



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques 1

2003

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

PROBLÈME 1

On considère l'application $\varphi : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout réel $t \in [0; +\infty[$, par :

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t} & \text{si } t \neq 0, \\ 1 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

Et on considère, pour tout entier $n \geq 1$, les intégrales :

$$I_n = \int_0^{+\infty} (\varphi(t))^n dt, \quad J_n = \int_0^1 (\varphi(t))^n dt, \quad K_n = \int_1^{+\infty} (\varphi(t))^n dt.$$

Partie I : Résultats généraux sur φ et J_n

- 1) Montrer que φ est continue sur $[0; +\infty[$ et que, pour tout entier $n \geq 1$, l'intégrale J_n existe.
- 2) a) Montrer que φ est strictement positive sur $[0; 1]$ et que φ est strictement décroissante sur $[0; 1]$.
- 2) b) Établir, pour tout réel $t \in]0; +\infty[$: $|\varphi(t)| < 1$.
- 3) a) Montrer, pour tout réel $t \in [0; +\infty[$: $\varphi(t) \geq 1 - t$.

On pourra étudier les variations sur $[0; +\infty[$ de l'application $t \mapsto \sin t - t + t^2$.

- 3) b) En déduire, pour tout entier $n \geq 1$: $J_n \geq \frac{1}{n+1}$.

Partie II : Étude de I_1

1) a) Montrer, pour tout réel $x \in [1; +\infty[$:

$$\int_1^x \frac{\sin t}{t} dt = \cos 1 - \frac{\cos x}{x} - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2} dt.$$

1) b) En déduire que les intégrales K_1 et I_1 sont convergentes.

2) a) Montrer, pour tout réel $t \in [0; +\infty[$: $|\sin t| \geq \sin^2 t = \frac{1}{2}(1 - \cos(2t))$.

2) b) Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{2t} dt$ converge.

2) c) Dédurre des deux questions précédentes que l'intégrale I_1 n'est pas absolument convergente.

Partie III : Étude de I_n , pour $n \geq 2$

1) a) Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, l'intégrale K_n est convergente.

1) b) Établir, pour tout entier $n \geq 2$: $|K_n| \leq \frac{1}{n-1}$.

2) a) Montrer que la suite $(J_n)_{n \geq 2}$ est décroissante.

2) b) Montrer que la suite $(J_n)_{n \geq 2}$ converge ; on note ℓ sa limite.

2) c) Établir, pour tout entier $n \geq 2$ et tout réel $a \in]0; 1[$:

$$\int_0^a (\varphi(t))^n dt \leq a \quad \text{et} \quad \int_a^1 (\varphi(t))^n dt \leq (1-a)(\varphi(a))^n.$$

On pourra utiliser I.2.

- 2) d) En déduire, pour tout réel $a \in]0; 1[: 0 \leq \ell \leq a$ et conclure : $\ell = 0$.
- 3) a) Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, l'intégrale I_n est convergente.
- 3) b) Établir : $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

Partie IV : Étude de la série de terme général $I_n, n \geq 2$

- 1) Montrer, pour tout entier $p \geq 1 : K_{2p} + K_{2p+1} \geq 0$.
- 2) En déduire, pour tout entier $N \geq 1$:

$$\sum_{p=1}^N (I_{2p} + I_{2p+1}) \geq \sum_{p=1}^N (J_{2p} + J_{2p+1}).$$

- 3) En déduire que la série

$$\sum_{n \geq 2} I_n$$

diverge. On pourra utiliser I.3.b.

PROBLÈME 2

Dans tout le problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2, et E est un espace euclidien de dimension n dont le produit scalaire est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et la norme associée est notée $\| \cdot \|$. On note id_E l'application identique de E , et $\tilde{0}$ l'application nulle de E .

Si F est un sous-espace vectoriel de E , on note $F^\perp$ le sous-espace vectoriel supplémentaire orthogonal de F dans E .

Le projecteur de E sur F parallèlement à $F^\perp$ est appelé projecteur orthogonal sur F .

Pour tout endomorphisme f de E et toute valeur propre λ de f , on note $E_f(\lambda)$ le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ .

Partie I : Inverse généralisé d'un endomorphisme symétrique

On considère un endomorphisme symétrique f de E , c'est-à-dire un endomorphisme f tel que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle.$$

On suppose de plus que f est non inversible et non nul.

1) Montrer que 0 est valeur propre de f et que f admet au moins une valeur propre non nulle.

2) a) Soient λ et μ deux valeurs propres de f . Montrer, pour tout vecteur x de $E_f(\lambda)$ et pour tout vecteur y de $E_f(\mu)$:

$$\lambda \langle x, y \rangle = \mu \langle x, y \rangle.$$

2) b) En déduire que les sous-espaces propres de f sont deux à deux orthogonaux.

3) Montrer que les sous-espaces vectoriels $\text{Im } f$ et $\text{Ker } f$ sont supplémentaires orthogonaux dans E .

On suppose que f admet exactement $k + 1$ valeurs propres deux à deux distinctes $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k$ avec $k \geq 1$, $\lambda_0 = 0$ et $0 < |\lambda_1| \leq \dots \leq |\lambda_k|$.

Pour tout entier naturel j inférieur ou égal à k , on note p_j le projecteur orthogonal sur $E_f(\lambda_j)$.

4) Soit x un vecteur de E .

4) a) Montrer qu'il existe un unique $(k+1)$ -uplet $(x_0, x_1, \dots, x_k)$ de

$$E_f(0) \times E_f(\lambda_1) \times \dots \times E_f(\lambda_k) \text{ tel que } x = x_0 + x_1 + \dots + x_k.$$

4) b) Pour tout entier naturel j inférieur ou égal à k , montrer : $p_j(x) = x_j$.

Ainsi, la relation suivante est clairement vérifiée :

$$\text{id}_E = p_0 + p_1 + \dots + p_k.$$

5) a) Établir, pour tout couple (i, j) d'entiers naturels inférieurs ou égaux à k :

$$i \neq j \implies p_i \circ p_j = \tilde{0}.$$

5) b) Montrer : $f = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \dots + \lambda_k p_k$.

5) c) Montrer que le projecteur orthogonal p sur $\text{Im } f$ vérifie :

$$p = p_1 + p_2 + \dots + p_k.$$

On note $f^\sharp$ l'endomorphisme de E défini par
$$f^\sharp = \frac{1}{\lambda_1} p_1 + \frac{1}{\lambda_2} p_2 + \dots + \frac{1}{\lambda_k} p_k.$$

On dit que $f^\sharp$ est l'inverse généralisé de f .

6) a) Montrer : $f \circ f^\sharp = p$.

6) b) En déduire :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad (f(x) = p(y) \iff x - f^\sharp(y) \in \text{Ker } f).$$

7) Soit y un vecteur de E .

7) a) Montrer :

$$\forall x \in E, \quad \left(\|f(x) - y\| = \inf_{z \in E} \|f(z) - y\| \iff x - f^\sharp(y) \in \text{Ker } f \right).$$

7) b) En déduire que $f^\sharp(y)$ est le vecteur x de E de plus petite norme vérifiant :

$$\|f(x) - y\| = \inf_{z \in E} \|f(z) - y\|.$$

Partie II : Application à un exemple

Dans cette question, E est un espace euclidien de dimension 4 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une base orthonormale de E . On note :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit f l'endomorphisme de E associé à la matrice A relativement à la base $\mathcal{B}$.

- 1) Justifier que f est un endomorphisme symétrique non nul et non inversible.
- 2) Montrer que f admet exactement trois valeurs propres distinctes $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ avec $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2$.

On note p_1 le projecteur orthogonal sur $E_f(\lambda_1)$ et M_1 la matrice associée à p_1 relativement à la base $\mathcal{B}$.

On note p_2 le projecteur orthogonal sur $E_f(\lambda_2)$ et M_2 la matrice associée à p_2 relativement à la base $\mathcal{B}$.

- 3) Montrer : $A = 2M_1 + 4M_2$.
- 4) a) Montrer que $E_f(\lambda_2)$ est de dimension 1 et déterminer un vecteur v_2 de $E_f(\lambda_2)$ tel que $\|v_2\| = 1$.

- 4) b) Montrer : $\forall x \in E, \quad p_2(x) = \langle x, v_2 \rangle v_2$.
- 4) c) Déterminer la matrice M_2 .
- 5) En déduire la matrice associée à $f^\sharp$ relativement à la base $\mathcal{B}$.