



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques 1

2008

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Problème

Préliminaire : Valeur de l'intégrale de Gauss

On utilise la normalisation de la densité d'une loi normale, comme demandé. Fixons $m \in \mathbb{R}$ et considérons une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(m, 1/2)$, de moyenne m et d'écart-type $1/\sqrt{2}$.

Sa densité est la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(x-m)^2}$. L'intégrale de cette densité sur $\mathbb{R}$ converge et vaut 1. En multipliant cette égalité par $\sqrt{\pi}$, on obtient :

$$\forall m \in \mathbb{R}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-m)^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Partie I : Un produit scalaire sur E

1. Pour $\alpha, \beta \geq 0$, la positivité d'un carré donne :

$$0 \leq (\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2.$$

On en déduit $2\alpha\beta \leq \alpha^2 + \beta^2$, puis $\alpha\beta \leq \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)$. L'égalité a lieu exactement lorsque $\alpha = \beta$.

2. Fixons $u, v \in E$. On applique I.1 à $\alpha = |u(x)|$ et $\beta = |v(x)|$:

$$0 \leq |u(x)v(x)|e^{-x^2} \leq \frac{1}{2}(u(x)^2 + v(x)^2)e^{-x^2}.$$

Les fonctions considérées sont continues. Par définition de E , les intégrales des deux termes du majorant convergent sur $\mathbb{R}$, donc séparément en $-\infty$ et en $+\infty$.

Le théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions positives entraîne la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x)v(x)|e^{-x^2} dx$.

Ainsi, l'intégrale demandée est absolument convergente, donc convergente. Le produit $(u | v)$ est bien défini pour tout couple de E^2 .

3. a. On montre que E est un sous-espace de l'espace vectoriel réel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

La fonction nulle appartient à E , puisque l'intégrale de son carré pondéré vaut 0.

Soient $u, v \in E$ et $a, b \in \mathbb{R}$. La fonction $au + bv$ est continue. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'inégalité $2|au(x)bv(x)| \leq a^2u(x)^2 + b^2v(x)^2$ donne :

$$0 \leq (au(x) + bv(x))^2 e^{-x^2} \leq 2a^2u(x)^2 e^{-x^2} + 2b^2v(x)^2 e^{-x^2}.$$

Le majorant a une intégrale convergente, par appartenance de u, v à E . Le théorème de comparaison montre que $au + bv \in E$.

Ainsi, E est stable par combinaison linéaire et contient la fonction nulle : c'est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

3. b. La définition est justifiée par I.2. On vérifie la bilinéarité, la symétrie et le caractère défini positif.

Pour $u, v, z \in E$ et $a, b \in \mathbb{R}$, la linéarité des intégrales convergentes entraîne :

$$(au + bv | z) = a(u | z) + b(v | z).$$

Comme $u(x)v(x) = v(x)u(x)$, on a $(u | v) = (v | u)$. La symétrie et la linéarité dans la première variable donnent également la linéarité dans la seconde.

Pour tout $u \in E$, l'intégrande $u(x)^2 e^{-x^2}$ est positif ou nul, donc $(u | u) \geq 0$.

Supposons $(u | u) = 0$. Si u n'était pas la fonction nulle, il existerait $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $u(x_0) \neq 0$. Par continuité de u , il existerait $\delta > 0$ tel que $|u(x)| \geq |u(x_0)|/2$ pour $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.

Sur ce segment, $e^{-x^2} \geq e^{-(|x_0|+\delta)^2} > 0$. Par positivité et croissance de l'intégrale :

$$(u | u) \geq \frac{2\delta}{\sqrt{\pi}} \frac{u(x_0)^2}{4} e^{-(|x_0|+\delta)^2} > 0,$$

ce qui contredit l'hypothèse. Ainsi, $(u | u) = 0$ implique $u = 0$. La réciproque résulte immédiatement de la définition.

L'application $(\cdot | \cdot)$ est donc un produit scalaire sur E .

4. Soit $P \in F$. Le cas $P = 0$ est déjà traité. Sinon, notons d son degré. Il existe $C > 0$ tel que $|P(x)| \leq C|x|^d$ lorsque $|x| \geq 1$.

Pour $|x| \geq 1$, on a alors :

$$0 \leq x^2 P(x)^2 e^{-x^2} \leq C^2 |x|^{2d+2} e^{-x^2}.$$

En posant $y = x^2$, le dernier terme s'écrit $C^2 y^{d+1} e^{-y}$ et tend vers 0 lorsque $x \rightarrow \pm\infty$, par croissance comparée de l'exponentielle et des puissances.

Ainsi, $P(x)^2 e^{-x^2} = o(1/x^2)$ aux deux infinis. En dehors d'un segment suffisamment grand, cette fonction est donc majorée par $1/x^2$, dont les intégrales convergent aux deux infinis. Sur le segment restant, elle est continue et intégrable.

L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} P(x)^2 e^{-x^2} dx$ converge. Comme P est continu, $P \in E$. On conclut $F \subset E$.

On utilisera aussi la conséquence suivante des mêmes croissances comparées : pour tout polynôme réel R , $R(x)e^{-x^2} \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow \pm\infty$. Les intégrales de $|R(x)|e^{-x^2}$ convergent également : appliquer I.2 aux polynômes R et 1.

Partie II : Polynômes d'Hermite

1. On dérive successivement $w(x) = e^{-x^2}$ en faisant apparaître le facteur e^{-x^2} :

$$w'(x) = -2xe^{-x^2}.$$

$$w''(x) = -2e^{-x^2} + (-2x)(-2x)e^{-x^2} = (4x^2 - 2)e^{-x^2}.$$

$$w'''(x) = 8xe^{-x^2} + (4x^2 - 2)(-2x)e^{-x^2} = (-8x^3 + 12x)e^{-x^2}.$$

La définition $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} w^{(n)}(x)$ donne donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$H_1(x) = 2x, \quad H_2(x) = 4x^2 - 2, \quad H_3(x) = 8x^3 - 12x.$$

2. a. Fixons $n \in \mathbb{N}$. Les fonctions intervenant sont de classe C^∞ , donc on peut dériver la définition de H_n :

$$H'_n(x) = (-1)^n(2xe^{x^2}w^{(n)}(x) + e^{x^2}w^{(n+1)}(x)).$$

Le premier terme vaut $2xH_n(x)$. Le second vaut $-H_{n+1}(x)$, car $(-1)^n = -(-1)^{n+1}$.

Ainsi :

$$H'_n(x) = 2xH_n(x) - H_{n+1}(x).$$

En réorganisant, on obtient $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H'_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$.

2. b. On raisonne par récurrence sur n .

Pour $n = 0$, $H_0 = 1$ est un polynôme de degré 0.

Supposons H_n polynomial de degré n , de coefficient dominant $a_n \neq 0$. Alors $2XH_n$ est un polynôme de degré $n + 1$, de coefficient dominant $2a_n$.

Si $n \geq 1$, H'_n est de degré $n - 1$; si $n = 0$, $H'_n = 0$. Dans les deux cas, la soustraction de H'_n ne modifie pas le terme de degré $n + 1$ de $2XH_n$.

Par II.2.a, $H_{n+1} = 2XH_n - H'_n$ est donc de degré $n + 1$. La récurrence prouve $\deg H_n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. c. On applique la récurrence de II.2.a, à partir de $H_0 = 1$:

$$H_1 = 2X \times 1 - 0 = 2X.$$

$$H_2 = 2X(2X) - 2 = 4X^2 - 2.$$

$$H_3 = 2X(4X^2 - 2) - 8X = 8X^3 - 12X.$$

Ces trois expressions confirment II.1. Enfin, $H'_3 = 24X^2 - 12$, donc :

$$H_4 = 2X(8X^3 - 12X) - (24X^2 - 12) = 16X^4 - 48X^2 + 12.$$

3. Notons a_n le coefficient dominant de H_n . La preuve de II.2.b donne $a_{n+1} = 2a_n$, et $a_0 = 1$.

La suite (a_n) est géométrique de raison 2, donc $a_n = 2^n$. Le terme de plus haut degré de H_n est ainsi $2^n X^n$.

4. Méthode 1 — Récurrence à partir de la relation entre les polynômes

Pour $n = 0$, $H_0(-x) = 1 = H_0(x)$.

Supposons $H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$ pour tout x . En dérivant cette identité, on obtient $-H'_n(-x) = (-1)^n H'_n(x)$, soit $H'_n(-x) = (-1)^{n+1} H'_n(x)$.

La relation II.2.a donne alors :

$$H_{n+1}(-x) = -2xH_n(-x) - H'_n(-x).$$

En remplaçant les deux termes à l'aide de l'hypothèse et de sa dérivée :

$$H_{n+1}(-x) = (-1)^{n+1} (2xH_n(x) - H'_n(x)) = (-1)^{n+1} H_{n+1}(x).$$

La propriété est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Méthode 2 — Parité des dérivées de la fonction initiale

La fonction w est paire, donc $w(-x) = w(x)$. En dérivant n fois cette identité, la règle de dérivation d'une composition affine donne $(-1)^n w^{(n)}(-x) = w^{(n)}(x)$.

Comme $(-1)^n$ est son propre inverse, $w^{(n)}(-x) = (-1)^n w^{(n)}(x)$. La définition entraîne :

$$H_n(-x) = (-1)^n e^{x^2} w^{(n)}(-x) = e^{x^2} w^{(n)}(x) = (-1)^n H_n(x).$$

Les deux méthodes aboutissent à la même conclusion : H_n est pair si n est pair et impair si n est impair. La première utilise une récurrence entre polynômes ; la seconde exploite directement la parité de la fonction dont ils proviennent.

Partie III : Lien entre le produit scalaire et les polynômes d'Hermite

1. a. Fixons $n \geq 1$ et $P \in F$. D'après II.2.a :

$$(H_{n-1}(x)e^{-x^2})' = (H'_{n-1}(x) - 2xH_{n-1}(x))e^{-x^2} = -H_n(x)e^{-x^2}.$$

Pour $A < B$ réels, une intégration par parties sur le segment $[A, B]$ donne donc :

$$\int_A^B P'(x)H_{n-1}(x)e^{-x^2} dx = [P(x)H_{n-1}(x)e^{-x^2}]_A^B + \int_A^B P(x)H_n(x)e^{-x^2} dx.$$

Les deux intégrales sont absolument convergentes aux deux infinis par I.2 et I.4, puisque P', H_{n-1}, P, H_n sont des polynômes. De plus, PH_{n-1} est polynomial, donc $P(x)H_{n-1}(x)e^{-x^2} \rightarrow 0$ aux deux infinis, comme établi après I.4.

On peut ainsi faire tendre A vers $-\infty$ et B vers $+\infty$, puis multiplier par $1/\sqrt{\pi}$:

$$(P' | H_{n-1}) = (P | H_n).$$

1. b. Soient $n \geq 1$ et $P \in F_{n-1}$. On applique successivement III.1.a, en diminuant à chaque étape l'indice du polynôme d'Hermite :

$$(P | H_n) = (P' | H_{n-1}) = (P'' | H_{n-2}) = \dots = (P^{(n)} | H_0).$$

Chaque application est licite, puisque toute dérivée de P reste un polynôme et que l'indice utilisé est au moins 1.

Comme $\deg P \leq n-1$, la dérivée $P^{(n)}$ est nulle. Par conséquent, $(P | H_n) = 0$.

1. c. Fixons $n \in \mathbb{N}$. Pour deux indices j, k tels que $0 \leq j < k \leq n$, on a $\deg H_j = j \leq k-1$, donc $H_j \in F_{k-1}$.

La question III.1.b appliquée à $P = H_j$ donne $(H_j | H_k) = 0$. Par symétrie du produit scalaire, la même orthogonalité vaut dans l'ordre inverse.

Ainsi, les polynômes distincts de la famille $(H_0, \dots, H_n)$ sont deux à deux orthogonaux. Pour $n = 0$, il n'y a aucune paire d'indices distincts : la conclusion reste valable.

2. Méthode 1 — Orthogonalité et dimension

Les polynômes $H_0, \dots, H_n$ appartiennent à F_n , et aucun n'est nul, puisque $\deg H_k = k$. Par III.1.c, ils sont deux à deux orthogonaux.

Pour vérifier la liberté, supposons

$$\sum_{k=0}^n a_k H_k = 0.$$

En prenant le produit scalaire avec H_j , pour un indice $j \in \{0, \dots, n\}$, on obtient $a_j \|H_j\|^2 = 0$.

Le produit scalaire étant défini positif et $H_j \neq 0$, on a $\|H_j\|^2 > 0$. Ainsi, $a_j = 0$ pour tout j : la famille est libre.

Elle contient $n + 1$ éléments, et $\dim F_n = n + 1$. C'est donc une base de F_n .

Méthode 2 — Degrés distincts

Supposons encore

$$\sum_{k=0}^n a_k H_k = 0,$$

et supposons qu'un coefficient soit non nul. Soit j le plus grand indice tel que $a_j \neq 0$.

Le terme $a_j H_j$ est de degré j et son coefficient de degré j vaut $a_j 2^j \neq 0$, d'après II.3. Tous les autres termes de la somme sont de degré strictement inférieur à j .

Le coefficient de degré j de la somme ne peut donc pas être nul, ce qui contredit l'égalité au polynôme nul. Tous les coefficients a_k sont ainsi nuls.

La famille est libre et de cardinal $n + 1 = \dim F_n$, donc c'est une base. Cette méthode reste utilisable pour toute famille de polynômes de degrés $0, 1, \dots, n$, même sans produit scalaire ; la première utilise la structure orthogonale du problème.

3. a. Pour $n \geq 1$, on applique III.1.a successivement, en dérivant chaque fois le premier argument :

$$\|H_n\|^2 = (H_n | H_n) = (H'_n | H_{n-1}) = \dots = (H_n^{(n)} | H_0).$$

Les applications sont licites, car les dérivées successives de H_n sont des polynômes.

Pour $n = 0$, la dérivée d'ordre zéro est le polynôme lui-même, donc l'identité devient $\|H_0\|^2 = (H_0 | H_0)$ et reste vraie.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|H_n\|^2 = (H_n^{(n)} | H_0)$.

3. b. D'après II.3, H_n est de degré n et de coefficient dominant 2^n . Sa dérivée d'ordre n est donc le polynôme constant $H_n^{(n)} = 2^n n!$.

Or $H_0 = 1$ et le préliminaire, avec $m = 0$, donne :

$$(H_0 | H_0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 1.$$

Par III.3.a et bilinéarité :

$$\|H_n\|^2 = (2^n n! H_0 | H_0) = 2^n n!.$$

La norme étant positive, $\|H_n\| = \sqrt{2^n n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cela donne bien $\|H_0\| = 1$ lorsque $n = 0$.

Partie IV : Un endomorphisme symétrique

1. Pour tout polynôme P , les expressions P'' , XP' et P sont des polynômes réels. Ainsi, $f(P) = -P'' + 2XP' + P$ appartient à F .

Soient $P, Q \in F$ et $a, b \in \mathbb{R}$. Par linéarité de la dérivation et de la multiplication par le polynôme X :

$$f(aP + bQ) = -(aP'' + bQ'') + 2X(aP' + bQ') + aP + bQ = af(P) + bf(Q).$$

L'application f est donc linéaire de F dans F : c'est un endomorphisme de F .

2. a. On calcule les deux compositions sur un polynôme quelconque $P \in F$.

Pour la première :

$$(g \circ h)(P) = g(P') = 2XP' - P'' = f(P) - P.$$

Pour la seconde, on utilise la dérivation d'un produit :

$$(h \circ g)(P) = (2XP - P')' = 2P + 2XP' - P'' = f(P) + P.$$

Ces égalités étant vraies pour tout P , on conclut $g \circ h = f - \text{Id}_F$ et $h \circ g = f + \text{Id}_F$.

2. b. On utilise les deux écritures de f données par IV.2.a et l'associativité de la composition.

La première donne $f = g \circ h + \text{Id}_F$, donc :

$$f \circ g = g \circ h \circ g + g.$$

La seconde donne $f = h \circ g - \text{Id}_F$, donc :

$$g \circ f = g \circ h \circ g - g.$$

En soustrayant, on obtient $f \circ g - g \circ f = 2g$.

3. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P \in F$ tels que $f(P) = \lambda P$. En appliquant IV.2.b au polynôme P :

$$f(g(P)) = g(f(P)) + 2g(P).$$

Comme g est linéaire, $g(f(P)) = g(\lambda P) = \lambda g(P)$. Ainsi :

$$f(g(P)) = (\lambda + 2)g(P).$$

Cette identité vaut aussi si $P = 0$ ou $g(P) = 0$; elle n'exige aucune division. Pour interpréter un polynôme comme vecteur propre, il faut en plus vérifier qu'il est non nul, ce qui sera le cas des H_k dans la question suivante.

4. a. Comme $H_0 = 1$, on a $H'_0 = H''_0 = 0$. Par définition de f :

$$f(H_0) = -0 + 2X \times 0 + 1 = H_0.$$

Le polynôme non nul H_0 est donc un vecteur propre de f associé à la valeur propre 1.

4. b. La relation de II.2.a donne, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$g(H_k) = 2XH_k - H'_k = H_{k+1}.$$

On montre ensuite par récurrence que $f(H_k) = (2k + 1)H_k$.

Pour $k = 0$, cette identité a été établie en IV.4.a.

Supposons $f(H_k) = (2k + 1)H_k$. En appliquant IV.3 avec $P = H_k$ et $\lambda = 2k + 1$, on obtient :

$$f(H_{k+1}) = f(g(H_k)) = (2k + 3)g(H_k) = (2(k + 1) + 1)H_{k+1}.$$

La récurrence donne donc $f(H_k) = (2k + 1)H_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Chaque H_k étant non nul, c'est un vecteur propre de f associé à $2k + 1$.

5. Soient $P, Q \in F$. Pour des réels $A < B$, on effectue une intégration par parties sur $[A, B]$, avec $P'e^{-x^2}$ et Q :

$$\int_A^B P'(x)Q(x)e^{-x^2} \, dx = [P'(x)Q(x)e^{-x^2}]_A^B - \int_A^B (P''(x) - 2xP'(x))Q(x)e^{-x^2} \, dx.$$

Toutes les intégrales correspondantes sur $\mathbb{R}$ sont absolument convergentes par I.2 et I.4. De plus, $P'Q$ est un polynôme, donc le terme de bord tend vers 0 en chacune des deux bornes infinies.

En faisant tendre A vers $-\infty$ et B vers $+\infty$, puis en divisant par $\sqrt{\pi}$, on obtient :

$$(P' | Q') = (-P'' + 2XP' | Q).$$

Puisque $-P'' + 2XP' = f(P) - P$, la bilinéarité donne :

$$(P' | Q') = (f(P) | Q) - (P | Q).$$

6. a. Soit $P \in F_n$. Si $P = 0$, $f(P) = 0 \in F_n$. Si P est constant, $P' = P'' = 0$, donc $f(P) = P \in F_n$.

Dans les autres cas, $\deg P' \leq n - 1$, donc $\deg(XP') \leq n$. La dérivée seconde est soit nulle, soit de degré au plus $n - 2$, et appartient dans tous les cas à F_n .

Les trois termes $-P''$, $2XP'$ et P appartiennent à F_n , lequel est un espace vectoriel. Leur somme $f(P)$ appartient donc à F_n .

Ainsi, F_n est stable par f . La restriction f_n est linéaire et à valeurs dans F_n : elle est bien un endomorphisme de F_n , y compris pour $n = 0$.

6. b. Méthode 1 — Identité d'intégration par parties

Pour $P, Q \in F_n$, IV.5 donne :

$$(f_n(P) | Q) = (P' | Q') + (P | Q).$$

En échangeant P et Q dans IV.5, puis en utilisant la symétrie du produit scalaire :

$$(P | f_n(Q)) = (f_n(Q) | P) = (Q' | P') + (Q | P) = (P' | Q') + (P | Q).$$

Ainsi, $(f_n(P) | Q) = (P | f_n(Q))$ pour tout couple $P, Q \in F_n$. C'est la définition d'un endomorphisme symétrique de l'espace euclidien F_n .

Méthode 2 — Décomposition dans la base orthogonale d'Hermite

Par III.2, on peut écrire

$$P = \sum_{k=0}^n a_k H_k$$

et

$$Q = \sum_{k=0}^n b_k H_k,$$

avec des coefficients réels. La linéarité de f_n et IV.4.b donnent

$$f_n(P) = \sum_{k=0}^n (2k+1) a_k H_k.$$

L'orthogonalité établie en III.1.c réduit alors le produit scalaire à :

$$(f_n(P) \mid Q) = \sum_{k=0}^n (2k+1) a_k b_k \|H_k\|^2.$$

Le calcul de $(P \mid f_n(Q))$ donne exactement la même somme. L'endomorphisme est donc symétrique. La première méthode fait apparaître la symétrie par une identité sur les dérivées ; la seconde l'explique par l'existence d'une base orthogonale de vecteurs propres réels.

6. c. Pour $k \in \{0, \dots, n\}$, on définit $e_k = \frac{H_k}{\sqrt{2^k k!}}$. Le dénominateur est strictement positif.

Par III.1.c et III.3.b, $\|e_k\| = 1$ et $(e_j \mid e_k) = 0$ lorsque $j \neq k$. La famille $(e_0, \dots, e_n)$ est donc orthonormale.

Elle est aussi une base de F_n , puisqu'on a multiplié chacun des vecteurs de la base de III.2 par un scalaire non nul.

Enfin, par linéarité et IV.4.b, $f_n(e_k) = (2k + 1)e_k$. Une base orthonormale de vecteurs propres recherchée est donc :

$$\left(H_0, \frac{H_1}{\sqrt{2}}, \dots, \frac{H_n}{\sqrt{2^n n!}} \right).$$

Les valeurs propres associées sont respectivement $1, 3, \dots, 2n + 1$. Pour $n = 0$, la base se réduit à (H_0) .

Partie V : Intervention d'exponentielles

1. Fixons $a \in \mathbb{R}$. La fonction $\varphi_a : x \mapsto e^{ax}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Pour vérifier son appartenance à E , on complète le carré dans l'exposant :

$$(\varphi_a(x))^2 e^{-x^2} = e^{2ax-x^2} = e^{a^2} e^{-(x-a)^2}.$$

Le préliminaire avec $m = a$ montre que l'intégrale de ce terme sur $\mathbb{R}$ converge et vaut $e^{a^2} \sqrt{\pi}$.

Ainsi, $\varphi_a \in E$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Par V.1 et I.2, le produit scalaire existe. On pose $m = (a + b)/2$ et on complète le carré :

$$(a + b)x - x^2 = -\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2.$$

Par définition du produit scalaire, puis par le préliminaire :

$$(\varphi_a | \varphi_b) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-m)^2} dx = e^{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}.$$

En particulier, en prenant $b = a$, on obtient $\|\varphi_a\|^2 = e^{a^2} > 0$, et donc $\|\varphi_a\|^{-2} = e^{-a^2}$.

L'inverse utilisé dans les deux questions suivantes est ainsi bien défini.

3. Pour $n \geq 1$, $\ln n \geq 0$, donc $\sqrt{\ln n}$ est un réel bien défini. La formule issue de V.2 donne :

$$\|\varphi_{\sqrt{\ln n}}\|^{-2} = e^{-(\sqrt{\ln n})^2} = e^{-\ln n} = \frac{1}{n}.$$

La série proposée est exactement la série harmonique, série de Riemann d'exposant 1, qui diverge.

Pour rendre la divergence explicite, pour tout entier $N \geq 1$, la décroissance de $x \mapsto 1/x$ sur $[1, +\infty[$ entraîne :

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \geq \sum_{n=1}^N \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln(N+1).$$

Le minorant tend vers $+\infty$. La série

$$\sum_{n \geq 1} \|\varphi_{\sqrt{\ln n}}\|^{-2}$$

diverge donc vers $+\infty$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, V.2 donne $\|\varphi_{\sqrt{n}}\|^{-2} = e^{-n}$. La série est donc géométrique de raison $e^{-1} \in]0, 1[$, dont le premier terme, pour $n = 0$, vaut 1.

Elle converge, et sa somme est :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|\varphi_{\sqrt{n}}\|^{-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-1})^n = \frac{1}{1 - e^{-1}} = \frac{e}{e - 1}.$$

Partie VI : Une limite de probabilité conditionnelle

1. Le préliminaire avec $m = 0$ assure la convergence de l'intégrale de e^{-t^2} sur $\mathbb{R}$. En particulier, $\Phi(x)$ existe pour tout $x > 0$.

Par parité de l'intégrande, $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}/2$. La relation de Chasles donne :

$$\Phi(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue. Le théorème fondamental du calcul intégral s'applique à l'intégrale sur le segment et donne :

$$\forall x > 0, \quad \Phi'(x) = -e^{-x^2}.$$

Cette dérivée est continue, donc Φ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$. On n'a pas dérivé directement une intégrale impropre : on l'a réécrite à l'aide d'une intégrale sur un segment.

2. a. Par convergence de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$, son reste $\Phi(x)$ tend vers 0 lorsque $x \rightarrow +\infty$. Plus précisément, $\int_0^x e^{-t^2} dt \rightarrow \sqrt{\pi}/2$, et on utilise la formule de VI.1.

Par croissance comparée, $K(x) = e^{-x^2}/(2x) \rightarrow 0$. De même, $G(x) = e^{-x^2}/(2x) - e^{-x^2}/(4x^3) \rightarrow 0$.

$$\text{Ainsi, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} K(x) = 0.$$

2. b. Les fonctions considérées sont de classe C^1 sur $]0, +\infty[$. On calcule d'abord :

$$K'(x) = (-2x)e^{-x^2} \frac{1}{2x} + e^{-x^2} \left(-\frac{1}{2x^2} \right) = -e^{-x^2} - \frac{e^{-x^2}}{2x^2}.$$

Ainsi, avec VI.1 :

$$(\Phi - K)'(x) = -e^{-x^2} - K'(x) = \frac{e^{-x^2}}{2x^2} > 0.$$

Pour G , on utilise $G(x) = K(x) - e^{-x^2}/(4x^3)$. La dérivée du terme soustrait est :

$$\left(\frac{e^{-x^2}}{4x^3}\right)' = -\frac{e^{-x^2}}{2x^2} - \frac{3e^{-x^2}}{4x^4}.$$

On obtient donc :

$$G'(x) = K'(x) + \frac{e^{-x^2}}{2x^2} + \frac{3e^{-x^2}}{4x^4} = -e^{-x^2} + \frac{3e^{-x^2}}{4x^4}.$$

Par conséquent :

$$(G - \Phi)'(x) = G'(x) + e^{-x^2} = \frac{3e^{-x^2}}{4x^4} > 0.$$

Les fonctions $G - \Phi$ et $\Phi - K$ sont toutes deux strictement croissantes sur $]0, +\infty[$.

2. c. Les limites établies en VI.2.a donnent $G(x) - \Phi(x) \rightarrow 0$ et $\Phi(x) - K(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.

Fixons $x > 0$. Pour tout $y > x$, la croissance de $G - \Phi$ donne $G(x) - \Phi(x) \leq G(y) - \Phi(y)$.

En faisant tendre y vers $+\infty$, on obtient $G(x) - \Phi(x) \leq 0$.

De même, $\Phi(x) - K(x) \leq \Phi(y) - K(y)$, puis le passage à la limite donne

$$\Phi(x) - K(x) \leq 0.$$

Ainsi, pour tout $x > 0$, $G(x) \leq \Phi(x) \leq K(x)$. Cette conclusion vaut aussi pour les petits x pour lesquels $G(x)$ est négatif.

2. d. Pour $x > 0$, $K(x) > 0$. On peut donc diviser l'encadrement de VI.2.c par $K(x)$, sans changer les sens des inégalités :

$$\frac{G(x)}{K(x)} \leq \frac{\Phi(x)}{K(x)} \leq 1.$$

Or $G(x)/K(x) = 1 - 1/(2x^2)$, donc :

$$1 - \frac{1}{2x^2} \leq \frac{\Phi(x)}{K(x)} \leq 1.$$

Les deux bornes tendent vers 1. Par encadrement, $\Phi(x)/K(x) \rightarrow 1$, ce qui signifie :

$$\Phi(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-x^2}}{2x}.$$

3. a. La variable X a pour loi $\mathcal{N}(0, 1/2)$, où $1/2$ désigne la variance. Sa densité est

$$p_X(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2}.$$

Pour $x > 0$, la probabilité de la queue supérieure vaut :

$$P(X > x) = \int_x^{+\infty} p_X(t) dt = \frac{\Phi(x)}{\sqrt{\pi}}.$$

Par passage à l'événement complémentaire :

$$\forall x > 0, \quad P(X \leq x) = 1 - \frac{\Phi(x)}{\sqrt{\pi}}.$$

3. b. Fixons $c > 0$. Pour tout réel x , $P(X > x) > 0$, puisque la densité est strictement positive, notamment sur $[x + 1, x + 2]$. La probabilité conditionnelle est donc bien définie.

Comme $c > 0$, l'intersection de $\{X > x\}$ et $\{X \leq x + c\}$ est $\{x < X \leq x + c\}$. La définition de la probabilité conditionnelle donne :

$$P_{(X > x)}(X \leq x + c) = \frac{P(x < X \leq x + c)}{P(X > x)} = 1 - \frac{P(X > x + c)}{P(X > x)}.$$

Pour étudier la limite en $+\infty$, il suffit de considérer $x > 0$; alors $x + c > 0$ aussi. La formule de VI.3.a donne :

$$P_{(X > x)}(X \leq x + c) = 1 - \frac{\Phi(x + c)}{\Phi(x)}.$$

Méthode 1 — Utilisation de l'équivalent établi dans le problème

Posons $r(y) = \Phi(y)/K(y)$ pour $y > 0$. Par VI.2.d, $r(y) \rightarrow 1$ lorsque $y \rightarrow +\infty$. Puisque $x + c \rightarrow +\infty$, on a aussi $r(x + c) \rightarrow 1$.

Le quotient s'écrit exactement :

$$\frac{\Phi(x+c)}{\Phi(x)} = \frac{r(x+c)}{r(x)} \frac{K(x+c)}{K(x)} = \frac{r(x+c)}{r(x)} \frac{x}{x+c} e^{-(x+c)^2+x^2}.$$

Tous les dénominateurs sont strictement positifs. Le premier facteur tend vers 1 ; le deuxième tend vers 1 ; le dernier vaut e^{-2cx-c^2} et tend vers 0, car $c > 0$.

Ainsi, $\Phi(x+c)/\Phi(x) \rightarrow 0$, puis $P_{(X>x)}(X \leq x+c) \rightarrow 1$.

Méthode 2 — Majoration directe de l'intégrale de la queue

On peut également comparer les deux queues sans utiliser d'équivalent. Pour $x > 0$ et $B > x+c$, le changement de variable affine $t = s+c$ donne :

$$\int_{x+c}^B e^{-t^2} dt = \int_x^{B-c} e^{-(s+c)^2} ds.$$

Les intégrales impropres convergent ; on peut faire tendre B vers $+\infty$. Ainsi :

$$\Phi(x+c) = \int_x^{+\infty} e^{-s^2} e^{-2cs-c^2} ds.$$

Pour $s \geq x$, puisque $c > 0$, on a $e^{-2cs-c^2} \leq e^{-2cx-c^2}$. Par comparaison des intégrales positives :

$$0 \leq \Phi(x+c) \leq e^{-2cx-c^2} \Phi(x).$$

La fonction Φ est strictement positive : son intégrande est strictement positif, en particulier sur $[x, x+1]$. On peut donc diviser et obtenir :

$$0 \leq \frac{\Phi(x+c)}{\Phi(x)} \leq e^{-2cx-c^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

Par encadrement, le quotient tend vers 0 et la probabilité conditionnelle tend vers 1.

La première méthode réutilise l'étude asymptotique de la queue ; la seconde fournit directement une majoration exponentielle du quotient. Dans les deux cas, la conclusion est :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P_{(X > x)}(X \leq x + c) = 1.$$

Relevé des adaptations

Aucune question n'a nécessité d'adaptation mathématique : tous les énoncés et toutes les méthodes utilisées sont conformes au référentiel du prompt. Aucun résultat supplémentaire n'a été admis.