



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques 1

2005

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Premier problème

On considère la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par :

$$T_0 = 1, \quad T_1 = 2X, \quad \forall n \geq 2, \quad T_n = 2XT_{n-1} - T_{n-2}.$$

On pourra confondre polynôme et fonction polynomiale. Ainsi, pour tout entier $n \geq 2$ et tout réel x ,

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x).$$

PARTIE I : Étude de la suite de polynômes $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$

1. Calculer T_2 et T_3 .
2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n , T_n est un polynôme de degré n , dont on déterminera le coefficient du terme de degré n .
2. b. Établir que, si n est un entier pair (resp. impair), alors T_n est un polynôme pair (resp. impair).
3. Calculer, pour tout entier naturel n , $T_n(1)$ en fonction de n .
4. a. Établir, pour tout entier naturel n et tout réel $\theta \in]0; \pi[$:

$$T_n(\cos \theta) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin \theta}.$$

4. b. En déduire que, pour tout entier naturel non nul n , T_n admet n racines réelles, toutes situées dans $] -1; 1[$, que l'on explicitera.

4. c. Établir, pour tout entier naturel non nul n :

$$T_n = 2^n \prod_{k=1}^n \left(X - \cos \frac{k\pi}{n+1} \right).$$

4. d. En déduire, pour tout entier naturel non nul n , la valeur de

$$\prod_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{2(n+1)}$$

en fonction de n .

5. a. Démontrer, pour tout entier naturel n et tout réel $\theta \in]0; \pi[$:

$$\sin^2 \theta T_n''(\cos \theta) - 3 \cos \theta T_n'(\cos \theta) + (n^2 + 2n)T_n(\cos \theta) = 0.$$

Indication : on pourra dériver deux fois la fonction nulle

$$\theta \mapsto \sin \theta T_n(\cos \theta) - \sin((n+1)\theta).$$

5. b. En déduire, pour tout entier naturel n :

$$(X^2 - 1)T_n'' + 3XT_n' - (n^2 + 2n)T_n = 0.$$

Dans la suite du problème, n désigne un entier naturel fixé tel que $n \geq 2$, et on note E l'espace vectoriel réel des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à n .

On note L l'application qui, à un polynôme P de E , associe le polynôme $L(P)$ défini par :

$$L(P) = (X^2 - 1)P'' + 3XP'.$$

PARTIE II : Étude de l'endomorphisme L

1. Montrer que L est un endomorphisme de l'espace vectoriel E .
2. a. Calculer $L(T_k)$ pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$.
b. En déduire les valeurs propres de L et, pour chaque valeur propre de L , une base et la dimension du sous-espace propre associé.

PARTIE III : Étude d'un produit scalaire

Dans la suite du problème, on note φ l'application qui, à un couple (P, Q) de polynômes de E , associe le réel $\varphi(P, Q)$ défini par :

$$\varphi(P, Q) = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} P(x)Q(x) \, dx.$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E .
2. Démontrer, pour tous polynômes P, Q de E :

$$\varphi(L(P), Q) = \varphi(P, L(Q)).$$

Indication : on pourra, à l'aide d'une intégration par parties, montrer :

$$\varphi(L(P), Q) = \int_{-1}^1 (1-x^2)^{3/2} P'(x)Q'(x) \, dx.$$

3. Établir que $(T_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base orthogonale de E .

Deuxième problème

PARTIE I : Calcul de la somme d'une série convergente

1. Vérifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(nt) \, dt = \frac{1}{n^2}.$$

2. Établir, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in]0; \pi]$:

$$2 \sin \frac{t}{2} \sum_{n=1}^m \cos(nt) = \sin \left(\frac{(2m+1)t}{2} \right) - \sin \frac{t}{2},$$

puis

$$\sum_{n=1}^m \cos(nt) = \frac{\cos \left(\frac{(m+1)t}{2} \right) \sin \left(\frac{mt}{2} \right)}{\sin \left(\frac{t}{2} \right)}.$$

On utilisera les formules d'addition du sinus et du cosinus.

3. Soit $u : [0; \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^1 .

Montrer, à l'aide d'une intégration par parties :

$$\int_0^\pi u(t) \sin(\lambda t) \, dt \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0.$$

4. Soit l'application $f : [0; \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = \frac{\frac{t^2}{2\pi} - t}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} \quad \text{si } t \in]0; \pi], \quad f(0) = -1.$$

Montrer que f est de classe C^1 sur $[0; \pi]$.

5. a. Montrer :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{n=1}^m \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^\pi f(t) \sin\left(\frac{(2m+1)t}{2}\right) dt.$$

5. b. Justifier la convergence de la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$$

et montrer :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

PARTIE II : Étude d'une fonction définie par la somme d'une série convergente

1. a. Montrer que, pour tout couple $(x, y) \in ([0; +\infty[)^2$, la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n+x)(n+y)}$$

et la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n+x)^2(n+y)}$$

convergent.

1. b. Montrer que, pour tout $x \in [0; +\infty[$, la série

$$\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right)$$

converge.

On note S l'application définie, pour tout $x \in [0; +\infty[$, par :

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right).$$

2. Calculer $S(0)$ et $S(1)$.

3. a. Établir :

$$\forall (x, y) \in ([0; +\infty[)^2, \quad S(y) - S(x) = (y - x) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)(n+y)}.$$

3. b. En déduire :

$$\forall (x, y) \in ([0; +\infty[)^2, \quad |S(y) - S(x)| \leq \frac{\pi^2}{6} |y - x|.$$

3. c. Montrer alors que la fonction S est continue sur $[0; +\infty[$.

4. a. Montrer, pour tout couple $(x, y) \in ([0; +\infty[)^2$ tel que $x \neq y$:

$$\left| \frac{S(y) - S(x)}{y - x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} \right| \leq |y - x| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}.$$

4. b. En déduire que la fonction S est dérivable sur $[0; +\infty[$ et que :

$$\forall x \in [0; +\infty[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}.$$

En 0, la dérivée est entendue comme la dérivée à droite.

4. c. Préciser les valeurs de $S'(0)$ et de $S'(1)$.

5. On admet que S est deux fois dérivable sur $[0; +\infty[$ et que :

$$\forall x \in [0; +\infty[, \quad S''(x) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(n+x)^3}.$$

Montrer que S est concave.

6. Soit $x \in]0; +\infty[$ fixé. On note φ la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par :

$$\forall t \in [1; +\infty[, \quad \varphi(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}.$$

6. a. Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \varphi(t) dt$ converge et calculer sa valeur.

6. b. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \varphi(n+1) \leq \int_n^{n+1} \varphi(t) \, dt \leq \varphi(n),$$

et en déduire :

$$\int_1^{+\infty} \varphi(t) \, dt \leq S(x) \leq 1 + \int_1^{+\infty} \varphi(t) \, dt.$$

6. c. Conclure :

$$S(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln x.$$

7. a. Dresser le tableau de variation de S , en précisant la limite de S en $+\infty$.

7. b. Tracer l'allure de la courbe représentative de S .