



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques 1

2009

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

PROBLÈME 1

Partie I — Calcul d'une intégrale

Dans cette partie, $a > 0$ et $b > 0$.

1. Convergence de l'intégrale impropre.

Méthode 1 — Étude séparée des deux bornes.

Au voisinage de 0, les développements limités d'ordre un donnent $e^{-ax} = 1 - ax + o(x)$ et $e^{-bx} = 1 - bx + o(x)$. Ainsi,

$$\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} = b - a + o(1).$$

L'intégrande, continue pour $x > 0$, se prolonge donc continûment en 0 par la valeur $b - a$. L'intégrale converge à cette borne.

Pour $x \geq 1$,

$$\left| \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \right| \leq e^{-ax} + e^{-bx}.$$

Les deux exponentielles ont des intégrales convergentes sur $[1, +\infty[$ puisque $a, b > 0$. Par comparaison, l'intégrale est absolument convergente à l'infini, donc sur $]0, +\infty[$.

Méthode 2 — Une majoration globale par les accroissements finis.

Si $a = b$, l'intégrande est identiquement nulle et la conclusion est immédiate. Sinon,

pour chaque $x > 0$, on applique le théorème des accroissements finis à $s \mapsto e^{-sx}$ entre a et b . Il existe ξ_x entre ces deux réels tel que

$$\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} = (b - a)e^{-\xi_x x}.$$

En posant $m = \min(a, b) > 0$, on obtient $\left| \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \right| \leq |b - a|e^{-mx}$. Cette majorante est intégrable sur $[0, +\infty[$. L'intégrande est continue sur $]0, +\infty[$, donc la comparaison aux deux bornes établit la convergence absolue.

La première méthode sépare les difficultés en 0 et à l'infini ; la seconde fournit une seule majoration valable sur tout le domaine.

2. a. Changements de variable sur un segment.

Fixons $0 < \varepsilon \leq X$. Dans la première intégrale, le changement affine $y = ax$ donne $dy = a dx$ et $x = y/a$. Ses bornes sont $a\varepsilon$ et aX , d'où

$$\int_{\varepsilon}^X \frac{e^{-ax}}{x} dx = \int_{a\varepsilon}^{aX} \frac{e^{-y}}{y/a} \frac{dy}{a} = \int_{a\varepsilon}^{aX} \frac{e^{-y}}{y} dy.$$

En utilisant $y = bx$ dans la seconde intégrale, on obtient de même

$$\int_{\varepsilon}^X \frac{e^{-bx}}{x} dx = \int_{b\varepsilon}^{bX} \frac{e^{-y}}{y} dy.$$

Les deux changements de variable sont légitimes sur les segments considérés car $a, b > 0$ et les intégrandes y sont continues.

b. Réorganisation des intégrales par Chasles.

La linéarité et les égalités précédentes donnent

$$\int_{\varepsilon}^X \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \int_{a\varepsilon}^{aX} \frac{e^{-y}}{y} dy - \int_{b\varepsilon}^{bX} \frac{e^{-y}}{y} dy.$$

Par Chasles, $\int_{a\varepsilon}^{aX} = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} + \int_{b\varepsilon}^{aX}$ et $\int_{b\varepsilon}^{bX} = \int_{b\varepsilon}^{aX} + \int_{aX}^{bX}$, avec le même intégrande.
En soustrayant,

$$\int_{\varepsilon}^X \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-y}}{y} dy - \int_{aX}^{bX} \frac{e^{-y}}{y} dy.$$

Chasles s'applique aux intégrales orientées : la formule reste valable lorsque $b < a$, lorsque $a = b$, et lorsque $\varepsilon = X$.

3. a. Continuité de h .

Méthode 1 — Définition de la dérivée de l'exponentielle.

Pour $y > 0$, $h(y) = (1 - e^{-y})/y$ est un quotient de fonctions continues dont le dénominateur est non nul. En 0,

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} h(y) = - \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{e^{-y} - 1}{y} = - \left. \frac{d}{dy} e^{-y} \right|_{y=0} = 1 = h(0).$$

Ainsi, h est continue sur $[0, +\infty[$.

Méthode 2 — Encadrement d'une valeur moyenne.

Pour $y > 0$, $1 - e^{-y} = \int_0^y e^{-t} dt$. Sur $[0, y]$, $e^{-y} \leq e^{-t} \leq 1$, donc

$$e^{-y} \leq \frac{1}{y} \int_0^y e^{-t} dt = h(y) \leq 1.$$

Les deux bornes tendent vers 1 lorsque $y \rightarrow 0^+$. Le théorème d'encadrement donne la continuité en 0 ; la continuité ailleurs suit du quotient.

Cette seconde approche montre aussi $0 < h(y) \leq 1$, ce qui fournit une majoration utile dans la question suivante.

b. Limite de l'intégrale entre $a\varepsilon$ et $b\varepsilon$.

Pour $y > 0$, $e^{-y}/y = 1/y - h(y)$. Ainsi, pour $\varepsilon > 0$,

$$\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-y}}{y} dy = \ln(b\varepsilon) - \ln(a\varepsilon) - \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} h(y) dy = \ln \frac{b}{a} - \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} h(y) dy.$$

Par continuité de h en 0, elle est bornée sur un segment $[0, \delta]$: il existe $M \geq 0$ tel que $|h(y)| \leq M$ sur ce segment. Pour ε assez petit, $a\varepsilon$ et $b\varepsilon$ y appartiennent, donc

$$\left| \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} h(y) dy \right| \leq M|b - a|\varepsilon \rightarrow 0.$$

On en déduit $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-y}}{y} dy = \ln \frac{b}{a}$, y compris si $b < a$ ou $a = b$.

c. Passage à la limite en la borne inférieure.

Fixons $X > 0$ et faisons tendre ε vers 0^+ dans I.2.b, en gardant $\varepsilon \leq X$. D'après I.1, le membre de gauche tend vers l'intégrale convergente sur $]0, X]$. D'après I.3.b, la première intégrale du membre de droite tend vers $\ln(b/a)$. La dernière intégrale ne dépend pas de ε . Donc

$$\int_0^X \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \ln \frac{b}{a} - \int_{aX}^{bX} \frac{e^{-y}}{y} dy.$$

Il s'agit de limites d'intégrales impropres définies par leurs bornes, sans échange d'une limite avec une intégrale.

d. Valeur de l'intégrale sur $]0, +\infty[$.

Posons $m = \min(a, b) > 0$ et $M = \max(a, b)$. Pour X assez grand pour que $mX \geq 1$,

$$\left| \int_{aX}^{bX} \frac{e^{-y}}{y} dy \right| \leq \int_{mX}^{MX} \frac{e^{-y}}{y} dy \leq \int_{mX}^{+\infty} e^{-y} dy = e^{-mX} \rightarrow 0.$$

En passant à la limite dans I.3.c et en utilisant la convergence établie en I.1, on obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \ln \frac{b}{a}.$$

Si $a = b$, les deux membres valent 0 ; si $b < a$, ils sont tous deux négatifs.

Partie II — Étude d'un produit scalaire

1. Structure de sous-espace vectoriel.

L'application nulle est bornée, de classe C^1 sur $[0, +\infty[$, et s'annule en 0 : elle appartient à E .

Soient $f, g \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. La fonction $\lambda f + \mu g$ est de classe C^1 et sa valeur en 0 est $\lambda f(0) + \mu g(0) = 0$. Puisque f, g sont bornées, il existe $M_f, M_g \geq 0$ tels que, pour tout $x \geq 0$, $|f(x)| \leq M_f$ et $|g(x)| \leq M_g$. Alors

$$|\lambda f(x) + \mu g(x)| \leq |\lambda| M_f + |\mu| M_g.$$

La combinaison linéaire est donc bornée et appartient à E . Ces propriétés prouvent que E est un sous-espace vectoriel de l'espace indiqué.

2. Appartenance des quatre fonctions à E .

Les quatre fonctions sont de classe C^1 sur $[0, +\infty[$. Il reste à vérifier l'annulation en 0 et le caractère borné.

Pour f_1 , $|\sin x| \leq 1$ et $f_1(0) = 0$. Donc $f_1 \in E$.

Pour f_2 , la fonction est bornée mais $f_2(0) = 1 \neq 0$. Donc $f_2 \notin E$.

Pour f_3 , $f_3(0) = 0$ mais $e^x - 1 \rightarrow +\infty$ lorsque $x \rightarrow +\infty$: elle n'est pas bornée. Donc $f_3 \notin E$.

Pour f_4 , $f_4(0) = 0$ et $0 \leq 1 - e^{-x} < 1$ pour $x \geq 0$. Donc $f_4 \in E$.

3. a. Limite de $f(x)/x$.

Méthode 1 — Taux d'accroissement.

Puisque $f(0) = 0$ et que f est dérivable à droite en 0,

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \longrightarrow f'(0) \quad (x \rightarrow 0^+).$$

Méthode 2 — Accroissements finis et continuité de la dérivée.

Pour chaque $x > 0$, f est continue sur $[0, x]$ et dérivable sur $]0, x[$. Il existe $\xi_x \in]0, x[$ tel

que $f(x) - f(0) = x f'(\xi_x)$. Donc $f(x)/x = f'(\xi_x)$. Comme $0 < \xi_x < x$, on a $\xi_x \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow 0^+$. La continuité de f' en 0 donne la limite $f'(0)$.

Le taux d'accroissement est l'argument le plus direct; les accroissements finis permettent aussi de majorer $f(x)/x$ au voisinage de 0.

b. Convergence de l'intégrale définissant $(f | g)$.

Soient $f, g \in E$. D'après II.3.a,

$$\frac{f(x)g(x)}{x^2} = \frac{f(x)}{x} \frac{g(x)}{x} \rightarrow f'(0)g'(0) \quad (x \rightarrow 0^+).$$

L'intégrande se prolonge donc continûment à la borne 0 : son intégrale y converge absolument.

À l'infini, choisissons des bornes M_f, M_g pour $|f|$ et $|g|$. Pour $x \geq 1$,

$$\left| \frac{f(x)g(x)}{x^2} \right| \leq \frac{M_f M_g}{x^2}.$$

Or $\int_1^{+\infty} x^{-2} dx = 1$ converge. La comparaison établit la convergence absolue à l'infini, puis sur tout $]0, +\infty[$. Le nombre $(f | g)$ est ainsi bien défini pour chaque couple de E^2 .

4. Propriétés du produit scalaire.

La convergence de toutes les intégrales nécessaires a été établie en II.3.b. Pour $f, g, h \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la linéarité de l'intégrale donne

$$(\lambda f + \mu g | h) = \lambda(f | h) + \mu(g | h).$$

Comme $f(x)g(x) = g(x)f(x)$, on a $(f | g) = (g | f)$. La symétrie et la linéarité dans la première variable donnent la bilinéarité.

Pour toute $f \in E$, $(f | f) = \int_0^{+\infty} f(x)^2/x^2 dx \geq 0$ par positivité de l'intégrale.

Vérifions le caractère défini. Si $(f | f) = 0$ et s'il existait $x_0 > 0$ avec $f(x_0) \neq 0$, la fonction continue $q(x) = f(x)^2/x^2$ vérifierait $q(x_0) > 0$. Il existerait alors $\delta \in]0, x_0[$ tel que $q(x) \geq q(x_0)/2$ sur $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Par positivité,

$$(f | f) \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} q(x) dx \geq \delta q(x_0) > 0,$$

ce qui contredit l'hypothèse. Ainsi $f(x) = 0$ pour tout $x > 0$, et aussi pour $x = 0$ par la définition de E . Réciproquement, la fonction nulle a une norme carrée nulle.

L'application est donc une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur E .

5. Formule par intégration par parties.

Soient $f, g \in E$. Pour $0 < \varepsilon < X$, la fonction fg est de classe C^1 sur $[\varepsilon, X]$, et une primitive de $1/x^2$ est $-1/x$. L'intégration par parties donne

$$\int_{\varepsilon}^X \frac{f(x)g(x)}{x^2} dx = \left[-\frac{f(x)g(x)}{x} \right]_{\varepsilon}^X + \int_{\varepsilon}^X \frac{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}{x} dx.$$

À la borne 0, II.3.a implique

$$\frac{f(x)g(x)}{x} = x \frac{f(x)}{x} \frac{g(x)}{x} \rightarrow 0.$$

À l'infini, le caractère borné de f, g donne $|f(x)g(x)/x| \leq M_f M_g / x \rightarrow 0$.

Justifions la convergence de l'intégrale du membre de droite, sans la supposer. Pour $\varepsilon < 1$, l'identité sur $[\varepsilon, 1]$ s'écrit

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{f'g + fg'}{x} dx = \int_{\varepsilon}^1 \frac{fg}{x^2} dx + f(1)g(1) - \frac{f(\varepsilon)g(\varepsilon)}{\varepsilon}.$$

Chacun des termes de droite possède une limite finie lorsque $\varepsilon \rightarrow 0^+$: l'intégrale de gauche converge en 0. Sur $[1, X]$, la même identité donne

$$\int_1^X \frac{f'g + fg'}{x} dx = \int_1^X \frac{fg}{x^2} dx + \frac{f(X)g(X)}{X} - f(1)g(1).$$

Chacun des termes de droite possède une limite finie lorsque $X \rightarrow +\infty$: la convergence à l'infini est établie. En additionnant les limites, on obtient

$$(f | g) = \int_0^{+\infty} \frac{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}{x} dx.$$

Cette preuve établit la convergence de l'intégrale complète de la somme. Elle ne suppose ni que f' et g' sont bornées, ni que chacun des deux termes du numérateur possède séparément une intégrale convergente.

6. a. Appartenance de u_{α} à E .

Pour $\alpha > 0$, $u_{\alpha}(x) = 1 - e^{-\alpha x}$ est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$, vérifie $u_{\alpha}(0) = 0$ et $0 \leq u_{\alpha}(x) < 1$ pour tout $x \geq 0$. Elle est donc bornée, et $u_{\alpha} \in E$.

b. Calcul de $(u_{\alpha} | u_{\beta})$.

Pour $\alpha, \beta > 0$, on a $u'_{\alpha}(x) = \alpha e^{-\alpha x}$ et $u'_{\beta}(x) = \beta e^{-\beta x}$. En utilisant II.5,

$$(u_{\alpha} | u_{\beta}) = \int_0^{+\infty} \frac{\alpha e^{-\alpha x}(1 - e^{-\beta x}) + \beta e^{-\beta x}(1 - e^{-\alpha x})}{x} dx.$$

Le numérateur se réécrit

$$\alpha(e^{-\alpha x} - e^{-(\alpha+\beta)x}) + \beta(e^{-\beta x} - e^{-(\alpha+\beta)x}).$$

Chacune des deux intégrales correspondantes est convergente par I.1, car ses deux paramètres sont strictement positifs. On peut donc appliquer la linéarité, puis I.3.d :

$$(u_\alpha | u_\beta) = \alpha \ln \frac{\alpha + \beta}{\alpha} + \beta \ln \frac{\alpha + \beta}{\beta}.$$

On peut également écrire $(\alpha + \beta) \ln(\alpha + \beta) - \alpha \ln \alpha - \beta \ln \beta$. En particulier, si $\alpha = \beta$, $(u_\alpha | u_\alpha) = 2\alpha \ln 2$.

c. Stricte positivité.

Méthode 1 — Utilisation de la formule explicite.

Comme $\alpha, \beta > 0$, les rapports $(\alpha + \beta)/\alpha$ et $(\alpha + \beta)/\beta$ sont strictement supérieurs à 1. Leurs logarithmes sont donc strictement positifs ; les deux coefficients sont eux aussi positifs. La formule de II.6.b donne $(u_\alpha | u_\beta) > 0$.

Méthode 2 — Signe de l'intégrande.

Pour tout $x > 0$, $1 - e^{-\alpha x} > 0$ et $1 - e^{-\beta x} > 0$. L'intégrande

$$q(x) = \frac{(1 - e^{-\alpha x})(1 - e^{-\beta x})}{x^2}$$

est donc continue et strictement positive sur $]0, +\infty[$. En particulier, $q(1) > 0$; par continuité, son intégrale sur un petit segment autour de 1 est strictement positive.

L'intégrale sur tout le domaine, convergente par II.3.b et à intégrande positive, est donc strictement positive.

La deuxième méthode établit le signe sans connaître la valeur exacte du produit scalaire. Le caractère défini positif d'un produit scalaire ne suffirait pas, à lui seul, à prouver qu'un produit scalaire de deux fonctions distinctes est positif.

Partie III — Étude de densités de variables aléatoires

Dans cette partie, $c > 0$.

1. Vérification des propriétés d'une densité.

Pour $x \leq 0$, $v(x) = 0$. Pour $x > 0$, on a $c^2 x < 4c^2 x$, donc $e^{-c^2 x} > e^{-4c^2 x}$; de plus, $x \ln 4 > 0$. Ainsi v est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$.

Elle est continue sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Elle peut être discontinue en 0, ce qui est autorisé pour une densité. En fait, I.1 donne $\lim_{x \rightarrow 0^+} v(x) = 3c^2 / \ln 4$, alors que $v(0) = 0$.

La convergence de son intégrale sur $]0, +\infty[$ résulte de I.1 appliquée à $a = c^2 > 0$ et $b = 4c^2 > 0$. Puis I.3.d donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v(x) dx = \frac{1}{\ln 4} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-c^2 x} - e^{-4c^2 x}}{x} dx = \frac{\ln(4c^2/c^2)}{\ln 4} = 1.$$

Les conditions de positivité, de régularité et de normalisation sont satisfaites : v est une densité.

2. Existence et calcul de l'espérance de X .

Comme $X \geq 0$, l'existence de l'espérance revient à la convergence de $\int_0^{+\infty} xv(x) dx$.
Pour $x > 0$,

$$xv(x) = \frac{e^{-c^2 x} - e^{-4c^2 x}}{\ln 4}.$$

Cette fonction est positive et majorée par $e^{-c^2 x} / \ln 4$, dont l'intégrale converge puisque $c > 0$. Donc X admet une espérance.

Les deux exponentielles ont séparément une intégrale convergente, et

$$\int_0^{+\infty} e^{-kx} dx = 1/k \text{ pour } k > 0. \text{ La linéarité donne}$$

$$E(X) = \frac{1}{\ln 4} \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{4c^2} \right) = \frac{3}{4c^2 \ln 4}.$$

3. a. Loi de $Y = \sqrt{X}$ par sa fonction de répartition.

Notons F_X et F_Y les fonctions de répartition de X et Y . La transformation $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie et continue sur le support de X , donc Y est une variable aléatoire réelle à valeurs positives ou nulles.

Pour $y < 0$, $F_Y(y) = 0$. Pour $y \geq 0$, la croissance de la racine carrée donne

$$F_Y(y) = P(\sqrt{X} \leq y) = P(X \leq y^2) = F_X(y^2).$$

La fonction F_X est continue sur $\mathbb{R}$ car X possède une densité, et $F_X(0) = 0$ puisque la densité est nulle sur $] -\infty, 0]$. Ainsi, F_Y est continue en 0, puis sur tout $\mathbb{R}$.

Sur $]0, +\infty[$, v est continue, donc F_X est de classe C^1 . Par dérivation d'une composée de fonctions dérivables,

$$F'_Y(y) = 2y v(y^2) = \frac{2(e^{-c^2 y^2} - e^{-4c^2 y^2})}{y \ln 4} \quad (y > 0).$$

On peut choisir comme densité de Y la fonction

$$w(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0, \\ \frac{2(e^{-c^2 y^2} - e^{-4c^2 y^2})}{y \ln 4} & \text{si } y > 0. \end{cases}$$

Elle est positive ou nulle et continue hors éventuellement de 0. Pour $0 < \varepsilon < L$, le

théorème fondamental du calcul intégral donne $\int_{\varepsilon}^L w(y) dy = F_Y(L) - F_Y(\varepsilon)$. En

faisant tendre ε vers 0^+ puis L vers $+\infty$, on obtient $\int_0^{+\infty} w(y) dy = 1 - 0 = 1$. Le même raisonnement sur une borne supérieure finie établit que l'intégrale de w restitue F_Y . Ainsi, Y est à densité et w est une densité de Y .

b. Espérance et variance de Y .

Établissons d'abord l'existence des moments. Pour $x \geq 0$, $\sqrt{x} \leq 1 + x$: pour $x \leq 1$, $\sqrt{x} \leq 1$, et pour $x \geq 1$, $\sqrt{x} \leq x$. Ainsi $0 \leq Y \leq 1 + X$. L'espérance de X étant finie, la domination prouve que $E(Y)$ existe. De plus, $Y^2 = X$, donc le moment d'ordre deux existe et

$$E(Y^2) = E(X) = \frac{3}{4c^2 \ln 4}.$$

Pour calculer le premier moment avec w , rappelons la valeur d'une intégrale gaussienne à partir de la normalisation de la loi normale centrée réduite. Sa densité est

$u \mapsto e^{-u^2/2}/\sqrt{2\pi}$. Elle est paire et d'intégrale 1, donc $\int_0^{+\infty} e^{-u^2/2} du = \sqrt{2\pi}/2$.

Pour $d > 0$, le changement affine $u = \sqrt{2} dy$, effectué d'abord sur un segment puis avec passage à la limite, donne

$$\int_0^{+\infty} e^{-d^2 y^2} dy = \frac{1}{\sqrt{2} d} \int_0^{+\infty} e^{-u^2/2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2d}.$$

Ces intégrales sont convergentes par la normalisation de la densité normale et ce changement affine. D'après la densité de Y ,

$$E(Y) = \frac{2}{\ln 4} \int_0^{+\infty} (e^{-c^2 y^2} - e^{-4c^2 y^2}) dy.$$

Les deux intégrales étant séparément convergentes, on peut les soustraire. Avec $d = c$ puis $d = 2c$,

$$E(Y) = \frac{2}{\ln 4} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2c} - \frac{\sqrt{\pi}}{4c} \right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2c \ln 4}.$$

La formule de Koenig-Huygens s'applique puisque le moment d'ordre deux est fini :

$$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = \frac{3}{4c^2 \ln 4} - \frac{\pi}{4c^2 (\ln 4)^2} = \frac{3 \ln 4 - \pi}{4c^2 (\ln 4)^2}.$$

Cette variance est strictement positive : la densité w est strictement positive sur $]0, +\infty[$, donc Y n'est pas presque sûrement constante. En effet, une variance nulle imposerait $Y = E(Y)$ presque sûrement, alors qu'une variable à densité a une probabilité nulle de prendre une valeur donnée.

PROBLÈME 2

Toutes les matrices et tous les espaces vectoriels de ce problème sont réels. On conserve les notations I_n , 0_n et SEP de l'énoncé.

Partie I — Deux exemples

1. Une infinité de racines carrées de I_2 .

Le produit matriciel donne

$$(R_\theta)^2 = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta & \cos \theta \sin \theta - \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta - \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \end{pmatrix} = I_2.$$

Ainsi, R_θ est une racine carrée de I_2 pour tout réel θ . Pour conclure qu'il y en a une

infinité, il faut vérifier que cette famille contient une infinité de matrices distinctes. Sur $[0, \pi]$, la fonction cosinus est strictement décroissante, puisque sa dérivée $-\sin \theta$ est strictement négative sur $]0, \pi[$. Par conséquent, deux paramètres distincts de $[0, \pi]$ donnent des coefficients en position $(1, 1)$ distincts, donc des matrices distinctes. La matrice I_2 admet une infinité de racines carrées.

2. Absence de racine carrée pour $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Méthode 1 — Résolution directe des équations sur les coefficients.

Supposons qu'il existe $R = \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}$ telle que $R^2 = J$. Le calcul de R^2 donne le système

$$a^2 + bd = 0, \quad b(a + e) = 1, \quad d(a + e) = 0, \quad e^2 + bd = 0.$$

L'égalité $b(a + e) = 1$ impose $a + e \neq 0$. Donc $d(a + e) = 0$ entraîne $d = 0$. Les première et quatrième équations deviennent $a^2 = 0$ et $e^2 = 0$, d'où $a = e = 0$. Cela contredit $a + e \neq 0$. Il n'existe donc aucune racine carrée de J .

Méthode 2 — Utilisation de la commutation.

Si $R^2 = J$, l'associativité du produit donne $RJ = RR^2 = R^3 = R^2R = JR$. Avec les mêmes notations,

$$RJ = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & d \end{pmatrix}, \quad JR = \begin{pmatrix} d & e \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Leur égalité impose $d = 0$ et $e = a$. Ainsi $R = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, puis $R^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$. L'égalité

$R^2 = J$ impose $a^2 = 0$, donc $a = 0$, alors que le coefficient $2ab$ devrait valoir 1. C'est impossible.

La première méthode traite directement toutes les équations ; la seconde exploite une contrainte de structure. La commutation d'une matrice avec sa racine carrée sera aussi utile dans la partie III.

Partie II — Racines carrées d'une matrice de la forme $I_n + N$ avec N nilpotente

1. Développement limité de $\sqrt{1+t}$.

Méthode 1 — Formule de Taylor-Young.

La fonction $\varphi(t) = \sqrt{1+t}$ est de classe C^3 sur $] -1, +\infty[$, qui contient 0. Ses dérivées sont

$$\varphi'(t) = \frac{1}{2}(1+t)^{-1/2}, \quad \varphi''(t) = -\frac{1}{4}(1+t)^{-3/2}, \quad \varphi'''(t) = \frac{3}{8}(1+t)^{-5/2}.$$

Ainsi $\varphi(0) = 1$, $\varphi'(0) = 1/2$, $\varphi''(0) = -1/4$ et $\varphi'''(0) = 3/8$. Taylor-Young à l'ordre 3 donne

$$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{16}t^3 + o(t^3) \quad (t \rightarrow 0).$$

Donc $a_0 = 1$, $a_1 = 1/2$, $a_2 = -1/8$ et $a_3 = 1/16$.

Méthode 2 — Identification des coefficients en élevant au carré.

La régularité de φ assure, par Taylor-Young, l'existence d'un développement limité d'ordre 3. Sa constante est $a_0 = \varphi(0) = 1$. Le produit de deux développements limités, autorisé au même ordre, donne

$$1+t = 1 + 2a_1t + (a_1^2 + 2a_2)t^2 + (2a_3 + 2a_1a_2)t^3 + o(t^3).$$

Par unicité du développement limité, $2a_1 = 1$, $a_1^2 + 2a_2 = 0$ et $2a_3 + 2a_1a_2 = 0$. On obtient successivement $a_1 = 1/2$, $a_2 = -1/8$ et $a_3 = 1/16$, donc le même développement limité.

La formule de Taylor fournit les coefficients par les dérivées ; l'identification utilise l'identité exacte $\varphi(t)^2 = 1+t$ et prépare la question suivante.

2. Une identité polynomiale exacte.

Posons $T(X) = 1 + X/2 - X^2/8 + X^3/16$. Développons son carré en regroupant chaque degré :

$$T(X)^2 = 1 + X + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right)X^2 + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\right)X^3 + \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{64}\right)X^4 - \frac{1}{64}X^5 + \frac{1}{256}X^6.$$

Le terme en X^4 provient de $2(X/2)(X^3/16) + (-X^2/8)^2$, celui en X^5 de $2(-X^2/8)(X^3/16)$, et celui en X^6 de $(X^3/16)^2$. Ainsi,

$$T(X)^2 = 1 + X + \frac{5}{64}X^4 - \frac{1}{64}X^5 + \frac{1}{256}X^6.$$

Le polynôme

$$Q(X) = -\frac{5}{64} + \frac{1}{64}X - \frac{1}{256}X^2$$

vérifie donc $1 + X = T(X)^2 + X^4Q(X)$. Cette égalité est exacte pour les polynômes ; elle ne résulte pas d'une substitution d'une matrice dans un reste de développement limité.

3. Construction de la racine carrée de $I_n + N$.

Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $N^4 = 0_n$. Évaluons l'identité polynomiale exacte de II.2 en N . Les puissances de N commutent entre elles, donc l'évaluation préserve les sommes et les produits :

$$I_n + N = \left(I_n + \frac{1}{2}N - \frac{1}{8}N^2 + \frac{1}{16}N^3 \right)^2 + N^4Q(N).$$

Comme $N^4 = 0_n$, le dernier terme est nul. Par conséquent,

$$R = I_n + \frac{1}{2}N - \frac{1}{8}N^2 + \frac{1}{16}N^3$$

vérifie $R^2 = I_n + N$ et constitue une racine carrée cherchée. La formule reste valable si une puissance plus petite de N est déjà nulle, notamment si $N = 0_n$.

Partie III — Racines carrées d'une matrice admettant n valeurs propres strictement positives et deux à deux distinctes

1. a. Stabilité des sous-espaces propres.

Soit λ une valeur propre de f et $x \in \text{SEP}(f, \lambda) = \text{Ker}(f - \lambda \text{Id})$. Alors $f(x) = \lambda x$. La commutation et la linéarité de g donnent

$$f(g(x)) = g(f(x)) = g(\lambda x) = \lambda g(x).$$

Ainsi $g(x) \in \text{SEP}(f, \lambda)$, y compris lorsque $g(x) = 0$. Par conséquent, chaque sous-espace propre de f est stable par g .

b. Vecteurs propres communs.

Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les n valeurs propres distinctes de f . Chaque espace $\text{SEP}(f, \lambda_i)$ est de dimension au moins 1. Les espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe, donc

$$\sum_{i=1}^n \dim \text{SEP}(f, \lambda_i) \leq n.$$

Avec n termes chacun au moins égal à 1, tous ces espaces sont donc de dimension exactement 1.

Si $x \neq 0$ est un vecteur propre de f associé à λ_i , alors $\text{SEP}(f, \lambda_i) = \text{Vect}(x)$. D'après III.1.a, $g(x)$ appartient à cette droite ; il existe donc un réel μ tel que $g(x) = \mu x$. Comme $x \neq 0$, c'est un vecteur propre de g de valeur propre μ .

Le cas $g(x) = 0$ est inclus : alors $\mu = 0$, qui est une valeur propre de g .

c. Diagonalisation de f et de g .

Choisissons, pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$, un vecteur non nul $x_i \in \text{SEP}(f, \lambda_i)$. Des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont linéairement indépendants. La famille $(x_1, \dots, x_n)$, de n vecteurs dans $\mathbb{R}^n$, est donc une base. Dans cette base, la matrice de f est $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$: f est diagonalisable.

Soit maintenant une base quelconque $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ constituée de vecteurs propres de f . D'après III.1.b, pour chaque j il existe $\mu_j \in \mathbb{R}$ tel que $g(v_j) = \mu_j v_j$. La j -ième colonne de la matrice de g dans $\mathcal{B}$ a donc μ_j en position j et 0 ailleurs. Cette matrice est $\text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$.

Ainsi, g est diagonalisable dans toute base propre de f . Il n'est pas nécessaire que les valeurs propres de g soient distinctes.

2. a. Construction de P et de D .

Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres strictement positives et distinctes de A . Pour chaque i , choisissons une colonne propre non nulle v_i telle que $Av_i = \lambda_i v_i$. Les colonnes v_i sont linéairement indépendantes, donc

$$P = (v_1 \ \dots \ v_n)$$

est inversible. Si $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, les égalités sur les colonnes donnent $AP = PD$. En multipliant à gauche par P^{-1} , on obtient $P^{-1}AP = D$, qui est diagonale.

b. Un exemple de racine carrée de A .

Chaque λ_i est strictement positive, donc sa racine carrée réelle $\sqrt{\lambda_i}$ est définie. Posons

$$\Delta = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}), \quad R_+ = P\Delta P^{-1}.$$

Comme $\Delta^2 = D$ et $A = PDP^{-1}$,

$$R_+^2 = P\Delta P^{-1}P\Delta P^{-1} = P\Delta^2 P^{-1} = PDP^{-1} = A.$$

La matrice R_+ est donc une racine carrée de A , exprimée à l'aide de P et des coefficients diagonaux de D .

c. Commutation et forme diagonale de toute racine carrée.

Si $R^2 = A$, alors $AR = R^2R = R^3 = RR^2 = RA$.

Méthode 1 — Application du résultat sur les espaces propres.

Les endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ associés à A et à R commutent, et celui associé à A admet n valeurs propres réelles distinctes. Les colonnes de P constituent une base propre de cet endomorphisme. D'après III.1.c, la matrice de l'endomorphisme associé à R dans cette base est diagonale. Or cette matrice est $P^{-1}RP$: elle est donc diagonale.

Méthode 2 — Équations sur les coefficients dans la base propre.

Posons $B = P^{-1}RP$. La relation $AR = RA$, conjuguée par P , donne $DB = BD$. Si $B = (b_{ij})$, le coefficient (i, j) de DB est $\lambda_i b_{ij}$, et celui de BD est $b_{ij} \lambda_j$. Ainsi,

$$(\lambda_i - \lambda_j)b_{ij} = 0.$$

Si $i \neq j$, les valeurs propres étant distinctes, $\lambda_i - \lambda_j \neq 0$, d'où $b_{ij} = 0$. Tous les coefficients hors diagonale sont nuls : $B = P^{-1}RP$ est diagonale.

La première méthode réutilise la stabilité des espaces propres ; la seconde donne une vérification directe dans les coordonnées de la base propre.

d. Dénombrement exact des racines carrées.

D'après III.2.c, toute racine carrée R s'écrit $R = PBP^{-1}$ avec $B = \text{diag}(r_1, \dots, r_n)$. En conjuguant l'égalité $R^2 = A$, on obtient $B^2 = D$, donc

$$r_i^2 = \lambda_i \quad \text{pour chaque } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Comme $\lambda_i > 0$, cette équation possède exactement deux solutions réelles : $r_i = \sqrt{\lambda_i}$ ou $r_i = -\sqrt{\lambda_i}$. Toute racine carrée est donc de la forme

$$R_\varepsilon = P \operatorname{diag}(\varepsilon_1 \sqrt{\lambda_1}, \dots, \varepsilon_n \sqrt{\lambda_n}) P^{-1}, \quad (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n.$$

Réciproquement, chaque matrice de cette forme a pour carré A , comme le montre le calcul de III.2.b avec ces signes. Il y a 2^n choix de signes.

Enfin, deux choix distincts donnent des matrices diagonales distinctes, car les racines carrées $\sqrt{\lambda_i}$ ne sont pas nulles. La conjugaison $B \mapsto PBP^{-1}$ est injective : si deux images étaient égales, une multiplication à gauche par P^{-1} et à droite par P donnerait l'égalité des matrices initiales. Les 2^n racines carrées sont donc toutes distinctes, et il n'en existe pas d'autres.

Partie IV — Racine carrée symétrique positive d'une matrice symétrique positive

1. Signe des valeurs propres de S .

Soit λ une valeur propre de S , et soit $x \neq 0$ une colonne propre associée. Alors $Sx = \lambda x$, d'où

$${}^t x S x = \lambda {}^t x x.$$

La positivité de S donne ${}^t x S x \geq 0$, et ${}^t x x = \|x\|^2 > 0$ pour le produit scalaire euclidien usuel. On peut donc diviser par cette dernière quantité :

$$\lambda = \frac{{}^t_x S x}{{}^t_x x} \geq 0.$$

Toutes les valeurs propres de S sont donc positives ou nulles. Le même argument s'applique à toute matrice symétrique positive, notamment aux matrices R considérées en IV.4.

2. Diagonalisation orthogonale.

La matrice S est réelle et symétrique. Le théorème spectral réel assure l'existence d'une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de S . Notons ses colonnes $v_1, \dots, v_n$ et leurs valeurs propres respectives $d_1, \dots, d_n$.

La matrice de passage $P = (v_1 \cdots v_n)$ entre deux bases orthonormales vérifie $P^{-1} = {}^tP$: elle est orthogonale. Les relations $Sv_j = d_j v_j$ donnent

$$D = P^{-1}SP = {}^tPSP = \text{diag}(d_1, \dots, d_n).$$

D'après IV.1, chaque $d_j \geq 0$. Les valeurs d_j peuvent être répétées ou nulles : le théorème spectral n'exige pas qu'elles soient distinctes.

3. Construction d'une racine carrée symétrique positive.

Posons $\Delta = \text{diag}(\sqrt{d_1}, \dots, \sqrt{d_n})$ et $R_0 = P\Delta {}^tP$. Les racines carrées sont bien définies puisque les d_j sont positives ou nulles.

Comme ${}^tPP = I_n$ et $\Delta^2 = D$,

$$R_0^2 = P\Delta {}^tPP\Delta {}^tP = P\Delta^2 {}^tP = PD {}^tP = S.$$

Vérifions la symétrie :

$${}^t(R_0) = {}^t(P\Delta^tP) = P^t\Delta^tP = P\Delta^tP = R_0,$$

car Δ est diagonale réelle. Pour toute colonne $x \in \mathbb{R}^n$, posons $y = {}^tPx$. Alors

$${}^txR_0x = {}^ty\Delta y = \sum_{j=1}^n \sqrt{d_j} y_j^2 \geq 0.$$

La matrice R_0 est donc une racine carrée symétrique positive de S . Si certains d_j sont nuls, les termes correspondants valent simplement 0 ; aucune inversibilité de S ou de R_0 n'est nécessaire.

4. a. Relation entre les espaces propres de R et de S .

Soit R symétrique positive telle que $R^2 = S$. Si λ est une valeur propre de R et si $x \in \text{SEP}(R, \lambda)$, alors $Rx = \lambda x$. Par linéarité,

$$Sx = R^2x = R(\lambda x) = \lambda Rx = \lambda^2 x.$$

Ainsi $\text{SEP}(R, \lambda) \subset \text{SEP}(S, \lambda^2)$. Le premier espace contient un vecteur non nul puisqu'il correspond à une valeur propre ; ce vecteur est un vecteur propre de S associé à λ^2 . Donc λ^2 est une valeur propre de S .

Par l'argument de IV.1 appliqué à R , on a en outre $\lambda \geq 0$.

b. Inclusion des sommes directes.

Les valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ de R sont toutes positives ou nulles. Leurs carrés sont donc deux à deux distincts : si $\lambda_i^2 = \lambda_j^2$, la non-négativité impose $\lambda_i = \lambda_j$.

Les espaces $\text{SEP}(R, \lambda_i)$ sont en somme directe, de même que les espaces $\text{SEP}(S, \lambda_i^2)$, puisque les valeurs propres correspondantes sont distinctes dans chaque famille.

Si $x \in \bigoplus_{i=1}^p \text{SEP}(R, \lambda_i)$, il s'écrit

$$x = \sum_{i=1}^p x_i$$

avec $x_i \in \text{SEP}(R, \lambda_i)$. D'après IV.4.a, chaque x_i appartient à $\text{SEP}(S, \lambda_i^2)$. On a donc

$$\bigoplus_{i=1}^p \text{SEP}(R, \lambda_i) \subset \bigoplus_{i=1}^p \text{SEP}(S, \lambda_i^2).$$

La positivité de R est essentielle ici pour assurer que les valeurs propres au carré restent distinctes.

c. Comparaison des dimensions.

La matrice R est réelle symétrique, donc diagonalisable par le théorème spectral. La somme de tous ses sous-espaces propres est ainsi $\mathbb{R}^n$. Comme cette somme est directe,

$$n = \sum_{i=1}^p \dim \text{SEP}(R, \lambda_i).$$

L'inclusion de IV.4.b donne une inégalité entre les dimensions des deux sommes directes. La seconde somme est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$, donc sa dimension est au plus n . Ainsi,

$$n = \sum_{i=1}^p \dim \text{SEP}(R, \lambda_i) \leq \sum_{i=1}^p \dim \text{SEP}(S, \lambda_i^2) \leq n.$$

Les trois quantités sont nécessairement égales à n .

d. Valeurs propres de S et égalité des sous-espaces propres.

Pour chaque i , IV.4.a donne l'inclusion $\text{SEP}(R, \lambda_i) \subset \text{SEP}(S, \lambda_i^2)$; la différence de leurs dimensions est donc un entier positif ou nul. D'après IV.4.c, la somme de ces différences vaut 0. Chaque différence est donc nulle. Une inclusion entre deux espaces de même dimension finie est une égalité, d'où

$$\text{SEP}(R, \lambda_i) = \text{SEP}(S, \lambda_i^2) \quad \text{pour tout } i \in \{1, \dots, p\}.$$

De plus, IV.4.c montre que $\bigoplus_{i=1}^p \text{SEP}(S, \lambda_i^2)$ a dimension n , donc est égal à $\mathbb{R}^n$.

S'il existait une valeur propre μ de S différente de tous les λ_i^2 , son sous-espace propre serait non nul et en somme directe avec tous les précédents. La dimension de leur somme serait alors au moins $n + 1$, ce qui est impossible dans $\mathbb{R}^n$. Donc les seules valeurs propres de S sont $\lambda_1^2, \dots, \lambda_p^2$.

e. Diagonalité de $P^{-1}RP$.

La matrice P est celle fixée en IV.2 : ses colonnes v_j constituent une base propre orthonormale de S et $Sv_j = d_j v_j$. D'après IV.4.d, pour chaque j , il existe un unique i tel que $d_j = \lambda_i^2$, et

$$v_j \in \text{SEP}(S, \lambda_i^2) = \text{SEP}(R, \lambda_i).$$

Ainsi $Rv_j = \lambda_i v_j$. Comme $\lambda_i \geq 0$, on a $\lambda_i = \sqrt{d_j}$, donc

$$Rv_j = \sqrt{d_j} v_j \quad \text{pour chaque } j \in \{1, \dots, n\}.$$

Les colonnes de P forment donc aussi une base propre de R , avec cet ordre des valeurs propres. Par conséquent,

$$P^{-1}RP = \text{diag}(\sqrt{d_1}, \dots, \sqrt{d_n}) = \Delta.$$

Même si une valeur propre de S est répétée, tout son espace propre est un espace propre de R : la base P déjà choisie convient sans modification.

f. Unicité de la racine carrée symétrique positive.

Méthode 1 — Conclusion à partir des espaces propres.

La question IV.3 fournit une racine carrée symétrique positive $R_0 = P\Delta^tP$. Si R est une racine carrée symétrique positive quelconque, IV.4.e impose $P^{-1}RP = \Delta$, où $\Delta = \text{diag}(\sqrt{d_1}, \dots, \sqrt{d_n})$ est entièrement déterminée par S et la base P fixée.

En multipliant à gauche par P et à droite par $P^{-1} = {}^tP$, on obtient $R = P\Delta^tP = R_0$. La racine carrée symétrique positive existe donc et est unique.

Méthode 2 — Factorisation sur chaque sous-espace propre de S .

On peut également établir directement l'action de R sur chaque espace propre de S , sans compter les dimensions des espaces propres de R . Soit $d \geq 0$ une valeur propre de S et $x \in \text{SEP}(S, d)$.

Si $d = 0$, la symétrie de R et l'égalité $R^2 = S$ donnent

$$\|Rx\|^2 = {}^t_x R R x = {}^t_x R^2 x = {}^t_x S x = 0.$$

Donc $Rx = 0 = \sqrt{d}x$.

Si $d > 0$, posons $r = \sqrt{d} > 0$. La matrice $R + rI_n$ est inversible : en effet, si $(R + rI_n)y = 0$, alors

$$0 = {}^t_y (R + rI_n) y = {}^t_y R y + r\|y\|^2 \geq r\|y\|^2,$$

car R est positive. Ainsi $y = 0$; l'application linéaire associée est injective en dimension finie, donc bijective. D'autre part,

$$(R + rI_n)(R - rI_n)x = (R^2 - r^2I_n)x = (S - dI_n)x = 0.$$

L'inversibilité de $R + rI_n$ impose $(R - rI_n)x = 0$, donc $Rx = \sqrt{d}x$.

Dans tous les cas, R agit par multiplication par $\sqrt{d}$ sur l'espace propre de S associé à d . La base orthonormale de IV.2 est constituée de vecteurs de ces espaces ; elle donne donc $P^{-1}RP = \Delta$, puis $R = R_0$. Cela prouve à nouveau l'unicité, y compris lorsque S est singulière.

La première méthode suit les questions et utilise la diagonalisation de R ; la seconde exploite une factorisation et la positivité pour traiter séparément les valeurs propres nulles et strictement positives.

Relevé des adaptations

Aucune question n'a nécessité d'adaptation : les deux problèmes se traitent intégralement avec les outils du référentiel fourni. La notation de la transposée a été harmonisée en ${}^tX$; cela ne modifie aucun énoncé mathématique.