'application S est un isomorphisme, d'inverse $M \mapsto P^{-1}MP$.

Pour toute matrice N , les identités $AP = PD$ et $P^{-1}A = DP^{-1}$ donnent :

$$\Phi_A(S(N)) = P(DN - ND)P^{-1} = S(\Phi_D(N)).$$

Notons $d_1 = 1$ et $d_2 = 3$. La multiplication par la matrice diagonale donne $DE_{i,j} = d_i E_{i,j}$ et $E_{i,j}D = d_j E_{i,j}$. Par conséquent :

$$\Phi_D(E_{i,j}) = (d_i - d_j)E_{i,j}.$$

La base $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ est donc propre pour Φ_D , avec valeurs propres 0, -2 , 2, 0.

Son image par S est une base propre de Φ_A . Plus explicitement :

$$S(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S(E_{1,2}) = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$S(E_{2,1}) = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad S(E_{2,2}) = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cela retrouve les trois valeurs propres et la diagonalisation. Les systèmes donnent les espaces propres dans les coordonnées initiales ; le transport par P explique pourquoi des différences de valeurs propres apparaissent.

Partie III : Étude du cas où A est diagonalisable

6. Par hypothèse, il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale réelle D telles que $A = PDP^{-1}$.

En transposant cette égalité et en utilisant ${}^tD = D$:

$${}^tA = {}^t(P^{-1})D{}^tP.$$

Posons $Q = {}^t(P^{-1})$. La propriété de transposition de l'inverse donne $Q^{-1} = {}^tP$, donc ${}^tA = QDQ^{-1}$.

Ainsi ${}^tA$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et semblable à la même matrice diagonale D que A . Leurs valeurs propres sont exactement les coefficients diagonaux de D , donc elles coïncident.

7. Notons λ et μ les valeurs propres associées respectivement à X pour A et à Y pour ${}^tA$.

On a :

$$AX = \lambda X, \quad {}^tAY = \mu Y, \quad X \neq 0, \quad Y \neq 0.$$

En transposant la seconde égalité, ${}^tYA = \mu {}^tY$. L'associativité du produit matriciel donne alors :

$$\Phi_A(X {}^tY) = (AX) {}^tY - X ({}^tYA) = (\lambda - \mu) X {}^tY.$$

Il faut également vérifier que $X {}^tY$ est non nulle. Il existe des indices r, s tels que $X_r \neq 0$ et $Y_s \neq 0$. Le coefficient de position (r, s) de $X {}^tY$ vaut $X_r Y_s \neq 0$.

Ainsi $X {}^tY$ est bien un vecteur propre de Φ_A , associé à $\lambda - \mu$. Cette valeur peut être nulle ; cela ne remet pas en cause le caractère propre du vecteur.

8. Nous démontrons d'abord l'appartenance explicitement demandée, puis donnons une autre façon d'identifier la base.

Méthode 1 — Développement des colonnes canoniques

Puisque $(X_1, \dots, X_n)$ et $(Y_1, \dots, Y_n)$ sont des bases, pour chaque couple (i, j) il existe des réels $a_{k,i}$ et $b_{\ell,j}$ tels que :

$$V_i = \sum_{k=1}^n a_{k,i} X_k, \quad V_j = \sum_{\ell=1}^n b_{\ell,j} Y_\ell.$$

En transposant la deuxième égalité et en développant le produit :

$$V_i^t(V_j) = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n a_{k,i} b_{\ell,j} X_k^t(Y_\ell).$$

Cette matrice appartient donc à $\text{Vect}(\mathcal{F})$. Or les matrices $V_i^t(V_j) = E_{i,j}$ forment une base de $M_n(\mathbb{R})$. Ainsi $\mathcal{F}$ engendre tout cet espace.

La famille $\mathcal{F}$ comporte n^2 éléments et l'espace a pour dimension n^2 . Une famille génératrice de cette taille est une base : $\mathcal{F}$ est une base de $M_n(\mathbb{R})$.

Méthode 2 — Image d'une base par un isomorphisme

Notons P la matrice de colonnes $X_1, \dots, X_n$ et Q celle de colonnes $Y_1, \dots, Y_n$. Ces matrices sont inversibles puisque leurs colonnes forment des bases.

L'application $L : M \mapsto PM^tQ$ est un isomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$, d'inverse $N \mapsto P^{-1}N(^tQ)^{-1}$. Or :

$$L(E_{i,j}) = PV_i^t(V_j)^tQ = (PV_i)^t(QV_j) = X_i^t(Y_j).$$

La famille $\mathcal{F}$ est donc l'image de la base canonique par un isomorphisme ; elle est une base. Pour retrouver l'appartenance demandée, développons $L^{-1}(E_{i,j})$ dans la base canonique et appliquons L : on obtient une combinaison linéaire des $X_k^t(Y_\ell)$ égale à $E_{i,j}$.

Le développement explicite respecte la démarche de l'énoncé ; l'isomorphisme donne une interprétation pratique pour les changements de bases matriciels.

9. Puisque A est diagonalisable, il existe une base $(X_1, \dots, X_n)$ de vecteurs propres de A .

La question 6 assure également l'existence d'une base $(Y_1, \dots, Y_n)$ de vecteurs propres de ^tA .

Notons λ_i et μ_j les valeurs propres associées. Par la question 7 :

$$\Phi_A(X_i {}^t(Y_j)) = (\lambda_i - \mu_j) X_i {}^t(Y_j).$$

La question 8 montre que les n^2 matrices $X_i {}^t(Y_j)$ forment une base de $M_n(\mathbb{R})$. Cette base est entièrement constituée de vecteurs propres de Φ_A .

Conclusion

Φ_A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

10. La base propre construite à la question 9 donne une matrice diagonale de Φ_A dont les coefficients sont les $\lambda_i - \mu_j$.

Pour préciser que cette liste est exhaustive, soit

$$M = \sum_{i,j} a_{i,j} X_i {}^t(Y_j) \neq 0$$

un vecteur propre de valeur propre ν . L'égalité $\Phi_A(M) = \nu M$ et l'indépendance de la base donnent :

$$\forall (i, j), \quad (\lambda_i - \mu_j - \nu) a_{i,j} = 0.$$

Au moins un coefficient $a_{i,j}$ est non nul, donc $\nu = \lambda_i - \mu_j$ pour ce couple.

Réciproquement, toute différence $\lambda_i - \mu_j$ est une valeur propre par la question 7.

Les ensembles des valeurs propres de A et de ${}^tA$ coïncident par la question 6. Ainsi :

$$\text{Sp}(\Phi_A) = \{\lambda - \mu : \lambda, \mu \in \text{Sp}(A)\}.$$

Les répétitions éventuelles des différences ne modifient pas cet ensemble. En particulier, 0 est une valeur propre, conformément à la question 2.

Partie IV : Étude d'un sous-espace propre de Φ_A associé à une valeur propre non nulle

11. Nous suivons la récurrence demandée. La convention est $T^0 = I_n$.

Pour $k = 0$, $\Phi_A(T^0) = \Phi_A(I_n) = 0 = \lambda \cdot 0 \cdot T^0$. La propriété est initialisée.

Pour toutes matrices M, N , un développement direct donne l'identité :

$$\Phi_A(MN) = AMN - MNA = (AM - MA)N + M(AN - NA) = \Phi_A(M)N + M\Phi_A(N).$$

Supposons, pour un entier $k \geq 0$, que $\Phi_A(T^k) = \lambda k T^k$. Puisque $\Phi_A(T) = \lambda T$, l'identité précédente donne :

$$\Phi_A(T^{k+1}) = \Phi_A(T^k)T + T^k\Phi_A(T) = \lambda k T^{k+1} + \lambda T^{k+1} = \lambda(k+1)T^{k+1}.$$

La propriété est héréditaire. Par récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\Phi_A(T^k) = \lambda k T^k$.

Cette identité reste valable lorsque $T^k = 0$; dans ce cas, elle ne fait pas de la matrice nulle un vecteur propre.

12. Supposons par l'absurde que $T^q \neq 0$ pour tout $q \in \llbracket 1, n^2 \rrbracket$.

La matrice $T^0 = I_n$ est aussi non nulle. La question 11 montre alors que les $n^2 + 1$ matrices :

$$I_n, T, T^2, \dots, T^{n^2}$$

sont des vecteurs propres de Φ_A , associés aux valeurs propres $0, \lambda, 2\lambda, \dots, n^2\lambda$.

Comme $\lambda \neq 0$, ces valeurs propres sont deux à deux distinctes. Le théorème

d'indépendance des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes montre que la famille est libre.

Mais elle comporte $n^2 + 1$ éléments dans un espace de dimension n^2 , ce qui est impossible. Il existe donc $q \in \llbracket 1, n^2 \rrbracket$ tel que $T^q = 0$.

L'ensemble des exposants strictement positifs annulant T est non vide. Son plus petit élément p vérifie $T^p = 0$ et $T^{p-1} \neq 0$; de plus, $p \leq n^2$. Puisque $T \neq 0$, on a en fait $p \geq 2$.

13. La matrice T^{p-1} est non nulle, donc au moins une de ses colonnes est non nulle. Si cette colonne est la j -ième, on peut choisir $X = V_j$, car $T^{p-1}V_j$ est précisément cette colonne.

Fixons ainsi un vecteur X vérifiant $T^{p-1}X \neq 0$.

Supposons qu'une combinaison linéaire s'annule :

$$\sum_{k=0}^{p-1} a_k T^k X = 0.$$

Si les coefficients ne sont pas tous nuls, soit r le plus petit indice tel que $a_r \neq 0$.

Multiplions l'égalité par T^{p-1-r} .

Pour $k < r$, le coefficient a_k est nul. Pour $k > r$, l'exposant $p-1-r+k$ est au moins p ; la puissance de T correspondante est nulle, puisque $T^p = 0$. Il reste :

$$a_r T^{p-1} X = 0.$$

C'est impossible, car $a_r \neq 0$ et $T^{p-1}X \neq 0$. Tous les coefficients sont donc nuls, ce qui établit que $(X, TX, \dots, T^{p-1}X)$ est libre.

Cette famille libre comporte p vecteurs dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$, de dimension n . Par conséquent, $p \leq n$.

Partie V : Étude du cas où A est symétrique

14. Nous vérifions les propriétés d'un produit scalaire réel.

Les sommes définissant $(M | N)$ sont finies. Pour $M, M', N \in M_n(\mathbb{R})$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$(\alpha M + \beta M' | N) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\alpha m_{i,j} + \beta m'_{i,j}) n_{i,j} = \alpha (M | N) + \beta (M' | N).$$

Il y a donc linéarité en la première variable. La symétrie $(M | N) = (N | M)$ provient de $m_{i,j} n_{i,j} = n_{i,j} m_{i,j}$; elle entraîne aussi la linéarité en la seconde variable.

Enfin :

$$(M | M) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{i,j}^2 \geq 0.$$

Cette somme de carrés est nulle si et seulement si chaque coefficient $m_{i,j}$ est nul, donc si et seulement si $M = 0$.

Ainsi l'application est bilinéaire, symétrique et définie positive : c'est un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$.

15. Le produit scalaire avec I_n sélectionne les coefficients diagonaux. Pour chaque i , la formule du produit matriciel donne :

$$(M^t N)_{i,i} = \sum_{j=1}^n m_{i,j} ({}^t N)_{j,i} = \sum_{j=1}^n m_{i,j} n_{i,j}.$$

En sommant ces coefficients diagonaux :

$$(M^t N | I_n) = \sum_{i=1}^n (M^t N)_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{i,j} n_{i,j} = (M | N).$$

L'identité est donc établie pour toutes matrices M, N de l'espace. Elle exprime aussi $(M | N) = \text{Tr}(M^t N)$, par définition de la trace.

16. La matrice P est orthogonale, donc $P^{-1} = {}^t P$ et ${}^t P P = I_n$.

Le coefficient de position (i, j) de ${}^t P P$ est le produit de la ligne ${}^t(C_i)$ par la colonne C_j .
Donc :

$${}^t(C_i)C_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

En notant $\delta_{i,j}$ cette valeur, ${}^t(C_i)C_j = \delta_{i,j}$. Le produit, initialement une matrice de taille 1×1 , est identifié à son coefficient réel. Les colonnes de P constituent ainsi une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

17. Notons $c_{r,i}$ le coefficient de la r -ième ligne de la colonne C_i . Pour tout $r \in \llbracket 1, n \rrbracket$, le coefficient diagonal de position (r, r) de $C_i {}^t(C_j)$ vaut :

$$(C_i {}^t(C_j))_{r,r} = c_{r,i} c_{r,j}.$$

En faisant le produit scalaire avec I_n , on somme ces coefficients :

$$(C_i {}^t(C_j) | I_n) = \sum_{r=1}^n c_{r,i} c_{r,j} = {}^t(C_i)C_j = \delta_{i,j}.$$

Cette valeur vaut donc 1 si $i = j$, et 0 sinon. L'annulation de la somme pour $i \neq j$ ne signifie pas que chacun des coefficients diagonaux soit nul.

18. Nous pouvons utiliser les identités précédentes ou calculer directement avec les coefficients.

Méthode 1 — Produit matriciel et questions 15 à 17

Comme ${}^t(C_k {}^t(C_\ell)) = C_\ell {}^t(C_k)$, la question 15 donne :

$$(C_i {}^t(C_j) \mid C_k {}^t(C_\ell)) = (C_i {}^t(C_j) C_\ell {}^t(C_k) \mid I_n).$$

La question 16 donne ${}^t(C_j) C_\ell = \delta_{j,\ell}$. Par associativité et bilinéarité :

$$(C_i {}^t(C_j) \mid C_k {}^t(C_\ell)) = \delta_{j,\ell} (C_i {}^t(C_k) \mid I_n) = \delta_{j,\ell} \delta_{i,k}.$$

Méthode 2 — Factorisation d'une somme finie

Le coefficient de position (r, s) de $C_i {}^t(C_j)$ est $c_{r,i} c_{s,j}$. Ainsi :

$$(C_i {}^t(C_j) \mid C_k {}^t(C_\ell)) = \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n c_{r,i} c_{s,j} c_{r,k} c_{s,\ell}.$$

Les sommes étant finies, on peut regrouper les facteurs suivant leurs indices :

$$(C_i {}^t(C_j) \mid C_k {}^t(C_\ell)) = \left(\sum_{r=1}^n c_{r,i} c_{r,k} \right) \left(\sum_{s=1}^n c_{s,j} c_{s,\ell} \right) = ({}^t(C_i) C_k) ({}^t(C_j) C_\ell) = \delta_{i,k} \delta_{j,\ell}.$$

Conclusion commune : le produit scalaire vaut 1 si $i = k$ et $j = \ell$, et 0 dans tous les autres cas. Le produit matriciel suit la progression du sujet ; le calcul par coefficients met en évidence les deux orthogonalités indépendantes.

19. Par la question 18, les matrices de $\mathcal{G}$ ont chacune une norme égale à 1 et sont deux à deux orthogonales pour des couples d'indices distincts. La famille $\mathcal{G}$ est donc orthonormée.

Pour justifier qu'elle est libre, supposons

$$\sum_{i,j} a_{i,j} C_i {}^t(C_j) = 0.$$

Le produit scalaire avec $C_k {}^t(C_\ell)$, puis la question 18, donnent $a_{k,\ell} = 0$ pour tout couple (k, ℓ) . Tous les coefficients sont donc nuls.

Cette famille libre comporte n^2 matrices dans un espace de dimension n^2 ; elle est donc une base orthonormée de $M_n(\mathbb{R})$.

Écrivons maintenant $D = P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Comme $AP = PD$, ses colonnes vérifient $AC_i = \lambda_i C_i$. La symétrie de A implique ${}^tAC_j = AC_j = \lambda_j C_j$.

La question 7 donne alors :

$$\Phi_A(C_i {}^t(C_j)) = (\lambda_i - \lambda_j) C_i {}^t(C_j).$$

Chaque matrice est non nulle, puisque sa norme vaut 1. Ainsi $\mathcal{G}$ est constituée de vecteurs propres de Φ_A , associés aux valeurs propres $\lambda_i - \lambda_j$. L'endomorphisme possède donc une base orthonormée de vecteurs propres pour le produit scalaire défini dans cette partie.

Relevé des adaptations

Problème 1, question 16 : ajout de la demande de calcul exact de la hessienne et d'étude des signes de ses valeurs propres. Les approximations données dans le sujet sont conservées. Cette formulation impose une justification exacte conforme au programme actuel pour la classification du point critique et la recherche des extrema locaux.