



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques 1

2013

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Problème 1

Partie I : Étude d'une fonction f définie par une intégrale

1. Montrer que, pour tout $x \in]0; +\infty[$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt$ converge.

On note $f :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in]0; +\infty[$, par :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt.$$

2. Montrer : $\forall x \in]0; +\infty[, \quad f(x) \geq \int_0^1 \frac{e^{-t}}{x+t} dt$. En déduire : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$.

3. Montrer : $\forall x \in]0; +\infty[, \quad 0 < f(x) \leq \frac{1}{x}$. En déduire : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

4. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} te^{-t} dt$ converge et que :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad \left| f(x) - \frac{1}{x} \right| \leq \frac{1}{x^2} \int_0^{+\infty} te^{-t} dt.$$

En déduire : $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$.

Partie II : Une autre expression intégrale de f

A — Dérivabilité et expression de la dérivée de f sous forme d'une intégrale

5. Soit $(x, h) \in]0; +\infty[\times \mathbb{R}^*$ tel que $h > -\frac{x}{2}$.

5.a. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt$ converge.

5.b. Établir :

$$\forall t \in [0; +\infty[, \quad \left| \frac{1}{h} \left(\frac{1}{x+h+t} - \frac{1}{x+t} \right) + \frac{1}{(x+t)^2} \right| \leq \frac{2|h|}{x^3}.$$

5.c. En déduire :

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt \right| \leq \frac{2|h|}{x^3}.$$

6. En déduire que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad f'(x) = - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt.$$

7. Montrer, pour tout $x \in]0; +\infty[$ et tout $(\varepsilon, A) \in]0; 1] \times [1; +\infty[$:

$$\int_{\varepsilon}^A \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt = -\frac{e^{-A}}{x+A} + \frac{e^{-\varepsilon}}{x+\varepsilon} - \int_{\varepsilon}^A \frac{e^{-t}}{x+t} dt.$$

8. En déduire : $\forall x \in]0; +\infty[, \quad f'(x) = -\frac{1}{x} + f(x).$

9. Montrer que f est de classe C^2 sur $]0; +\infty[$ et que :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad f''(x) = \frac{1}{x^2} + f'(x).$$

B — Intervention d'une fonction auxiliaire g

On note $g :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in]0; +\infty[$, par : $g(x) = e^{-x} f(x).$

10. Démontrer que g est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que : $\forall x \in]0; +\infty[, \quad g'(x) = -\frac{e^{-x}}{x}.$

11. Montrer que, pour tout $x \in]0; +\infty[$, l'intégrale $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$ converge et que :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad g(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du,$$

puis :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad f(x) = e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du.$$

12. Montrer : $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}.$

13. Quelle est la nature de la série

$$\sum_{n \geq 1} n^2 \int_n^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$$

?

Partie III : Étude d'une densité

On note $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $t \in \mathbb{R}$, par :

$$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{f(1)} \frac{e^{-t}}{1+t} & \text{si } t \geq 0, \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

14. Montrer que h est une densité.

15. Soit X une variable aléatoire réelle admettant h pour densité. Montrer que X admet une espérance et calculer $E(X)$ à l'aide de $f(1)$.

Problème 2

Dans tout le problème, n est un entier tel que $n \geq 2$.

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre n et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles à une colonne et n lignes, nommées « matrices colonnes » dans la suite du problème.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors ${}^tA$ désigne la matrice transposée de A .

Si $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors ${}^tV$ désigne la matrice transposée de V .

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et si $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, alors le coefficient de la ligne numéro i et de la colonne numéro j de A est noté $a_{i,j}$; la matrice A est notée $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$.

Si

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),$$

alors la matrice colonne V est notée $V = (v_i)_{1 \leq i \leq n}$.

Si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $C_j(A)$ la matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée des coefficients de la colonne numéro j de A . Ainsi : $C_j(A) = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n}$.

Partie I : Un exemple

$$\text{Soient } U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, V_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } A_0 = U_0 {}^t(V_0).$$

1. Vérifier que 0 est valeur propre de A_0 et déterminer une base du sous-espace propre associé.
- 2.a. Calculer $A_0 U_0$.
- 2.b. Montrer que A_0 est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

2.c. Déterminer une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et une matrice inversible P de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telles que $A_0 = PDP^{-1}$.

Partie II : Trace d'une matrice carrée

Pour toute matrice carrée $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle trace de A et on note $\text{Tr}(A)$ la somme des coefficients diagonaux de A , c'est-à-dire

$$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}.$$

3. Montrer que l'application $\text{Tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, A \mapsto \text{Tr}(A)$, est linéaire.

4. Montrer : $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, \quad \text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.

5. Vérifier :

$$\forall A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \text{Tr}({}^tAA) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{j,i}^2.$$

Partie III : Une caractérisation des matrices de rang 1

6. Soient $U = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $V = (v_i)_{1 \leq i \leq n}$ deux matrices colonnes non nulles de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

6.a. Justifier : $U^tV \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer les coefficients de U^tV à l'aide des coefficients de U et de V .

6.b. Exprimer $\text{Tr}(U^tV)$ à l'aide des coefficients de U et de V .

6.c. Quel est le rang de U^tV ?

7. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.

7.a. Montrer qu'il existe $j_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, il existe $\alpha_j \in \mathbb{R}$ vérifiant : $C_j(A) = \alpha_j C_{j_0}(A)$.

7.b. En déduire qu'il existe deux matrices colonnes non nulles U et V de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $A = UV$.

8. Énoncer une caractérisation des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1.

Partie IV : Une application en probabilités

On considère deux variables aléatoires X et Y définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On suppose de plus : $X(\Omega) = Y(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$.

On note, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $m_{i,j} = P((X = i) \cap (Y = j))$, puis :

$$M = (m_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),$$

$$U_X = (P(X = i))_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ et } U_Y = (P(Y = i))_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$

9. On suppose, dans cette question, que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes. Calculer $U_X {}^t U_Y$. En déduire que la matrice M est de rang 1.

10. On suppose, dans cette question, que la matrice M est de rang 1.

10.a. Montrer : $C_1(M) + \dots + C_n(M) = U_X$.

10.b. En déduire que, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, il existe $\beta_j \in \mathbb{R}$ tel que $C_j(M) = \beta_j U_X$.

10.c. Montrer : $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(Y = j) = \beta_j$.

10.d. En déduire que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

Partie V : Une caractérisation des matrices de rang 1 diagonalisables

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1. On note U et V deux matrices colonnes non nulles de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $A = U^t V$ et on note $a = \text{Tr}(A)$.

11. Montrer que 0 est valeur propre de A et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.
12. Montrer : ${}^t V U = (a)$, puis : $A^2 = aA$.
13. Montrer que, si $a = 0$, alors A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
14. On suppose $a \neq 0$. Calculer AU . Dédurre des questions précédentes que A est diagonalisable.
15. Énoncer une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1 soit diagonalisable.

Partie VI : Construction d'un produit scalaire et d'un endomorphisme symétrique

16. Montrer que l'application $(M, N) \mapsto \langle M, N \rangle = \text{Tr}({}^t M N)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On munit dorénavant $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de ce produit scalaire.

On considère une matrice colonne $V = (v_j)_{1 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que

$$\sum_{j=1}^n v_j^2 = 1.$$

On note $S = V {}^t V$.

17. Montrer que S est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que $S^2 = S$.

18.a. Montrer que l'application $\Phi : M \mapsto SM$ est un endomorphisme symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

18.b. Vérifier $\Phi^2 = \Phi$. Que peut-on dire des valeurs propres de Φ ?

18.c. On note ι l'application identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que les sous-espaces vectoriels $\text{Ker}(\Phi)$ et $\text{Ker}(\Phi - \iota)$ sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.