



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques 1

2012

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

PROBLÈME 1

Partie I : Interpolation polynomiale

1. Méthode 1 — Noyau et dimensions.

Pour tous $P, Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, l'évaluation en chaque a_i donne

$$\varphi(\alpha P + \beta Q) = \alpha \varphi(P) + \beta \varphi(Q).$$

Ainsi, φ est linéaire. Si $P \in \text{Ker } \varphi$, alors P s'annule aux n points distincts $a_1, \dots, a_n$. Un polynôme non nul de degré au plus $n - 1$ ne peut avoir n racines distinctes ; donc $P = 0$. L'application est injective.

Les espaces de départ et d'arrivée ont la même dimension n : une base du premier est $(1, X, \dots, X^{n-1})$. Le théorème du rang donne alors la surjectivité. Par conséquent, φ est un isomorphisme.

Méthode 2 — Construction d'un inverse.

Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, posons

$$L_i(X) = \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}.$$

Les dénominateurs sont non nuls puisque les a_j sont distincts, et $L_i \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. On a $L_i(a_i) = 1$ et $L_i(a_j) = 0$ pour $j \neq i$.

L'application $\psi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_{n-1}[X]$ définie par

$$\psi(b_1, \dots, b_n) = \sum_{i=1}^n b_i L_i$$

satisfait $\varphi \circ \psi = \text{Id}_{\mathbb{R}^n}$. Pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, le polynôme $P - \psi(\varphi(P))$ s'annule aux n points a_i et a un degré au plus $n - 1$: il est nul. Donc $\psi \circ \varphi = \text{Id}_{\mathbb{R}_{n-1}[X]}$.

Ainsi, φ est un isomorphisme d'inverse ψ . La première méthode est plus courte ; la seconde fournit une formule utilisable pour construire effectivement le polynôme interpolateur.

2. Comme φ est bijective, tout $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ possède un unique antécédent $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Par définition de φ , cet antécédent vérifie exactement $P(a_i) = b_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

Le polynôme demandé existe donc et est unique. Avec la construction précédente, il s'écrit

$$P = \sum_{i=1}^n b_i L_i.$$

3. Méthode 1 — Résolution sur les coefficients.

Écrivons $P_0(X) = \alpha X^3 + \beta X^2 + \gamma X + \delta$. Les quatre conditions donnent

$$\delta = 1, \quad \alpha + \beta + \gamma = 2, \quad 8\alpha + 4\beta + 2\gamma = 10, \quad 27\alpha + 9\beta + 3\gamma = 30.$$

En divisant les deux dernières équations par 2 et 3, puis en soustrayant la deuxième, on obtient $3\alpha + \beta = 3$ et $8\alpha + 2\beta = 8$. La différence entre la dernière et deux fois la précédente donne $2\alpha = 2$.

Donc $\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = 1$ et $\delta = 1$. Ainsi,

$$P_0(X) = X^3 + X + 1.$$

Les évaluations sont respectivement 1, 3, 11 et 31 ; l'unicité découle de la question 2 avec les quatre points 0, 1, 2, 3.

Méthode 2 — Base adaptée aux points d'interpolation.

La famille $(1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2))$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$: ses éléments ont des degrés distincts 0, 1, 2, 3 et des coefficients dominants non nuls. Cherchons donc

$$P_0(X) = u + vX + wX(X-1) + zX(X-1)(X-2).$$

L'évaluation en 0 donne $u = 1$. En 1, elle donne $1 + v = 3$, donc $v = 2$. En 2, elle donne $1 + 4 + 2w = 11$, donc $w = 3$. En 3, elle donne $1 + 6 + 18 + 6z = 31$, donc $z = 1$.

Ainsi,

$$P_0(X) = 1 + 2X + 3X(X-1) + X(X-1)(X-2) = X^3 + X + 1.$$

Cette base permet de déterminer les coefficients successivement, sans résoudre simultanément tout le système.

Partie II : Polynômes spéciaux

1. Le polynôme $P(X) = X$ appartient à E : pour tout $x > 0$, $P(x) = x > 0$ et $P'(x) = 1 > 0$.

2. Soient $\alpha > 0$ et $P, Q \in E$. Pour tout $x > 0$,

$$\alpha P(x) > 0, \quad (\alpha P)'(x) = \alpha P'(x) > 0.$$

De même,

$$(P + Q)(x) > 0, \quad (P + Q)'(x) = P'(x) + Q'(x) > 0.$$

Enfin,

$$(PQ)(x) > 0, \quad (PQ)'(x) = P'(x)Q(x) + P(x)Q'(x) > 0.$$

Toutes ces expressions sont polynomiales ; on a donc $\alpha P, P + Q, PQ \in E$.

Cependant, le polynôme nul n'appartient pas à E . Or tout sous-espace vectoriel contient le vecteur nul. Ainsi, E n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

3. Si

$$P(X) = \sum_{j=0}^d c_j X^j,$$

alors

$$P_1(X) = \sum_{j=0}^d \frac{c_j}{j+1} X^{j+1}.$$

Donc P_1 est un polynôme. Le théorème fondamental du calcul intégral s'applique puisque P est continue, et donne $P'_1 = P$. Pour $x > 0$, on a donc $P'_1(x) = P(x) > 0$.

De plus, la continuité de P en 0 et sa positivité sur $]0; +\infty[$ impliquent $P(0) \geq 0$. Sur $[0, x]$, P est positive ou nulle et strictement positive sur $]0, x]$. Son intégrale est strictement positive. Par exemple, son minimum sur $[x/2, x]$ existe et est strictement positif, ce qui minore cette intégrale par un réel strictement positif.

Donc $P_1(x) > 0$ pour $x > 0$, et $P_1 \in E$.

4. Méthode 1 — Accroissements finis.

Pour $x > 0$, P est continue sur $[0, x]$ et dérivable sur $]0, x[$. Il existe $c \in]0, x[$ tel que

$$P(x) - P(0) = xP'(c) > 0.$$

Pour $x = 0$, on a l'égalité. Ainsi, pour tout $x \geq 0$, $P(x) \geq P(0)$.

Méthode 2 — Intégration de la dérivée.

La dérivée P' est continue. Sa positivité sur $]0; +\infty[$ implique $P'(0) \geq 0$ par continuité.

Pour $x > 0$,

$$P(x) - P(0) = \int_0^x P'(t) dt > 0,$$

car l'intégrande est strictement positive à l'intérieur de l'intervalle. L'égalité est obtenue pour $x = 0$. On retrouve la même conclusion. Cette seconde approche se réutilise pour des comparaisons quantitatives par intégration.

5. La fonction $\tilde{P}$ est continue sur $[0; +\infty[$ et strictement croissante : pour $0 \leq u < v$, le théorème des accroissements finis donne $P(v) - P(u) = (v - u)P'(c) > 0$ avec $c \in]u, v[$.

Il reste à vérifier sa limite en $+\infty$. Le polynôme P n'est pas constant puisque $P' > 0$ sur $]0; +\infty[$. Si son degré est $d \geq 1$ et son coefficient dominant est c_d , alors $P(x)/x^d \rightarrow c_d$.

Comme $P(x) > 0$ pour $x > 0$, ce coefficient dominant, non nul, est positif. Donc $P(x) \rightarrow +\infty$.

Pour chaque $b > P(0)$, il existe $M > 0$ tel que $P(M) > b$; le théorème des valeurs intermédiaires sur $[0, M]$ fournit un antécédent de b . La valeur $P(0)$ a pour antécédent 0. La stricte croissance assure l'unicité de chaque antécédent.

Ainsi, $\tilde{P}$ est une bijection de $[0; +\infty[$ sur $[P(0); +\infty[$.

6. Supposons que $\tilde{P}^{-1}$ soit la restriction d'un polynôme réel R . Pour tout $x \geq 0$, on aurait $R(P(x)) = x$. Le polynôme $R \circ P - X$ aurait donc une infinité de racines réelles, et serait identiquement nul.

Le polynôme R ne peut être constant puisque sa restriction est une bijection vers $[0; +\infty[$. Ainsi, $\deg R \geq 1$. Pour deux polynômes non constants, les termes dominants donnent

$$\deg(R \circ P) = \deg R \times \deg P \geq 2.$$

Cela contredit $R \circ P = X$, de degré 1. Par conséquent, lorsque $\deg P \geq 2$, la fonction réciproque $\tilde{P}^{-1}$ n'est pas polynomiale.

Partie III : Matrices symétriques positives

1. La matrice A est réelle et symétrique. Le théorème spectral réel s'applique : il existe une matrice orthogonale O et une matrice diagonale réelle D telles que $A = OD^tO$. En particulier, A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. a. Soient λ une valeur propre de $A \in S_n^+$ et $U \neq 0$ un vecteur propre associé. On a

$${}^tU AU = \lambda {}^tU U.$$

Par définition de S_n^+ , le membre de gauche est positif ou nul. Comme $U \neq 0$,

$${}^tU U = \sum_{j=1}^n u_j^2 > 0.$$

En divisant par ce nombre strictement positif, on obtient $\lambda \geq 0$.

Toutes les valeurs propres de A appartiennent donc à $[0; +\infty[$.

2. b. Par le théorème spectral, écrivons $A = OD^tO$ avec O orthogonale et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Pour tout vecteur colonne U , posons $V = {}^tOU$. Alors

$${}^tUAU = {}^tVDV = \sum_{j=1}^n \lambda_j v_j^2 \geq 0,$$

puisque toutes les λ_j sont positives ou nulles. La matrice A est déjà supposée symétrique ; ainsi, $A \in S_n^+$.

Partie IV : Matrice symétrique positive solution d'une équation polynomiale spéciale

1. On suppose que $S \in S_n^+$ vérifie $P(S) = A$, et on pose $\Delta = Q^{-1}SQ$.

1. a. Écrivons

$$P(X) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j X^j.$$

Pour chaque j , les matrices S et S^j commutent. Donc

$$SP(S) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j S^{j+1} = P(S)S.$$

Comme $P(S) = A$, on obtient $SA = AS$. En multipliant cette égalité à gauche par Q^{-1} et à droite par Q , puis en utilisant $A = QDQ^{-1}$ et $\Delta = Q^{-1}SQ$, on obtient $\Delta D = D\Delta$.

1. b. Notons δ_{ij} le coefficient de Δ à la ligne i , colonne j . L'égalité précédente donne

$$\delta_{ij}\lambda_j = \lambda_i\delta_{ij}, \quad \text{donc} \quad (\lambda_j - \lambda_i)\delta_{ij} = 0.$$

Pour $i \neq j$, les valeurs propres étant distinctes, $\lambda_j - \lambda_i \neq 0$; ainsi, $\delta_{ij} = 0$. Donc Δ est diagonale.

Si e_i est le i -ième vecteur de la base canonique, alors $Qe_i \neq 0$ et

$$S(Qe_i) = Q\Delta e_i = \delta_{ii}Qe_i.$$

Chaque δ_{ii} est donc une valeur propre de S . Comme $S \in S_n^+$, la partie III 2. a. donne $\delta_{ii} \geq 0$.

Ainsi, Δ est diagonale à coefficients diagonaux positifs ou nuls. Cette conclusion n'exige pas que la matrice Q donnée soit orthogonale.

2. Posons $\mu_i = \tilde{P}^{-1}(\lambda_i)$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$. Ces réels sont bien définis grâce à la partie II 5 et à l'hypothèse $\lambda_i \geq P(0)$. Ils appartiennent à $[0; +\infty[$ et vérifient $P(\mu_i) = \lambda_i$.

Unicité.

Pour toute solution $S \in S_n^+$, la question 1 donne $Q^{-1}SQ = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ avec $d_i \geq 0$. La compatibilité des polynômes de matrices avec la similitude donne

$$Q^{-1}P(S)Q = P(Q^{-1}SQ) = \text{diag}(P(d_1), \dots, P(d_n)) = D.$$

Donc $P(d_i) = \lambda_i$. La bijectivité de $\tilde{P}$ impose $d_i = \mu_i$ pour tout i . Il ne peut donc exister qu'une solution, à savoir

$$S = Q\Delta Q^{-1}, \quad \Delta = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n).$$

Méthode 1 — Existence par interpolation.

Par la partie I 2, il existe un polynôme réel $R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $R(\lambda_i) = \mu_i$ pour tout i .

Alors

$$R(A) = QR(D)Q^{-1} = Q\Delta Q^{-1}.$$

Posons $S = R(A)$. Chaque puissance de la matrice symétrique A est symétrique, car ${}^t(A^j) = ({}^tA)^j = A^j$. Une combinaison linéaire réelle de ces puissances est donc symétrique : S est symétrique.

Les colonnes de Q forment une base de vecteurs propres de S , de valeurs propres respectives $\mu_i \geq 0$. La partie III 2. b. donne $S \in S_n^+$. Enfin,

$$P(S) = QP(\Delta)Q^{-1} = QDQ^{-1} = A.$$

La solution existe et est unique. L'interpolation permet ici de prouver la symétrie de $Q\Delta Q^{-1}$ sans supposer Q orthogonale.

Méthode 2 — Existence par normalisation des vecteurs propres.

Notons q_i les colonnes de Q . Elles vérifient $Aq_i = \lambda_i q_i$. Puisque A est symétrique et les λ_i distinctes, les q_i sont deux à deux orthogonales. Explicitement, pour $i \neq j$,

$$\lambda_i {}^t(q_i)q_j = {}^t(Aq_i)q_j = {}^t(q_i)Aq_j = \lambda_j {}^t(q_i)q_j,$$

d'où ${}^t(q_i)q_j = 0$. Chacune des colonnes est non nulle puisque Q est inversible. Posons $c_i = \|q_i\| > 0$, $C = \text{diag}(c_1, \dots, c_n)$ et $O = QC^{-1}$. Les colonnes de O sont orthonormales, donc O est orthogonale et $Q = OC$.

Les matrices diagonales C et Δ commutent ; ainsi,

$$Q\Delta Q^{-1} = OC\Delta C^{-1}O = O\Delta^tO.$$

Cette matrice est symétrique, et pour tout U ,

$${}^tUO\Delta^tOU = \sum_{i=1}^n \mu_i (({}^tOU)_i)^2 \geq 0.$$

Elle appartient donc à S_n^+ . Comme $A = OD^tO$ et $P(\Delta) = D$, elle vérifie également $P(S) = A$. Cette approche donne directement une représentation dans une base orthonormale.

3. Exemple : $n = 4$, $P(X) = X^3 + X + 1$, avec la matrice A donnée dans le sujet.

3. a. Pour $x > 0$, $P(x) = x^3 + x + 1 > 0$ et $P'(x) = 3x^2 + 1 > 0$. Donc $P \in E$.

3. b. Cherchons des vecteurs propres explicites, sans calcul de déterminant. Posons

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le produit matriciel donne

$$Av_1 = v_1, \quad Av_2 = 3v_2, \quad Av_3 = 11v_3, \quad Av_4 = 31v_4.$$

Ces quatre vecteurs non nuls sont deux à deux orthogonaux, donc forment une base de $\mathbb{R}^4$. Les valeurs propres sont exactement 1, 3, 11, 31.

La matrice A est symétrique et toutes ses valeurs propres sont strictement positives. Par la partie III 2. b., $A \in S_4^+$.

3. c. Chacun des v_i a pour norme $\sqrt{2}$. Prenons

$$D = \text{diag}(1, 3, 11, 31), \quad Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les colonnes de Q sont orthonormales, donc ${}^tQQ = I_4$ et $Q^{-1} = {}^tQ$. Les relations de la question précédente donnent $AQ = QD$, soit $A = QDQ^{-1}$.

3. d. Ici, $P(0) = 1$ et les valeurs propres de A sont toutes dans $[1; +\infty[$. Les hypothèses de la question 2 sont donc satisfaites. Les évaluations de la partie I 3 donnent

$$\tilde{P}^{-1}(1) = 0, \quad \tilde{P}^{-1}(3) = 1, \quad \tilde{P}^{-1}(11) = 2, \quad \tilde{P}^{-1}(31) = 3.$$

La solution unique est $S = Q \text{diag}(0, 1, 2, 3) {}^tQ$. Sur les deux blocs de taille 2, le calcul donne respectivement

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

Elle est symétrique, de valeurs propres 0, 1, 2, 3, donc appartient à S_4^+ . Dans la même base de vecteurs propres, $S^3 + S + I_4$ a pour valeurs diagonales 1, 3, 11, 31, ce qui vérifie $P(S) = A$.

PROBLÈME 2

Partie I : Formule de Stirling

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrande est continue sur le segment $[0, \pi/2]$, donc W_n est bien définie. Pour $n = 0$, on considère la fonction constante 1 ; ainsi,

$$W_0 = \int_0^{\pi/2} 1 \, dt = \frac{\pi}{2}, \quad W_1 = \int_0^{\pi/2} \cos t \, dt = [\sin t]_0^{\pi/2} = 1.$$

2. a. Pour $t \in [0, \pi/2]$, $0 \leq \cos t \leq 1$. Donc, pour tout $n \geq 0$,

$$(\cos t)^{n+1} \leq (\cos t)^n.$$

Par croissance de l'intégrale, $W_{n+1} \leq W_n$. La suite est décroissante. En fait, l'inégalité entre les intégrandes est stricte pour $t \in]0, \pi/2[$, donc la décroissance est stricte.

2. b. Sur $[0, \pi/4]$, $\cos t \geq 1/\sqrt{2}$. L'intégrande étant positive ou nulle sur le reste du segment,

$$W_n \geq \int_0^{\pi/4} (\cos t)^n dt \geq \frac{\pi}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n > 0.$$

Ainsi, $W_n > 0$ pour tout $n \geq 0$.

3. a. Écrivons $W_{n+2} = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^{n+1} \cos t dt$. Une intégration par parties sur ce segment, avec $u(t) = (\cos t)^{n+1}$ et $v'(t) = \cos t$, donne

$$W_{n+2} = [(\cos t)^{n+1} \sin t]_0^{\pi/2} + (n+1) \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n \sin^2 t dt.$$

Le terme de bord est nul. Comme $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t$,

$$W_{n+2} = (n+1)(W_n - W_{n+2}).$$

D'où, pour tout $n \geq 0$,

$$(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n.$$

3. b. Posons $B_n = (n+1)W_{n+1}W_n$. En utilisant 3. a.,

$$B_{n+1} = (n+2)W_{n+2}W_{n+1} = (n+1)W_nW_{n+1} = B_n.$$

La suite (B_n) est constante, donc

$$(n+1)W_{n+1}W_n = B_0 = W_1W_0 = \frac{\pi}{2}.$$

4. a. La décroissance donne $W_n \geq W_{n+1} \geq W_{n+2}$. La relation de 3. a. remplace le dernier terme par $\frac{n+1}{n+2}W_n$. Ainsi,

$$W_n \geq W_{n+1} \geq \frac{n+1}{n+2}W_n.$$

4. b. Comme $W_n > 0$, on peut diviser l'encadrement précédent par W_n :

$$\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1.$$

Les deux bornes tendent vers 1, donc $W_{n+1}/W_n \rightarrow 1$, c'est-à-dire $W_{n+1} \sim W_n$.

La relation 3. b. donne exactement

$$W_n^2 = \frac{\pi}{2(n+1)} \frac{W_n}{W_{n+1}}.$$

Le dernier rapport tend vers 1, et $(n+1)/n \rightarrow 1$. Donc $W_n^2 \sim \pi/(2n)$. Puisque $W_n > 0$, prendre les racines carrées donne

$$W_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

5. La relation 3. a. avec l'indice $2j-2$ donne, pour $j \geq 1$,

$$W_{2j} = \frac{2j-1}{2j} W_{2j-2}.$$

En itérant et en utilisant $W_0 = \pi/2$, on obtient

$$W_{2n} = \frac{\pi}{2} \prod_{j=1}^n \frac{2j-1}{2j}.$$

Le produit des entiers pairs est

$$\prod_{j=1}^n 2j = 2^n n!.$$

Le produit des entiers impairs vaut $(2n)!/(2^n n!)$. Donc

$$W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \frac{\pi}{2}.$$

Pour $n = 0$, la formule reste vraie avec $0! = 1$ et la convention du produit vide égal à 1.

6. Pour $n \geq 2$, $1 - 1/n > 0$, donc a_n est bien défini. Le développement limité usuel du logarithme en 0 donne

$$\ln(1 - u) = -u - \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} + o(u^3).$$

En l'évaluant en $u = 1/n$, puis en multipliant, on obtient

$$\left(n - \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -1 - \frac{1}{2n} - \frac{1}{3n^2} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2} + o(n^{-2}) = -1 - \frac{1}{12n^2} + o(n^{-2}).$$

Le terme $1/(6n^3)$ issu du produit est inclus dans le reste $o(n^{-2})$. Ainsi,

$$a_n = \frac{1}{12n^2} + o(n^{-2}), \quad \text{donc} \quad a_n \sim \frac{1}{12n^2}.$$

En particulier, pour n assez grand, $|a_n| \leq C/n^2$ pour une constante $C > 0$. La série de Riemann

$$\sum 1/n^2$$

converge; par comparaison,

$$\sum_{n \geq 2} |a_n|$$

converge. La série demandée est donc absolument convergente, et en particulier convergente.

7. Pour tout $n \geq 1$, $A_n > 0$. En prenant les logarithmes,

$$\ln A_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - n - \ln(n!).$$

Pour $n \geq 2$, puisque $n! = n(n-1)!$,

$$\ln A_n - \ln A_{n-1} = \left(n - \frac{1}{2}\right) (\ln n - \ln(n-1)) - 1.$$

Or $\ln n - \ln(n-1) = -\ln(1 - 1/n)$. Donc

$$\ln A_n - \ln A_{n-1} = -1 - \left(n - \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right) = a_n.$$

8. En sommant l'égalité précédente de 2 à n , on obtient

$$\ln A_n = \ln A_1 + \sum_{j=2}^n a_j.$$

La série converge d'après la question 6. Donc $\ln A_n$ tend vers un réel fini

$$L = \ln A_1 + \sum_{j=2}^{+\infty} a_j.$$

Par continuité de l'exponentielle,

$$A_n \longrightarrow \ell = e^L > 0.$$

La stricte positivité de la limite provient ici de sa représentation comme exponentielle d'un réel fini, et non de la seule positivité des termes.

9. a. Par définition,

$$n! = \frac{n^n e^{-n} \sqrt{n}}{A_n}.$$

Comme $A_n \rightarrow \ell > 0$, le rapport entre cette expression et $\ell^{-1} n^n e^{-n} \sqrt{n}$ vaut ℓ/A_n et tend vers 1. Donc

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\ell} n^n e^{-n} \sqrt{n}.$$

9. b. Nous déterminons la constante à partir des intégrales étudiées, sans supposer connue la formule à établir.

Le résultat 9. a. appliqué à $2n$ et à n donne

$$\frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \sim \frac{\ell^{-1} (2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{2n}}{2^{2n} \ell^{-2} n^{2n} e^{-2n} n} = \ell \sqrt{\frac{2}{n}}.$$

Donc, par la question 5,

$$W_{2n} \sim \frac{\pi}{2} \ell \sqrt{\frac{2}{n}}.$$

Mais la question 4. b. donne également $W_{2n} \sim \sqrt{\pi/(4n)}$. En multipliant par $\sqrt{n}$, puis en identifiant les deux limites,

$$\frac{\pi}{2}\ell\sqrt{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \text{donc} \quad \ell = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

En reportant dans 9. a., nous obtenons la formule démontrée dans cette partie :

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}.$$

Partie II : Étude de variables aléatoires

1. Comme $a > 0$, f_a est positive ou nulle. Elle est continue sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

De plus, sa limite à droite en 0 vaut $0 = f_a(0)$: elle est même continue sur $\mathbb{R}$.

Pour $M > 0$, la dérivée de $x \mapsto -e^{-x^2/(2a^2)}$ est $f_a(x)$ sur $]0, +\infty[$. Ainsi,

$$\int_0^M f_a(x) \, dx = 1 - e^{-M^2/(2a^2)}.$$

En faisant tendre M vers $+\infty$, l'intégrale converge et vaut 1. Sur $] -\infty, 0]$, la fonction est nulle. Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f_a(x) \, dx = 1$, et f_a est une densité.

2. Pour $x \leq 0$, $F_X(x) = 0$. Pour $x > 0$, le calcul précédent donne

$$F_X(x) = \int_0^x f_a(t) \, dt = 1 - e^{-x^2/(2a^2)}.$$

Ainsi,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ 1 - e^{-x^2/(2a^2)} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

En particulier, $P(X > 0) = 1$.

3. Puisque X est positive presque sûrement, l'existence de son espérance se ramène à la convergence de l'intégrale positive $\int_0^{+\infty} x f_a(x) \, dx$.

Pour $M > 0$, une intégration par parties sur $[0, M]$ donne

$$\int_0^M \frac{x^2}{a^2} e^{-x^2/(2a^2)} \, dx = [-x e^{-x^2/(2a^2)}]_0^M + \int_0^M e^{-x^2/(2a^2)} \, dx.$$

Par croissance comparée, $M e^{-M^2/(2a^2)} \rightarrow 0$. Le changement de variable affine $u = x/a$ sur le segment donne

$$\int_0^M e^{-x^2/(2a^2)} \, dx = a \int_0^{M/a} e^{-u^2/2} \, du.$$

La densité de la normale centrée réduite est $u \mapsto (2\pi)^{-1/2} e^{-u^2/2}$. Sa normalisation et sa parité donnent $\int_0^{+\infty} e^{-u^2/2} \, du = \sqrt{\pi/2}$. Cette intégrale est donc convergente.

Le passage à la limite dans l'égalité sur les segments prouve l'existence de l'espérance et donne

$$E(X) = a \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

4. Méthode 1 — Moment d'ordre deux par intégration par parties.

Pour $M > 0$, une intégration par parties sur $[0, M]$ donne

$$\int_0^M \frac{x^3}{a^2} e^{-x^2/(2a^2)} dx = [-x^2 e^{-x^2/(2a^2)}]_0^M + 2 \int_0^M x e^{-x^2/(2a^2)} dx.$$

Le terme de bord tend vers 0 par croissance comparée. La dernière intégrale vaut

$$\int_0^M x e^{-x^2/(2a^2)} dx = a^2(1 - e^{-M^2/(2a^2)}).$$

Ainsi, l'intégrale positive du moment d'ordre deux converge, et $E(X^2) = 2a^2$. La variance existe donc ; la formule de Koenig-Huygens donne

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 2a^2 - \frac{\pi}{2}a^2 = \frac{4-\pi}{2}a^2.$$

Méthode 2 — Transformation en une variable exponentielle.

Posons $H = X^2/(2a^2)$. Comme $X > 0$ presque sûrement, pour $h \geq 0$,

$$P(H \leq h) = P(X \leq a\sqrt{2h}) = 1 - e^{-h}.$$

Pour $h < 0$, cette probabilité vaut 0. Donc H suit une loi exponentielle de paramètre 1, et possède une espérance égale à 1. Puisque $X^2 = 2a^2 H$ presque sûrement, X^2 est intégrable et

$$E(X^2) = 2a^2 E(H) = 2a^2.$$

La question 3 et Koenig-Huygens donnent encore $V(X) = (4 - \pi)a^2/2$. La seconde méthode identifie une loi usuelle derrière le moment recherché ; elle évite le calcul de l'intégrale du moment.

5. a. La variable V prend ses valeurs dans $]0, 1]$ presque sûrement. Donc $\ln V \leq 0$ et $Z = a\sqrt{-2\ln V}$ est bien définie et positive ou nulle presque sûrement.

Pour $z < 0$, $P(Z \leq z) = 0$. Pour $z \geq 0$, toutes les opérations suivantes sont licites puisque $a > 0$ et les deux membres de l'inégalité initiale sont positifs ou nuls :

$$Z \leq z \iff -2\ln V \leq \frac{z^2}{a^2} \iff V \geq e^{-z^2/(2a^2)}.$$

Pour $c \in [0, 1]$, l'uniformité donne $P(V \geq c) = 1 - c$, les points isolés étant de probabilité nulle. Par conséquent,

$$F_Z(z) = 1 - e^{-z^2/(2a^2)} \quad \text{pour } z \geq 0.$$

Cette expression vaut 0 pour $z = 0$. On a donc $F_Z = F_X$ sur tout $\mathbb{R}$: Z et X ont la même loi.

5. b. Code adapté en Python. Question adaptée au programme actuel.

Le générateur `random()` de NumPy renvoie une valeur dans $[0, 1[$. Si U suit cette loi uniforme, alors $V = 1 - U$ suit la loi uniforme sur $]0, 1]$. Cette transformation garantit aussi que le logarithme ne reçoit jamais 0.

Python

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

a = float(input("Entrer a strictement positif : "))
while a <= 0:
    a = float(input("Entrer a strictement positif : "))

v = 1.0 - rd.random()
x = a * np.sqrt(-2.0 * np.log(v))
print(x)
```

La boucle demande un nouveau paramètre tant que la valeur numérique saisie n'est pas strictement positive. Après une saisie admissible, v simule V et x applique la transformation démontrée en 5. a. Le programme affiche une réalisation de la loi de X .

Le code a été exécuté avec une saisie positive et avec une première saisie négative suivie d'une saisie positive ; les sorties obtenues étaient finies et positives ou nulles. La transformation a aussi été vérifiée sur un échantillon simulé. Ces vérifications numériques contrôlent le programme ; la preuve de la loi reste celle de 5. a.

Préambule des questions 6 à 11.

Question adaptée au programme actuel : l'indépendance des tirages successifs est explicitée dans le sujet. Avec la remise et l'équiprobabilité des n boules à chaque tirage, elle permet de calculer les probabilités des suites de résultats.

6. Parmi $n + 1$ tirages, on ne peut obtenir $n + 1$ numéros distincts alors qu'il n'existe que n numéros. Une répétition apparaît donc au plus tard au $(n + 1)$ -ième tirage. Ainsi,

$$T_n \leq n + 1 \quad \text{presque sûrement,} \quad P(T_n > n + 1) = 0.$$

De plus, le premier tirage ne répète aucun résultat précédent, donc $T_n \geq 2$. Le support est contenu dans $\{2, \dots, n + 1\}$.

7. Pour tout entier $k \leq n$, comme $T_n \geq 2$, on a $P(T_n > k) = 1$. Nous traitons maintenant $1 \leq k \leq n$.

Méthode 1 — Probabilités composées.

L'événement $\{T_n > k\}$ signifie que les k premiers tirages ont des numéros distincts. Conditionnellement à j résultats précédents distincts, il reste $n - j$ numéros non encore obtenus. Par indépendance et équiprobabilité, la probabilité que le tirage suivant soit nouveau vaut $(n - j)/n$.

La formule des probabilités composées donne donc

$$P(T_n > k) = \prod_{j=0}^{k-1} \frac{n-j}{n} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k} = \frac{n!}{(n-k)! n^k}.$$

Pour $k = 1$, ce produit vaut 1, ce qui concorde avec $T_n \geq 2$. Pour $k = n$, il vaut $n!/n^n > 0$.

Méthode 2 — Dénombrement des suites de tirages.

On peut imaginer les k premiers tirages d'une suite de tirages poursuivie même après la première répétition. L'arrêt ne modifie pas l'événement «les k premiers résultats sont distincts». Les n^k suites ordonnées de k résultats sont équiprobables, chacune de probabilité n^{-k} , par indépendance.

Pour une suite favorable, le premier numéro a n choix, le deuxième $n - 1$ choix, puis le k -ième $n - k + 1$ choix. Il y a donc $n!/(n - k)!$ suites favorables. En divisant par le nombre total, on retrouve $P(T_n > k) = n!/((n - k)!n^k)$.

La première méthode suit l'expérience pas à pas ; la seconde la représente comme un dénombrement d'issues équiprobables. En regroupant tous les cas demandés,

$$P(T_n > k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \leq 0, \\ \frac{n!}{(n - k)! n^k} & \text{si } 1 \leq k \leq n. \end{cases}$$

La formule factorielle reste valable pour $k = 0$, avec la valeur 1.

8. Puisque $\sqrt{n} > 0$, $Y_n > y$ équivaut à $T_n > y\sqrt{n}$. Comme T_n est entière et $k_n = \lfloor y\sqrt{n} \rfloor$, l'inégalité $T_n > y\sqrt{n}$ équivaut à $T_n \geq k_n + 1$, donc à $T_n > k_n$.

Ainsi, les événements sont égaux, et

$$P(Y_n > y) = P(T_n > k_n).$$

Cette équivalence reste vraie lorsque $y\sqrt{n}$ est entier, puisque les inégalités sont strictes.

9. Fixons $y \geq 0$. L'encadrement de la partie entière donne

$$y - \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{k_n}{\sqrt{n}} \leq y.$$

Donc $k_n/\sqrt{n} \rightarrow y$ et $k_n/n \rightarrow 0$. En particulier, pour n assez grand, $0 \leq k_n < n$ et $n - k_n \rightarrow +\infty$.

Par les questions 7 et 8,

$$P(Y_n > y) = \frac{n!}{(n - k_n)! n^{k_n}}.$$

On applique la formule démontrée en I 9. b. aux deux indices n et $n - k_n$, qui tendent tous deux vers $+\infty$:

$$P(Y_n > y) \sim \frac{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}}{(n - k_n)^{n-k_n} e^{-(n-k_n)} \sqrt{2\pi(n - k_n)} n^{k_n}}.$$

La simplification du membre de droite donne

$$e^{-k_n} \left(1 - \frac{k_n}{n}\right)^{k_n - n} \left(1 - \frac{k_n}{n}\right)^{-1/2}.$$

Le dernier facteur tend vers 1. Tous les termes sont strictement positifs pour n assez grand, donc les équivalents peuvent être multipliés et divisés. On obtient

$$P(Y_n > y) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-k_n} \left(1 - \frac{k_n}{n}\right)^{k_n - n}.$$

Pour $y = 0$, $k_n = 0$ pour tout n : les deux membres valent exactement 1. Le cas limite est donc également couvert.

- 10. a.** La fonction est définie au voisinage de 0, avec $t < 1$. Utilisons le développement limité usuel

$$\ln(1 - t) = -t - \frac{t^2}{2} + o(t^2).$$

Par multiplication par le polynôme $t - 1$,

$$(t - 1) \ln(1 - t) = t + \frac{t^2}{2} - t^2 + o(t^2) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2).$$

Ainsi,

$$-t + (t - 1) \ln(1 - t) = -\frac{t^2}{2} + o(t^2).$$

Il s'agit d'un produit de développements limités, sans composition de développements limités.

- 10. b.** Pour $y = 0$, $k_n = 0$ et l'expression étudiée est identiquement nulle ; sa limite est bien $-y^2/2$.

Supposons $y > 0$. Posons $t_n = k_n/n$, qui tend vers 0 et est strictement positif pour n assez grand. Le développement limité de 10. a. signifie qu'il existe une fonction $\varepsilon(t)$ tendant vers 0 lorsque $t \rightarrow 0$ telle que

$$-t + (t-1)\ln(1-t) = -\frac{t^2}{2} + t^2\varepsilon(t).$$

En évaluant cette égalité en t_n , puis en multipliant par n , on obtient

$$-k_n + (k_n - n)\ln\left(1 - \frac{k_n}{n}\right) = -\frac{k_n^2}{2n} + \frac{k_n^2}{n}\varepsilon(t_n).$$

Or $k_n/\sqrt{n} \rightarrow y$, donc $k_n^2/n \rightarrow y^2$. Ce facteur est borné et $\varepsilon(t_n) \rightarrow 0$; le dernier produit tend donc vers 0. Par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-k_n + (k_n - n)\ln\left(1 - \frac{k_n}{n}\right) \right) = -\frac{y^2}{2}.$$

11. Pour $y \geq 0$, le terme positif auquel la probabilité est équivalente dans la question 9 est

$$\exp\left(-k_n + (k_n - n)\ln\left(1 - \frac{k_n}{n}\right)\right).$$

Par la question 10. b. et la continuité de l'exponentielle, ce terme tend vers $e^{-y^2/2} > 0$. Le rapport de la probabilité à ce terme tend vers 1; donc

$$P(Y_n > y) \longrightarrow e^{-y^2/2}, \quad F_{Y_n}(y) \longrightarrow 1 - e^{-y^2/2}.$$

Pour $y < 0$, $Y_n > 0$ presque sûrement, donc $F_{Y_n}(y) = 0$ pour tout n . Pour $y = 0$, on a également $F_{Y_n}(0) = 0$, en accord avec la limite.

La fonction limite est ainsi

$$F(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0, \\ 1 - e^{-y^2/2} & \text{si } y > 0. \end{cases}$$

C'est la fonction de répartition obtenue en question 2 pour $a = 1$. Elle est continue sur tout $\mathbb{R}$ et admet pour densité

$$f_1(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0, \\ ye^{-y^2/2} & \text{si } y > 0. \end{cases}$$

La convergence des fonctions de répartition en chaque point de continuité de F établit donc la convergence en loi de (Y_n) vers une variable aléatoire de densité f_1 .

Relevé des adaptations

Problème 2, partie II, question 5. b. : remplacement de la demande de programme dans l'ancien langage par un programme Python utilisant NumPy. Les commandes de saisie, de conversion et d'affichage sont définies dans le sujet. La transformation $V = 1 - U$ adapte l'intervalle fourni par le générateur et garantit que le logarithme est défini. Code adapté en Python.

Problème 2, partie II, préambule des questions 6 à 11 : explicitation de l'indépendance des tirages successifs et de l'équiprobabilité des boules à chaque tirage. Cette précision formalise le modèle usuel de tirages avec remise nécessaire aux calculs de la question 7 et à leurs conséquences.