



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques 1

2008

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Problème

On confond polynôme et application polynomiale de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On note E l'ensemble des applications $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues sur $\mathbb{R}$ et telles que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (u(x))^2 e^{-x^2} dx \text{ converge.}$$

On note F le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des applications polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, F_n le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des applications polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à n .

Préliminaire : Valeur de l'intégrale de Gauss

En considérant une variable aléatoire suivant une loi normale, justifier :

$$\forall m \in \mathbb{R}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-m)^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Partie I : Un produit scalaire sur E

1. Établir, pour tout $(\alpha, \beta) \in [0, +\infty[^2$:

$$\alpha\beta \leq \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2).$$

2. En déduire que, pour tout $(u, v) \in E^2$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)v(x)e^{-x^2} dx$ converge.

On note $(\cdot | \cdot)$ l'application de E^2 dans $\mathbb{R}$ qui, à tout $(u, v) \in E^2$, associe

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)v(x)e^{-x^2} dx.$$

On notera la présence du facteur $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

3. a. Démontrer que E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

3. b. Montrer que l'application $(\cdot | \cdot)$ est un produit scalaire sur E .

4. Démontrer : $F \subset E$.

On note encore $(\cdot | \cdot)$ la restriction à F ou à F_n , pour $n \in \mathbb{N}$, du produit scalaire $(\cdot | \cdot)$ sur E . On admet que cette restriction est encore un produit scalaire sur F ou sur F_n .

On note $\| \cdot \|$ la norme sur E associée au produit scalaire $(\cdot | \cdot)$, définie, pour tout $u \in E$, par :

$$\|u\| = \sqrt{(u | u)}.$$

Partie II : Polynômes d'Hermite

On note w l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^∞ , définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $w(x) = e^{-x^2}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note H_n l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} w^{(n)}(x)$, où $w^{(n)}$ désigne la dérivée n -ième de w .

En particulier : $H_0(x) = 1$.

1. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $H_1(x)$, $H_2(x)$, $H_3(x)$. Faire figurer les calculs.

2. a. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H'_n(x).$$

2. b. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est un polynôme de degré n .

2. c. Contrôler alors les résultats obtenus en II.1 et calculer H_4 . Faire figurer les calculs.

3. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le coefficient du terme de plus haut degré de H_n .

4. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R} : H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$.

Qu'en déduit-on, en termes de parité, pour l'application H_n ?

Partie III : Lien entre le produit scalaire et les polynômes d'Hermite

1. a. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $P \in F$:

$$(P' \mid H_{n-1}) = (P \mid H_n),$$

où $(\cdot \mid \cdot)$ est le produit scalaire sur F défini en I.4.

À cet effet, on pourra commencer par effectuer une intégration par parties sur un intervalle fermé borné.

1. b. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $P \in F_{n-1} : (P \mid H_n) = 0$.

1. c. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(H_0, \dots, H_n)$ est orthogonale dans F .

2. Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(H_0, \dots, H_n)$ est une base de F_n .

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.

3. a. Montrer : $\|H_n\|^2 = (H_n^{(n)} \mid H_0)$, où $\|\cdot\|$ est définie en I.4.

3. b. En déduire la valeur de $\|H_n\|$.

Partie IV : Un endomorphisme symétrique

On note f, g, h les applications définies de F dans F , pour tout $P \in F$, par :

$$f(P) = -P'' + 2XP' + P, \quad g(P) = 2XP - P', \quad h(P) = P'.$$

Ainsi, par exemple, pour tout $P \in F$ et tout $x \in \mathbb{R} : (g(P))(x) = 2xP(x) - P'(x)$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de F .

On admet que g et h sont aussi des endomorphismes de F , et on note Id_F l'application identique de F .

2. a. Établir : $g \circ h = f - \text{Id}_F$ et $h \circ g = f + \text{Id}_F$.

2. b. En déduire : $f \circ g - g \circ f = 2g$.

3. Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $P \in F$, si $f(P) = \lambda P$, alors $f(g(P)) = (\lambda + 2)g(P)$.

4. a. Calculer $f(H_0)$.

4. b. Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $g(H_k)$, et en déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $f(H_k) = (2k + 1)H_k$.

5. Établir, pour tout $(P, Q) \in F^2$:

$$(P' \mid Q') = (f(P) \mid Q) - (P \mid Q).$$

À cet effet, on pourra commencer par effectuer une intégration par parties sur un intervalle fermé borné.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$.

6. a. Montrer : $\forall P \in F_n, \quad f(P) \in F_n$.

On note f_n l'endomorphisme de F_n défini par : $\forall P \in F_n, \quad f_n(P) = f(P)$.

6. b. Montrer que f_n est un endomorphisme symétrique de F_n .

6. c. Donner une base orthonormale de F_n constituée de vecteurs propres de f_n .

Partie V : Intervention d'exponentielles

On note, pour tout $a \in \mathbb{R}$, φ_a l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $\varphi_a(x) = e^{ax}$.

1. Vérifier, pour tout $a \in \mathbb{R}$: $\varphi_a \in E$.

2. Montrer, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:

$$(\varphi_a | \varphi_b) = e^{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}.$$

3. Déterminer la nature de la série

$$\sum_{n \geq 1} \|\varphi_{\sqrt{\ln n}}\|^{-2}.$$

4. Montrer que la série

$$\sum_{n \geq 0} \|\varphi_{\sqrt{n}}\|^{-2}$$

converge et calculer sa somme.

Partie VI : Une limite de probabilité conditionnelle

Soit la fonction Φ définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \Phi(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

1. Montrer que Φ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et déterminer sa dérivée Φ' .

2. Soient G et K les fonctions définies sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad G(x) = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^3} \right) \frac{e^{-x^2}}{2} \quad \text{et} \quad K(x) = \frac{e^{-x^2}}{2x}.$$

2. a. Déterminer les limites des fonctions Φ , G et K en $+\infty$.

2. b. Déterminer les sens de variation des fonctions $G - \Phi$ et $\Phi - K$.

2. c. En déduire : $\forall x \in]0, +\infty[, \quad G(x) \leq \Phi(x) \leq K(x)$.

2. d. Montrer : $\Phi(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-x^2}}{2x}$.

3. Soit X une variable aléatoire normale d'espérance égale à 0 et d'écart-type égal à $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

3. a. Pour tout réel x strictement positif, exprimer la probabilité $P(X \leq x)$ à l'aide de la fonction Φ .

3. b. Soit c un réel strictement positif.

Pour tout réel x , on considère la probabilité conditionnelle $P_{(X > x)}(X \leq x + c)$.

Montrer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} P_{(X > x)}(X \leq x + c) = 1$.