



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques 1

2010

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

PROBLÈME 1

Définitions et notations

p désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.

On note $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices-lignes à p colonnes à coefficients réels, $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre p à coefficients réels et I_p la matrice diagonale de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont tous égaux à 1.

On note, pour toute matrice carrée A d'ordre p et tout $(i, j) \in \{1, \dots, p\}^2$, $(A)_{i,j}$ le coefficient de A situé à la ligne i et à la colonne j .

On note, pour toute matrice-ligne L de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$ et tout $j \in \{1, \dots, p\}$, $(L)_j$ le coefficient de L situé à la colonne j .

On dit qu'une suite $(A_n)_{n \geq 1}$ de matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ converge vers une matrice A de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, et on note $A_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} A$, si et seulement si, pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, p\}^2$, $(A_n)_{i,j} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} (A)_{i,j}$.

On dit qu'une suite $(L_n)_{n \geq 1}$ de matrices de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$ converge vers une matrice L de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$, et on note $L_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} L$, si et seulement si, pour tout $j \in \{1, \dots, p\}$, $(L_n)_j \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} (L)_j$.

On admet que, si la suite $(A_n)_{n \geq 1}$ de matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ converge vers la matrice A et si la suite $(B_n)_{n \geq 1}$ de matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ converge vers la matrice B , alors la suite $(A_n B_n)_{n \geq 1}$ converge vers la matrice AB .

On admet que, si la suite $(A_n)_{n \geq 1}$ de matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ converge vers la matrice A et si L est une matrice-ligne de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$, alors la suite $(LA_n)_{n \geq 1}$ converge vers la matrice LA .

On appelle matrice stochastique toute matrice A de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, p\}^2, \quad (A)_{i,j} \geq 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, p\}, \quad \sum_{j=1}^p (A)_{i,j} = 1.$$

On note $\mathcal{ST}_p$ l'ensemble des matrices stochastiques de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

Partie I : Résultats généraux sur les matrices stochastiques —

Illustrations

1. a. On note V la matrice-colonne à p lignes dont tous les coefficients sont égaux à 1.

Montrer, pour toute $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$:

$$A \in \mathcal{ST}_p \iff \begin{cases} \forall (i, j) \in \{1, \dots, p\}^2, (A)_{i,j} \geq 0, \\ AV = V. \end{cases}$$

1. b. En déduire que toutes les matrices de $\mathcal{ST}_p$ ont une valeur propre commune.

2. Démontrer : $\forall A, B \in \mathcal{ST}_p, \quad AB \in \mathcal{ST}_p$.

3. On note :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

3. a. Justifier, sans calcul, que A_1 est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Donner la dimension du sous-espace propre pour A_1 associé à la valeur propre 1.

3. b. En utilisant éventuellement les matrices A_2 et A_3 :

3. b. (i) Montrer qu'il existe dans $\mathcal{ST}_3$ au moins un élément non diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

3. b. (ii) Justifier si l'affirmation suivante est vraie ou fausse : « Pour tout élément A de $\mathcal{ST}_3$, le sous-espace propre pour A associé à la valeur propre 1 est de dimension 1. »

4. Soient $A \in \mathcal{ST}_p$ et λ une valeur propre réelle de A .

On note

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$$

un vecteur propre pour A associé à la valeur propre λ .

On note i un élément de $\{1, \dots, p\}$ tel que : $\forall k \in \{1, \dots, p\}, \quad |x_k| \leq |x_i|$.

4. a. Montrer : $|\lambda x_i| \leq |x_i|$.

4. b. En déduire : $|\lambda| \leq 1$.

Partie II : Suites de moyennes de puissances de matrices stochastiques

Soit $A \in \mathcal{ST}_p$. On note $A^0 = I_p$.

1. a. Établir : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n \in \mathcal{ST}_p$.

1. b. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} A^k \in \mathcal{ST}_p.$$

Dans la suite de cette partie II, on suppose qu'il existe $r \in \{1, \dots, p-1\}, P \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$

invertible et $D \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ diagonale dont les coefficients diagonaux $(D)_{i,i}$ sont égaux à 1 si $i \leq r$ et distincts de 1 si $i \geq r+1$, tels que $A = PDP^{-1}$.

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D^k$$

et $B_n = PM_nP^{-1}$.

On note Δ la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ diagonale dont les coefficients diagonaux $(\Delta)_{i,i}$ sont égaux à 1 si $i \leq r$ et nuls sinon, et on note $B = P\Delta P^{-1}$.

2. Démontrer, pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé tel que $|x| \leq 1$:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} x^k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1, \\ 0 & \text{si } x \neq 1. \end{cases}$$

3. Montrer : $M_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Delta$, et en déduire : $B_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} B$.

4. a. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad B_n \in \mathcal{ST}_p$.

4. b. En déduire : $B \in \mathcal{ST}_p$.

Partie III : Aspect probabiliste

On dispose d'un objet noté T et de trois urnes numérotées 1, 2 et 3. À chaque instant $n \in \mathbb{N}$, T est dans une des trois urnes et une seule.

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n la variable aléatoire égale au numéro de l'urne dans laquelle se trouve l'objet à l'instant n et L_n la matrice suivante de $\mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$:

$$L_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) & P(X_n = 2) & P(X_n = 3) \end{pmatrix}.$$

On suppose connues la loi de X_0 et la matrice de transition $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Pour chaque urne i , la ligne i de A est une loi de probabilité sur $\{1, 2, 3\}$ spécifiant la destination de l'objet à l'étape suivante. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tous $i, j \in \{1, 2, 3\}$ tels que $P(X_n = i) > 0$:

$$P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = j) = (A)_{i,j}.$$

En particulier, si $P(X_0 = i) > 0$, $(A)_{i,j} = P_{(X_0=i)}(X_1 = j)$. Si une urne a une probabilité nulle d'être occupée à un instant donné, sa ligne de transition reste spécifiée, sans définir de probabilité conditionnelle par cet événement.

1. Montrer : $A \in \mathcal{ST}_3$.

2. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad L_{n+1} = L_n A$, puis : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad L_n = L_0 A^n$.

On suppose dorénavant $A = A_1$, définie dans la partie I.3, et on note

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

3. Déterminer une matrice $P_1 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, inversible et à coefficients diagonaux tous égaux à 1, telle que $A_1 = P_1 D_1 P_1^{-1}$, et calculer P_1^{-1} .

4. Déterminer la limite de la suite $(D_1^n)_{n \geq 1}$, puis la limite de la suite $(A_1^n)_{n \geq 1}$.

5. Déterminer la limite de la suite $(L_n)_{n \geq 1}$. Expliquer ce résultat par des arguments probabilistes.

PROBLÈME 2

Dans tout le problème, J désigne l'intervalle $] -1, +\infty[$.

Le but du problème est l'étude de l'application f définie, pour tout $x \in J$, par :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt.$$

Préliminaires

1. Justifier la convergence des séries numériques suivantes :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2}, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

2. En admettant que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

montrer :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

3. En déduire :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

Partie I : Éléments d'étude de f

1. Justifier, pour tout $x \in J$, la convergence de l'intégrale $\int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt$.

2. Calculer $f(0)$ et $f(1)$.

3. Montrer : $\forall x \in J, \quad 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x+1}$, et en déduire : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

4. a. Montrer : $\forall (x, y) \in J^2, \quad \forall t \in]0, 1], \quad (x \leq y \implies t^x \geq t^y)$.

4. b. En déduire que f est décroissante sur J .

5. Montrer : $\forall x \in J, \quad f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x+1}$.

6. Déduire des résultats précédents : $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$.

7. Soit $x \in J$.

7. a. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(x) = (-1)^{n+1} f(n+1+x) + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1+x}.$$

7. b. En déduire que la série numérique

$$\sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k+1+x}$$

converge et que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1+x}.$$

8. a. Montrer :

$$\forall (x, y) \in J^2, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \left| \frac{1}{k+1+x} - \frac{1}{k+1+y} \right| \leq |x-y| \frac{1}{k^2},$$

puis :

$$\forall (x, y) \in J^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq |x-y| \left(\frac{1}{(x+1)(y+1)} + \frac{\pi^2}{6} \right).$$

8. b. En déduire que f est continue sur J .

9. Montrer : $f(x) \underset{x \rightarrow -1^+}{\sim} \frac{1}{x+1}$. En déduire la limite de f en -1 .

Partie II : Dérivabilité de f

On note, pour tout $k \in \mathbb{N}$, g_k l'application de classe $\mathcal{C}^2$ de J dans $\mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in J$, par :

$$g_k(x) = \frac{(-1)^k}{k+1+x}.$$

1. Montrer :

$$\forall (x, y) \in J^2, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad |g_k(x) - g_k(y) - (x - y)g'_k(x)| \leq \frac{|x - y|^2}{k^3}.$$

2. a. Justifier la convergence des séries

$$\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^3}$$

et

$$\sum_{k \geq 0} g'_k(x),$$

pour tout $x \in J$.

2. b. En déduire que f est dérivable sur J et que :

$$\forall x \in J, \quad f'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1+x)^2}.$$

2. c. Déterminer $f'(0)$.

3. Tracer l'allure de la courbe représentative de f . On donne la valeur approchée :

$$\ln 2 \approx 0,69.$$