



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques 1

2007

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Premier problème

Partie I

Étude de l'application f

1. Méthode 1 — Limite usuelle du logarithme.

Sur $]0, +\infty[$, le quotient $\ln(1+x)/x$ est continu, car son numérateur et son dénominateur sont continus et le dénominateur est non nul. En 0, l'équivalent $\ln(1+x) \sim x$ donne :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 = f(0).$$

La fonction est donc continue sur $[0, +\infty[$.

Méthode 2 — Encadrement par une intégrale.

Pour $x > 0$, $\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt$. Sur $[0, x]$, $1/(1+x) \leq 1/(1+t) \leq 1$, donc :

$$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x, \quad \frac{1}{1+x} \leq f(x) \leq 1.$$

Les deux bornes tendent vers 1 lorsque $x \rightarrow 0^+$; l'encadrement prouve la continuité en 0. La première méthode utilise une limite du cours, la seconde donne aussi des bornes globales.

2.a. Sur $]0, +\infty[$, les fonctions du quotient sont de classe $\mathcal{C}^1$ et $x \neq 0$. La dérivation donne :

$$f'(x) = \frac{x/(1+x) - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{A(x)}{x^2}.$$

Cette expression est continue sur le demi-axe ouvert, donc f y est de classe $\mathcal{C}^1$.

2.b. Méthode 1 — Développements limités en 0.

Les développements usuels, sans composition de développements limités, sont :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2), \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

En multipliant le premier par x , on obtient $x/(1+x) = x - x^2 + o(x^2)$. Donc :

$$A(x) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad f'(x) = -\frac{1}{2} + o(1).$$

Ainsi $f'(x) \rightarrow -1/2$ à droite en 0.

Méthode 2 — Encadrement d'une intégrale positive.

On a $A(0) = 0$ et :

$$A'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} = -\frac{x}{(1+x)^2}.$$

Par le théorème fondamental, $A(x) = -\int_0^x t/(1+t)^2 dt$. Pour $0 \leq t \leq x$,

$1/(1+x)^2 \leq 1/(1+t)^2 \leq 1$. Après multiplication par t et intégration :

$$\frac{x^2}{2(1+x)^2} \leq \int_0^x \frac{t}{(1+t)^2} dt \leq \frac{x^2}{2}.$$

En changeant de signe et en divisant par $x^2 > 0$:

$$-\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq -\frac{1}{2(1+x)^2}.$$

Les deux bornes tendent vers $-1/2$. Cette seconde méthode donne une preuve par encadrement sans développement limité.

2.c. Méthode 1 — Prolongement de la dérivée.

La fonction f est continue sur $[0, +\infty[$ par 1., dérivable sur $]0, +\infty[$ par 2.a, et sa dérivée admet la limite finie $-1/2$ en 0^+ par 2.b. Le théorème du prolongement de la dérivée donne la dérivabilité à droite en 0 et $f'(0) = -1/2$. Puisque cette valeur est aussi la limite de f' à droite, la dérivée est continue en 0. Ainsi f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$, avec la convention de dérivation à droite à l'extrémité.

Méthode 2 — Quotient d'accroissement.

Le développement du logarithme donne, après division par $x > 0$,
 $f(x) = 1 - x/2 + o(x)$. Donc :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = -\frac{1}{2} + o(1).$$

Cela prouve directement $f'(0) = -1/2$. La limite de 2.b assure ensuite la continuité de la dérivée en 0. La première approche prolonge une dérivée déjà calculée ; la seconde revient à la définition.

2.d. Pour $x > 0$, $A'(x) = -x/(1+x)^2 < 0$. De plus $A(0) = 0$ et, puisque $x/(1+x) \rightarrow 1$ tandis que $\ln(1+x) \rightarrow +\infty$, $A(x) \rightarrow -\infty$.

x	0	$]0, +\infty[$	$+\infty$
Signe de A'	0	—	

x	0	$]0, +\infty[$	$+\infty$
Variation de A	0	$\searrow$	$-\infty$

Ainsi $A(x) < 0$ pour tout $x > 0$, et 2.a donne $f'(x) < 0$ sur $]0, +\infty[$. Pour $0 \leq a < b$, f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. L'égalité des accroissements finis donne $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) < 0$ pour un $c \in]a, b[$. Cela inclut $a = 0$. La fonction est donc strictement décroissante sur tout $]0, +\infty[$.

2.e. Posons $t = 1 + x$. Lorsque $x \rightarrow +\infty$, $t \rightarrow +\infty$ et :

$$f(x) = \frac{\ln t}{t} \frac{t}{t-1}.$$

Par croissance comparée, $\ln t/t \rightarrow 0$, et $t/(t-1) \rightarrow 1$. Donc $f(x) \rightarrow 0$ en $+\infty$.

3.a. La fonction A est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, donc $A(x)/x^2$ y est dérivable. Avec la valeur de A' obtenue en 2.b :

$$f''(x) = \frac{x A'(x) - 2A(x)}{x^3}.$$

Le numérateur se réécrit :

$$x A'(x) - 2A(x) = -\frac{x^2}{(1+x)^2} - \frac{2x}{1+x} + 2 \ln(1+x) = -\frac{3x^2 + 2x}{(1+x)^2} + 2 \ln(1+x) = B(x).$$

Ainsi $f''(x) = B(x)/x^3$ pour $x > 0$, et f est bien deux fois dérivable sur ce domaine.

3.b. La dérivée du terme rationnel se calcule explicitement :

$$\left(\frac{3x^2 + 2x}{(1+x)^2} \right)' = \frac{(6x+2)(1+x) - 2(3x^2+2x)}{(1+x)^3} = \frac{4x+2}{(1+x)^3}.$$

Donc :

$$B'(x) = -\frac{4x+2}{(1+x)^3} + \frac{2}{1+x} = \frac{2x^2}{(1+x)^3}.$$

On a $B(0) = 0$, $B'(x) > 0$ pour $x > 0$, et $B(x) \rightarrow +\infty$, puisque son terme rationnel tend vers -3 et son logarithme vers $+\infty$.

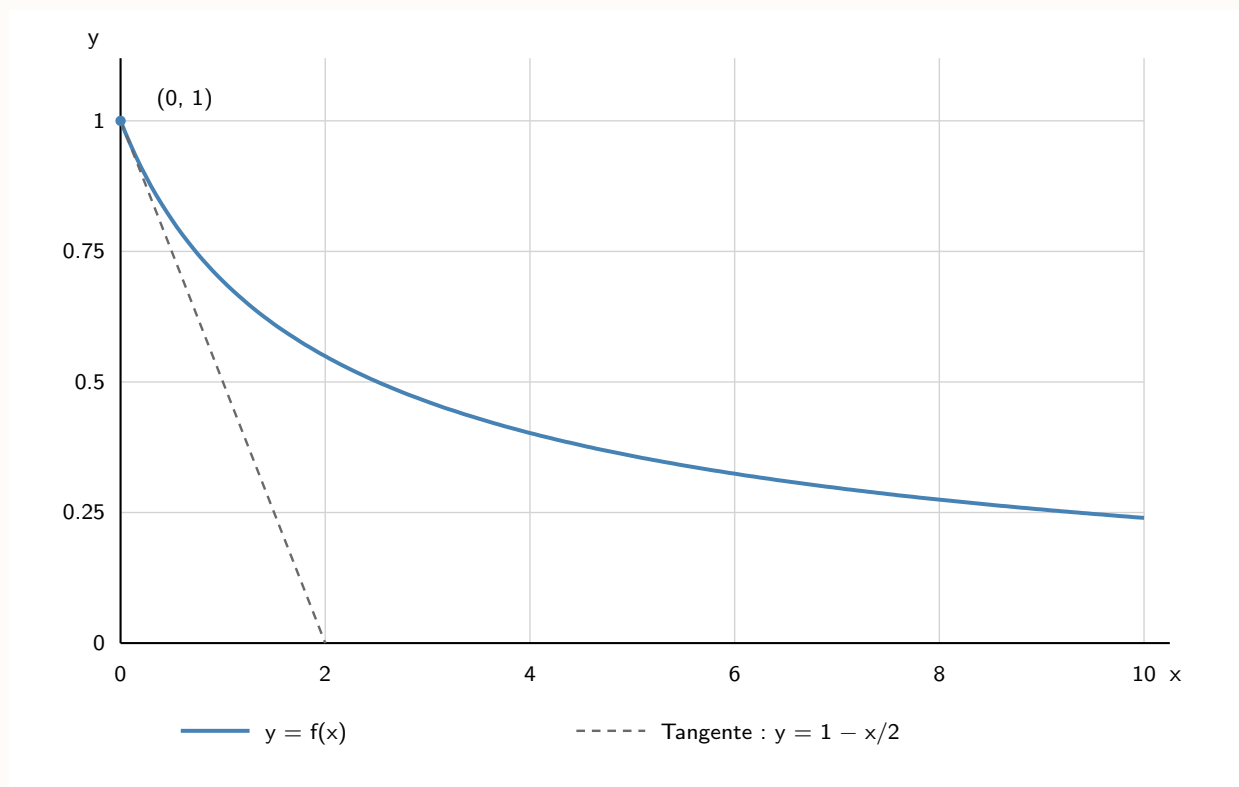
x	0	$]0, +\infty[$	$+\infty$
Signe de B'	0	+	
Variation de B	0	$\nearrow$	$+\infty$

Ainsi $B(x) > 0$ sur $]0, +\infty[$, puis $f''(x) > 0$. La caractérisation de la convexité par le signe de la dérivée seconde donne la convexité de f , et même sa stricte convexité, sur cet intervalle.

4. La courbe passe par $(0, 1)$, est strictement décroissante et reste au-dessus de l'axe horizontal puisque $\ln(1+x) > 0$ pour $x > 0$. Elle est convexe et possède l'asymptote horizontale $y = 0$ en $+\infty$. Sa tangente à droite en 0 a pour équation $y = 1 - x/2$.

Pour préciser la position par rapport à cette tangente, la croissance de f' donne $f'(t) \geq f'(0) = -1/2$ pour $t \geq 0$. En intégrant sur $[0, x]$, $f(x) - 1 \geq -x/2$. La courbe est donc au-dessus de sa tangente.

Le tracé ci-dessous utilise la formule exacte de f sur $[0, 10]$; les segments qui représentent la courbe relient 201 points calculés. La droite en pointillés est la tangente en 0.



Partie II

Un développement en série

1. La somme géométrique finie de raison $-t$ est valable puisque $1 + t \neq 0$ pour $t \in [0, 1]$:

$$\sum_{k=0}^N (-1)^k t^k = \frac{1 - (-t)^{N+1}}{1 + t}.$$

En ajoutant $(-1)^{N+1}t^{N+1}/(1 + t)$, on obtient $1/(1 + t)$. L'identité est vraie pour tout $N \geq 0$, y compris $t = 0$ et $t = 1$.

2. Fixons $N \geq 0$ et $x \in [0, 1]$. Les fonctions de II.1 sont continues sur $[0, x]$. On intègre cette identité finie :

$$\int_0^x \frac{dt}{1 + t} = \sum_{k=0}^N (-1)^k \int_0^x t^k dt + \int_0^x \frac{(-1)^{N+1} t^{N+1}}{1 + t} dt.$$

Le membre gauche est $\ln(1+x)$, et $\int_0^x t^k dt = x^{k+1}/(k+1)$. On obtient donc la formule avec le reste $J_N(x)$ défini dans l'énoncé. Aucune somme infinie n'a été intégrée.

3. L'inégalité triangulaire pour l'intégrale et $1+t \geq 1$ donnent :

$$|J_N(x)| \leq \int_0^x \frac{t^{N+1}}{1+t} dt \leq \int_0^x t^{N+1} dt = \frac{x^{N+2}}{N+2}.$$

Cette majoration inclut $x = 0$, où les deux membres sont nuls.

4. Fixons $x \in [0, 1]$. D'après II.3, $|J_N(x)| \leq 1/(N+2) \rightarrow 0$. L'identité de II.2 donne donc :

$$\sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} \rightarrow \ln(1+x).$$

Avec le changement d'indice $n = k+1$, ce sont les sommes partielles de la série demandée. Elle converge et sa somme vaut $\ln(1+x)$. La démonstration couvre aussi $x = 1$, sans utiliser un critère de séries alternées, et $x = 0$, où tous les termes sont nuls.

Partie III

Égalité d'une intégrale et d'une somme de série

1. Pour $x > 0$, l'identité de II.2 divisée par x donne :

$$f(x) - \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k x^k}{k+1} = \frac{J_N(x)}{x}.$$

La majoration de II.3 fournit $|J_N(x)/x| \leq x^{N+1}/(N+2)$. Pour $x = 0$, le polynôme de la somme vaut 1 : son terme constant est 1 et les autres termes sont nuls. Comme $f(0) = 1$, l'écart et le majorant sont tous deux nuls. L'inégalité est donc vraie pour tout $x \in [0, 1]$.

2. La série est absolument convergente car la série de Riemann

$$\sum_{n \geq 1} 1/n^2$$

converge. L'intégrale de f sur $[0, 1]$ existe puisque f est continue. Pour $N \geq 0$, intégrons l'estimation de III.1 :

$$\left| \int_0^1 f(x) dx - \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k}{(k+1)^2} \right| \leq \frac{1}{N+2} \int_0^1 x^{N+1} dx = \frac{1}{(N+2)^2}.$$

Le membre droit tend vers 0. Les sommes partielles de la série convergent donc vers l'intégrale, ce qui prouve :

$$\int_0^1 f(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$$

Le passage à la limite est justifié par une majoration explicite du reste intégré, sans théorème d'intégration terme à terme d'une série infinie.

3. Dans l'ensemble $\{1, \dots, 2N+1\}$, les entiers impairs sont $2p+1$ pour $0 \leq p \leq N$, et les entiers pairs sont $2p$ pour $1 \leq p \leq N$. En séparant ces deux groupes dans une somme finie :

$$\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=0}^N \frac{1}{(2p+1)^2} + \sum_{p=1}^N \frac{1}{4p^2}.$$

Le coefficient $(-1)^{n-1}$ vaut $+1$ pour les impairs et -1 pour les pairs. Cela donne la seconde identité :

$$\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_{p=0}^N \frac{1}{(2p+1)^2} - \sum_{p=1}^N \frac{1}{4p^2}.$$

4. Résultat admis dans cette version adaptée :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^2 = \pi^2/6,$$

comme dans l'énoncé original. Il sert à calculer la somme alternée obtenue en III.2.

Les deux identités finies de III.3 donnent, en soustrayant deux fois la somme des termes pairs à la première :

$$\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2} \sum_{p=1}^N \frac{1}{p^2}.$$

Toutes les séries concernées convergent. En faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient $\pi^2/6 - \pi^2/12 = \pi^2/12$. D'après III.2, l'intégrale vaut donc :

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{\pi^2}{12}.$$

Partie IV

Recherche d'extremum pour une fonction réelle de deux variables réelles

1. Le domaine $U =]0, +\infty[^2$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. La continuité de f permet d'appliquer le théorème fondamental : $F' = f$ sur $]0, +\infty[$. Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$, F est de classe $\mathcal{C}^2$. Pour $x, y > 0$, le produit xy reste dans le domaine de F ; les règles de composition et de dérivation donnent donc $G \in \mathcal{C}^2(U)$.

Les dérivées premières sont :

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x, y) = yf(xy) - f(x), \quad \frac{\partial G}{\partial y}(x, y) = xf(xy) - f(y).$$

Les dérivées secondes sont :

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x, y) = y^2 f'(xy) - f'(x), \quad \frac{\partial^2 G}{\partial y^2}(x, y) = x^2 f'(xy) - f'(y),$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 G}{\partial y \partial x}(x, y) = f(xy) + xy f'(xy).$$

La hessienne est la matrice symétrique formée par ces quatre coefficients.

2. Avec la formule de f , valable puisque $x, y, xy > 0$, on simplifie le gradient :

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x, y) = \frac{\ln(1+xy) - \ln(1+x)}{x}, \quad \frac{\partial G}{\partial y}(x, y) = \frac{\ln(1+xy) - \ln(1+y)}{y}.$$

Les dénominateurs sont non nuls. L'injectivité du logarithme donne :

$$\nabla G(x, y) = 0 \iff xy = x \text{ et } xy = y.$$

Comme $x, y > 0$, la première égalité impose $y = 1$ et la seconde impose $x = 1$. Réciproquement, le gradient s'annule en $(1, 1)$. C'est donc l'unique point critique.

3. Méthode 1 — Valeurs propres de la hessienne.

La fonction est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert U , comme établi en IV.1. Tout extremum local dans cet ouvert doit être un point critique ; il suffit donc d'étudier $(1, 1)$.

On a $f(1) = \ln 2$ et $f'(1) = A(1) = 1/2 - \ln 2$. Les formules de IV.1 donnent :

$$H_G(1, 1) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur $(1, 1)$ est propre pour $1/2$, et $(1, -1)$ est propre pour $-1/2$. Ces deux vecteurs sont indépendants et constituent une base de $\mathbb{R}^2$; ce sont donc les deux valeurs propres. Elles sont de signes opposés. Le point $(1, 1)$ est un point selle et n'est pas un extremum local. Puisqu'il n'existe aucun autre point critique, G n'admet aucun extremum local sur U .

Méthode 2 — Restrictions à deux droites.

Pour $|t| < 1$, considérons $g_+(t) = G(1+t, 1+t)$ et $g_-(t) = G(1+t, 1-t)$. Les deux droites restent dans U près de 0, et les fonctions restreintes sont de classe $\mathcal{C}^2$. Le gradient nul donne $g'_+(0) = g'_-(0) = 0$. La dérivation le long d'une droite et la hessienne ci-dessus donnent :

$$g''_+(0) = (1, 1)H_G(1, 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1, \quad g''_-(0) = (1, -1)H_G(1, 1) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -1.$$

Par Taylor-Young en une variable :

$$g_+(t) - G(1, 1) = \frac{t^2}{2} + o(t^2), \quad g_-(t) - G(1, 1) = -\frac{t^2}{2} + o(t^2).$$

Pour $t \neq 0$ suffisamment petit, les deux différences ont des signes opposés. Tout voisinage de $(1, 1)$ contient donc des valeurs de G strictement supérieures et strictement inférieures à $G(1, 1)$. Il n'y a aucun extremum en ce point, ni ailleurs par IV.2.

La première méthode applique le critère spectral ; la seconde rend explicites les deux directions qui empêchent un extremum.

Deuxième problème

Partie I

Étude d'un endomorphisme de E

1. Pour $P \in E$ non nul, le produit $(X^2 - 1)P$ est de degré au plus $n + 2$. Sa dérivée seconde est donc de degré au plus n , ou est nulle. Elle appartient à E . Si $P = 0$, cette dérivée seconde est nulle et appartient aussi à E . L'application ϕ est donc bien définie de E dans E .

2. On dérive deux fois :

$$\phi(1) = (X^2 - 1)'' = 2, \quad \phi(X) = (X^3 - X)'' = 6X.$$

Ce sont les deux identités demandées.

3. Pour $P, Q \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la multiplication par le polynôme fixé $X^2 - 1$ et la dérivation seconde sont linéaires. Ainsi :

$$\phi(\alpha P + \beta Q) = \alpha \phi(P) + \beta \phi(Q).$$

L'application est linéaire et prend ses valeurs dans E par I.1. C'est un endomorphisme de E .

4. Pour $k \geq 2$, on calcule :

$$\phi(X^k) = (X^{k+2} - X^k)'' = (k+1)(k+2)X^k - k(k-1)X^{k-2}.$$

Pour les deux premiers indices, on utilise les formules de I.2 : $\phi(1) = 2$ et $\phi(X) = 6X$. On n'écrit pas une puissance négative multipliée par zéro.

En numérotant les lignes et les colonnes de 0 à n , la matrice A est exactement définie par :

$$A_{k,k} = (k+1)(k+2) \quad (0 \leq k \leq n),$$

$$A_{k-2,k} = -k(k-1) \quad (2 \leq k \leq n),$$

et ses autres coefficients sont nuls. Cette écriture donne la matrice pour toute dimension. Elle est triangulaire supérieure. Par exemple, pour $n = 3$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}.$$

Pour $n = 2$, on conserve les trois premières lignes et colonnes de cet exemple.

5.a. Les valeurs propres d'une matrice triangulaire réelle sont les coefficients de sa diagonale. On obtient donc :

$$\lambda_k = (k+1)(k+2), \quad 0 \leq k \leq n.$$

Pour $0 \leq k < n$, $\lambda_{k+1} - \lambda_k = 2(k+2) > 0$. Ces $n+1$ valeurs propres sont donc deux à deux distinctes et ordonnées comme demandé.

5.b. La matrice A est triangulaire et tous ses coefficients diagonaux sont strictement positifs. Le critère d'inversibilité d'une matrice triangulaire donne son inversibilité.

L'endomorphisme ϕ est donc bijectif.

On peut également vérifier l'injectivité directement : si $P \neq 0$ a pour terme dominant cX^d , avec $c \neq 0$, alors $\phi(P)$ a pour terme dominant $c(d+1)(d+2)X^d$, non nul. Ainsi le noyau est réduit à 0, ce qui suffit pour la bijectivité en dimension finie.

5.c. La dimension de E est $n+1$, et ϕ possède $n+1$ valeurs propres distinctes. Le critère de diagonalisation s'applique : ϕ est diagonalisable.

Chaque sous-espace propre a une dimension au moins égale à 1. La somme directe de tous ces sous-espaces est E et leurs dimensions totalisent $n+1$. Comme ils sont au nombre de $n+1$, chacun a exactement la dimension 1.

6.a. Un vecteur propre est non nul. Écrivons son terme dominant cX^d , avec $c \neq 0$ et $0 \leq d \leq n$. D'après le calcul de I.4, le terme dominant de $\phi(P)$ est $c(d+1)(d+2)X^d$. Le terme dominant de $\lambda_k P$ est $c\lambda_k X^d$. L'égalité $\phi(P) = \lambda_k P$ donne :

$$(d+1)(d+2) = (k+1)(k+2).$$

La stricte croissance des valeurs λ_d établie en I.5.a impose $d = k$. Donc $\deg P = k$.

6.b. Posons $R(X) = (X^2 - 1)P(X)$. Pour $Q(X) = P(-X)$, le polynôme $(X^2 - 1)Q(X)$ est $R(-X)$, car $(-X)^2 = X^2$. Deux dérivations donnent :

$$\phi(Q)(X) = R''(-X) = \phi(P)(-X) = \lambda_k P(-X) = \lambda_k Q(X).$$

Le polynôme Q est non nul puisqu'il a le même degré que P . Il est donc un vecteur propre associé à λ_k .

7. Pour chaque k , le sous-espace propre de λ_k est de dimension 1, et tout vecteur propre non nul y a le degré k . On choisit un tel vecteur et on le divise par son coefficient dominant, non nul. On obtient un polynôme propre P_k de degré k et de coefficient dominant 1.

Ce polynôme est unique : deux polynômes propres de cet espace sont proportionnels, et s'ils sont tous deux de coefficient dominant 1, le coefficient de proportionnalité vaut 1.

Par I.6.b, $P_k(-X)$ appartient au même sous-espace propre. Il est donc proportionnel à P_k . Son coefficient dominant est $(-1)^k$, ce qui donne nécessairement :

$$P_k(-X) = (-1)^k P_k(X).$$

Les vecteurs $P_0, \dots, P_n$ sont associés à des valeurs propres distinctes, donc forment une famille libre. Ils sont $n + 1$ dans un espace de dimension $n + 1$: ils constituent une base. La normalisation précédente assure l'unicité de cette base ordonnée.

Si k est pair, P_k est pair ; si k est impair, P_k est impair.

8. Question adaptée au programme actuel. Rectification locale de l'énoncé : le calcul de P_3 est demandé seulement si $n \geq 3$. Pour $n = 2$, la base de E ne contient pas de polynôme P_3 .

Le polynôme monique de degré 0 est $P_0 = 1$, et $\phi(1) = 2 = \lambda_0 P_0$. Un polynôme monique impair de degré 1 est nécessairement $P_1 = X$, et $\phi(X) = 6X = \lambda_1 P_1$.

Le polynôme P_2 est pair et monique, donc de la forme $X^2 + c$. Comme $\lambda_2 = 12$:

$$\phi(X^2 + c) = 12X^2 - 2 + 2c = 12(X^2 + c) \iff -2 + 2c = 12c.$$

On obtient $c = -1/5$, donc $P_2 = X^2 - 1/5$.

Si $n \geq 3$, P_3 est impair et monique, donc de la forme $X^3 + dX$. Comme $\lambda_3 = 20$:

$$\phi(X^3 + dX) = 20X^3 - 6X + 6dX = 20(X^3 + dX) \iff -6 + 6d = 20d.$$

On obtient $d = -3/7$, donc $P_3 = X^3 - 3X/7$.

Les polynômes demandés sont donc $P_0 = 1$, $P_1 = X$, $P_2 = X^2 - 1/5$, et, lorsque $n \geq 3$, $P_3 = X^3 - 3X/7$.

Partie II

Un produit scalaire sur E

1. Les fonctions intégrées sont continues sur le segment $[-1, 1]$, donc les intégrales sont bien définies. La symétrie de l'application suit de $PQ = QP$. La bilinéarité suit de la linéarité de l'intégrale et du produit par chaque argument. Enfin :

$$(P | P) = \int_{-1}^1 (1 - x^2) P(x)^2 dx \geq 0,$$

puisque $1 - x^2 \geq 0$ sur ce segment.

Vérifions le caractère défini positif. Si l'intégrale est nulle, la fonction continue positive ou nulle $(1 - x^2)P(x)^2$ est nulle partout sur le segment : sinon une valeur strictement positive, par continuité, donnerait une intégrale strictement positive sur un petit intervalle. Pour $x \in]-1, 1[$, le poids $1 - x^2$ est strictement positif, donc $P(x) = 0$. Un polynôme qui s'annule sur un intervalle possède une infinité de racines ; il est donc nul. Réciproquement, le polynôme nul a une norme nulle.

L'application est ainsi un produit scalaire sur E .

2.a. Pour $P, Q \in E$, posons $U(x) = (x^2 - 1)P(x)$ et $V(x) = (x^2 - 1)Q(x)$. On a $\phi(P) = U''$ et $\phi(Q) = V''$. Les fonctions sont polynomiales, donc toutes les intégrations par parties sur $[-1, 1]$ sont légitimes. De plus, $U(-1) = U(1) = V(-1) = V(1) = 0$.

Une première intégration par parties donne :

$$(\phi(P) | Q) = - \int_{-1}^1 U''(x)V(x) dx = -[U'V]_{-1}^1 + \int_{-1}^1 U'(x)V'(x) dx = \int_{-1}^1 U'V'.$$

Une seconde donne :

$$\int_{-1}^1 U'V' = [UV']_{-1}^1 - \int_{-1}^1 UV'' = - \int_{-1}^1 (x^2 - 1)P(x)\phi(Q)(x) dx = (P | \phi(Q)).$$

Les deux termes de bord sont nuls grâce aux facteurs $x^2 - 1$. Ainsi

$(\phi(P) | Q) = (P | \phi(Q))$ pour tous $P, Q \in E$. Comme ϕ est déjà un endomorphisme, cela établit qu'il est symétrique pour ce produit scalaire.

2.b. Méthode 1 — Orthogonalité des espaces propres.

L'espace E est un espace euclidien de dimension finie pour le produit scalaire établi en II.1. L'endomorphisme ϕ est symétrique par II.2.a. Le résultat du cours sur l'orthogonalité des espaces propres associés à des valeurs propres distinctes s'applique. Comme P_k et P_ℓ sont associés à $\lambda_k \neq \lambda_\ell$ lorsque $k \neq \ell$, ils sont orthogonaux. La base est donc orthogonale.

Méthode 2 — Identité scalaire directe.

Pour $k \neq \ell$, la symétrie donne :

$$\lambda_k(P_k | P_\ell) = (\phi(P_k) | P_\ell) = (P_k | \phi(P_\ell)) = \lambda_\ell(P_k | P_\ell).$$

Comme $\lambda_k - \lambda_\ell \neq 0$, cette égalité implique $(P_k | P_\ell) = 0$. Cela prouve directement le résultat sans invoquer le théorème général. La première approche identifie le cadre euclidien ; la seconde expose le mécanisme algébrique de l'orthogonalité.

3.a. Les polynômes $P_0, \dots, P_{j-1}$ ont des degrés distincts $0, \dots, j-1$ et sont moniques. Ils sont donc libres : dans une relation non triviale, le terme de plus haut degré ne peut pas s'annuler. Ils sont j dans l'espace $\mathbb{R}_{j-1}[X]$, de dimension j , et en forment une base.

Tout polynôme S de degré au plus $j - 1$, y compris le polynôme nul, s'écrit donc

$$S = \sum_{k=0}^{j-1} c_k P_k.$$

Par bilinéarité et II.2.b :

$$(S | P_j) = \sum_{k=0}^{j-1} c_k (P_k | P_j) = 0.$$

C'est l'orthogonalité demandée.

3.b. Comme $j \geq 1$, le polynôme constant 1 a un degré au plus $j - 1$, donc II.3.a donne $(1 | P_j) = 0$.

Supposons que $P_j \geq 0$ sur $] -1, 1[$. Puisque P_j est non nul et possède seulement un nombre fini de racines, il existe $a \in] -1, 1[$ tel que $P_j(a) > 0$. La continuité et le signe strictement positif du poids donnent un petit segment intérieur sur lequel $(1 - x^2)P_j(x)$ est strictement positif. Ailleurs, l'intégrande est positif ou nul. Par conséquent, $(1 | P_j) > 0$, contradiction.

Si $P_j \leq 0$ sur $] -1, 1[$, le même argument appliqué à $-P_j$ donne $(1 | P_j) < 0$, autre contradiction. Ainsi P_j prend des valeurs strictement positives et strictement négatives dans l'intervalle et ne garde pas un signe constant.

3.c. Un polynôme non nul possède un nombre fini de racines. Au voisinage d'une racine réelle a de multiplicité r , il s'écrit $P_j(X) = (X - a)^r R(X)$ avec $R(a) \neq 0$. Par continuité, R garde le signe de $R(a)$ près de a . Le facteur $(X - a)^r$ change de signe en traversant a si et seulement si r est impair. Le polynôme change donc de signe à cette racine exactement dans ce cas.

D'après II.3.b, il existe deux points intérieurs où P_j a des signes opposés. Entre ces points, la continuité assure l'existence de racines. Sur chaque intervalle entre deux racines consécutives, le polynôme est non nul et garde un signe constant par le théorème des valeurs intermédiaires. Pour passer du signe initial au signe opposé, au moins l'une

des racines rencontrées doit entraîner un changement de signe. Sa multiplicité est alors impaire par la factorisation précédente. Cette racine appartient à $] - 1, 1[$.

4.a. Les $x_1, \dots, x_m$ sont des racines distinctes de P_j , qui est non nul et de degré j par I.6.a. Un polynôme non nul de degré j possède au plus j racines distinctes. Donc $m \leq j$. La question II.3.c donne aussi $m \geq 1$.

4.b. Le produit $T = S_m P_j$ est un polynôme non nul. À chaque racine x_i , la multiplicité de P_j est impaire et celle de S_m vaut 1 : la multiplicité dans T est donc paire. Les autres racines de P_j dans $] - 1, 1[$ ont déjà une multiplicité paire, par la définition de l'ensemble $\{x_1, \dots, x_m\}$. Il n'y a pas d'autre racine de S_m .

Ainsi toutes les racines de T dans cet intervalle sont de multiplicité paire. La factorisation locale expliquée en II.3.c montre qu'aucune ne produit de changement de signe. Entre deux racines, la continuité et l'absence de zéro donnent un signe constant. En traversant les racines successives, ce signe reste inchangé. Donc $S_m P_j$ garde un signe constant sur $] - 1, 1[$, avec éventuellement des zéros.

4.c. Supposons par l'absurde que $m < j$. Alors $\deg S_m = m \leq j - 1$, et II.3.a impose $(S_m \mid P_j) = 0$.

Mais ce produit scalaire est :

$$(S_m \mid P_j) = \int_{-1}^1 (1 - x^2) S_m(x) P_j(x) dx.$$

Le polynôme $S_m P_j$ est non nul et garde un signe constant à l'intérieur par II.4.b. Il existe un point intérieur où il est non nul, puis un petit segment où il a un signe strict et où le poids est strictement positif. L'intégrande garde ce même signe partout ailleurs dans l'intervalle ; son intégrale est donc strictement positive ou strictement négative. Elle ne peut pas être nulle, contradiction.

Ainsi $m \geq j$. Avec $m \leq j$ établi en II.4.a, on conclut $m = j$.

4.d. Il existe donc j racines distinctes $x_1, \dots, x_j$ dans $] - 1, 1[$, alors que P_j a le degré j . Chacune a une multiplicité au moins égale à 1 ; la somme de ces multiplicités ne peut pas dépasser le degré. Comme il y a déjà j racines, toutes les multiplicités sont exactement 1.

Plus explicitement, le polynôme monique

$$\prod_{i=1}^j (X - x_i)$$

divise P_j , et les deux polynômes ont le même degré et le même coefficient dominant. Ils sont donc égaux :

$$P_j(X) = \prod_{i=1}^j (X - x_i).$$

Ainsi P_j possède exactement j racines, toutes réelles, simples et situées dans $] -1, 1[$.

Relevé des adaptations

- Deuxième problème, I.8. La demande de calcul de P_3 est restreinte au cas $n \geq 3$. L'énoncé fixe seulement $n \geq 2$; lorsque $n = 2$, P_3 n'appartient pas à la base $(P_0, \dots, P_n)$ de E . Les calculs de P_0 , P_1 et P_2 sont conservés sans restriction supplémentaire.