



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques 1

2011

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Partie I : Somme de variables aléatoires suivant la loi exponentielle de paramètre 1

1. Rappeler une densité, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre égal à 1.

On considère une suite de variables aléatoires réelles $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ mutuellement indépendantes, qui suivent la loi exponentielle de paramètre égal à 1.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note S_n la variable aléatoire définie par

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k.$$

2. a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donner l'espérance et la variance de la variable aléatoire S_n .
2. b. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, rappeler une densité de S_n .
3. Soit une variable aléatoire U suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0; 1]$. Montrer que la variable aléatoire $Y = -\ln(1 - U)$ suit une loi exponentielle dont on déterminera le paramètre. La formule définit Y presque sûrement; on peut fixer arbitrairement sa valeur sur l'événement négligeable $\{U = 1\}$.
4. Écrire une fonction Python utilisant le générateur aléatoire `numpy.random.random` et la transformation de la question 3, simulant la variable aléatoire S_n , l'entier $n \geq 1$ étant fourni par l'utilisateur en argument.

La commande `numpy.random.random()` simule une loi uniforme sur $[0; 1[$. Les commandes `numpy.log` et `range` peuvent être utilisées.

5. Pour tout $t \in]0; +\infty[$, on note N_t la variable aléatoire égale à 0 si l'événement $(S_1 > t)$ est réalisé et, sinon, au plus grand entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que l'événement $(S_n \leq t)$ est réalisé. Cette définition est presque sûrement valable; on peut fixer arbitrairement N_t sur l'événement négligeable où aucun plus grand entier n'existe.

Ainsi, pour tout $t \in]0; +\infty[$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'événement $(N_t = n)$ est égal, à un événement négligeable près, à l'événement $(S_n \leq t) \cap (S_{n+1} > t)$.

Écrire une fonction Python utilisant le générateur aléatoire `numpy.random.random` et la transformation de la question 3, simulant la variable aléatoire N_t , le réel $t > 0$ étant fourni par l'utilisateur en argument.

Partie II : Polynômes de Laguerre

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les applications

$$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{x^n e^{-x}}{n!},$$

$$L_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto e^x f_n^{(n)}(x),$$

où $f_n^{(n)}$ désigne la dérivée n -ième de f_n .

6. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $L_0(x)$, $L_1(x)$, $L_2(x)$.

7. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad L_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} x^k.$$

8. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, L_n est une fonction polynomiale dont on précisera le degré et le coefficient du terme de plus haut degré.

9. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f'_{n+1}(x) = f_n(x) - f_{n+1}(x).$$

10. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad L'_{n+1}(x) = L'_n(x) - L_n(x).$$

11. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{n+1}(x) = \frac{x}{n+1} f_n(x).$$

12. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (n+1)L_{n+1}(x) = xL'_n(x) + (n+1-x)L_n(x).$$

13. Établir :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad xL''_n(x) - (x-1)L'_n(x) + nL_n(x) = 0.$$

Partie III : Produit scalaire, orthogonalité, endomorphisme

On note E le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des applications polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $N \in \mathbb{N}$ fixé. On note E_N le sous-espace vectoriel de E formé des applications polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à N .

14. Montrer que, pour tout $A \in E$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} A(x)e^{-x} dx$ converge.

On considère l'application

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (P, Q) \longmapsto \langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x} dx.$$

15. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .

On considère, pour tout $P \in E$, l'application $T(P) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T(P)(x) = xP''(x) - (x-1)P'(x).$$

16. Vérifier que T est un endomorphisme du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E .
17. Montrer que, pour tout $P \in E$, l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R} : x \mapsto T(P)(x)e^{-x}$ est la dérivée de l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R} : x \mapsto xP'(x)e^{-x}$.
18. En déduire, pour tout $(P, Q) \in E \times E$:

$$\langle T(P), Q \rangle = - \int_0^{+\infty} xP'(x)Q'(x)e^{-x} dx.$$

19. Établir : $\forall (P, Q) \in E \times E, \quad \langle T(P), Q \rangle = \langle P, T(Q) \rangle.$

20. En utilisant le résultat de la question 13, calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T(L_n)$.

21. En déduire que la famille $(L_0, \dots, L_N)$ est orthogonale.

22. Montrer : $\forall P \in E_N, \quad T(P) \in E_N.$

On note T_N l'endomorphisme induit par T sur E_N , c'est-à-dire l'endomorphisme T_N de E_N défini par :

$$\forall P \in E_N, \quad T_N(P) = T(P).$$

23. Montrer que $(L_0, \dots, L_N)$ est une base de E_N .
24. Donner la matrice de T_N dans la base $(L_0, \dots, L_N)$ de E_N .
25. Est-ce que T_N est diagonalisable ? Est-ce que T_N est bijectif ?

Partie IV : Nature d'une série de maximums

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application

$$g_n : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{x^n e^{-x}}{n!}.$$

26. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, g_n admet un maximum, noté M_n , et calculer M_n .

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\mu_n = \sqrt{n} M_n$ et $a_n = \ln \mu_{n+1} - \ln \mu_n$.

27. Former le développement limité de a_n à l'ordre 2 lorsque l'entier n tend vers l'infini.

28. En déduire la nature de la série

$$\sum_{n \geq 1} a_n.$$

29. Établir que la suite $(\mu_n)_{n \geq 1}$ converge et que sa limite est strictement positive.

30. Quelle est la nature de la série

$$\sum_{n \geq 1} M_n$$

?

Partie V : Étude d'extremum local pour une fonction de deux variables réelles

On considère les applications

$$f :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x e^{-x},$$

$$F :]0; +\infty[^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \longmapsto f(x) + f(y) - f(x + y).$$

31. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $]0; +\infty[^2$ et exprimer, pour tout $(x, y) \in]0; +\infty[^2$, les dérivées partielles premières $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)$ en fonction de $f'(x)$, $f'(y)$ et $f'(x + y)$.
32. Établir que, pour tout $a \in]0; +\infty[$, l'équation $f'(x) = f'(a)$, d'inconnue $x \in]0; +\infty[$, admet au plus une solution distincte de a .
33. En déduire que, pour tout $(x, y) \in]0; +\infty[^2$, (x, y) est un point critique de F si et seulement si : $x = y$ et $f'(x) = f'(2x)$.
34. Montrer que F admet un point critique et un seul, noté (α, α) , et montrer que $1 < \alpha < 2$.
35. Montrer : $f''(\alpha) < 0$ et $f''(2\alpha) > 0$.
36. Montrer que F admet un extremum local, et un seul. Déterminer la nature de cet extremum.