



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques 1

2001

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Problème 1

On note $I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Le but du problème est la construction d'une application $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, continue et telle que :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = 1 + \frac{1}{2} \int_0^x (f(t) + f(t^2)) dt.$$

On considère les applications $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$, pour $n \in \mathbb{N}$, définies par $f_0 = 1$ (application constante égale à 1) et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \quad f_{n+1}(x) = 1 + \frac{1}{2} \int_0^x (f_n(t) + f_n(t^2)) dt.$$

1. a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est une application polynomiale.

b. Vérifier que, pour tout $x \in I$, $f_1(x) = 1 + x$ et $f_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{6}$, et calculer $f_3(x)$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction continue $|f_n - f_{n-1}|$ admet une borne supérieure sur I .
On note $D_n = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f_{n-1}(x)|$.

a. Calculer D_1 et D_2 .

b. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in I, \quad |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{2} D_n$.

On pourra étudier séparément les cas $x \in [0, \frac{1}{2}]$ et $x \in [-\frac{1}{2}, 0]$.

c. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad D_n \leq \frac{1}{2^n}$.

d. Établir la convergence de la série

$$\sum_{n \geq 1} D_n.$$

En déduire que, pour tout x fixé dans I , la série

$$\sum_{n \geq 1} (f_n(x) - f_{n-1}(x))$$

converge.

3. Établir que, pour tout x fixé dans I , la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

On définit ainsi une application $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ par : $\forall x \in I, \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x).$

4. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M_n = \sup_{x \in I} |f_n(x)|.$

a. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad M_n \leq 1 + \frac{1}{2} M_{n-1}.$

b. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad M_n \leq 2.$

c. Établir : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall (x, y) \in I^2, \quad |f_n(x) - f_n(y)| \leq 2|x - y|.$

5. a. Établir : $\forall (x, y) \in I^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq 2|x - y|.$

b. En déduire que f est continue sur I .

6. a. Établir :

$$\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in \mathbb{N}^*, \quad |f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{2^n} \left(1 - \frac{1}{2^p}\right).$$

b. En déduire : $\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}^*, |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{2^n}.$

7. En déduire : $\forall x \in I, f(x) = 1 + \frac{1}{2} \int_0^x (f(t) + f(t^2)) dt.$

Problème 2

Rappel

Pour tout entier $n \geq 1$, les solutions réelles de l'équation $\lambda^n = 1$ sont $\lambda = 1$ si n est impair, et $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$ si n est pair.

Définitions

Soit E un espace vectoriel réel.

On note id_E l'application identique de E .

Pour tout endomorphisme f de E , on note $f^0 = \text{id}_E$ et, pour tout entier naturel k , $f^{k+1} = f^k \circ f$.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'un endomorphisme f de E est cyclique d'ordre p s'il existe un élément x_0 de E vérifiant les trois conditions suivantes :

- $f^p(x_0) = x_0$;
- la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ est génératrice de E ;
- la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ est constituée d'éléments deux à deux distincts.

La famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ est alors appelée un cycle de f .

Étude d'un exemple

Dans cette partie, E est un espace vectoriel réel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E . On considère l'endomorphisme f de E dont la matrice associée dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que $(e_1, f(e_1), f^2(e_1))$ est une base de E et déterminer la matrice associée à f relativement à cette base.
2. Montrer que f est cyclique d'ordre 4 et que $(e_1, f(e_1), f^2(e_1), f^3(e_1))$ est un cycle de f .
3. Montrer que $f^4 = \text{id}_E$.
4. Déterminer les valeurs propres réelles de f et une base de chaque sous-espace propre. L'endomorphisme f est-il diagonalisable sur $\mathbb{R}$?

Cas général

Dans cette partie, E est un espace vectoriel réel de dimension $n \geq 1$ et on considère un endomorphisme f de E cyclique d'ordre p .

Soit $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ un cycle de f .

1. Montrer : $p \geq n$.
2. Montrer que $f^p = \text{id}_E$. En déduire que f est bijective.
3. On note m le plus grand des entiers naturels k tels que la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{k-1}(x_0))$ est libre.
 - a. Montrer que $f^m(x_0)$ est combinaison linéaire des m vecteurs $x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0)$.

b. Montrer, par récurrence, que, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à m , le vecteur $f^k(x_0)$ est combinaison linéaire des m vecteurs $x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0)$.

c. En déduire que $m = n$ et que la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E .

4. On note $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ les n nombres réels tels que :

$$f^n(x_0) = a_0 x_0 + a_1 f(x_0) + a_2 f^2(x_0) + \dots + a_{n-1} f^{n-1}(x_0).$$

a. On considère l'endomorphisme g de E défini par

$$g = a_0 \text{id}_E + a_1 f + a_2 f^2 + \dots + a_{n-1} f^{n-1}.$$

Montrer : $\forall k \in \mathbb{N}, \quad g(f^k(x_0)) = f^{n+k}(x_0)$.

En déduire : $f^n = a_0 \text{id}_E + a_1 f + a_2 f^2 + \dots + a_{n-1} f^{n-1}$.

b. Déterminer la matrice associée à f relativement à la base $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ à l'aide des coefficients $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$.

c. Montrer : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \text{rg}(f - \lambda \text{id}_E) \geq n - 1$.

En déduire que les sous-espaces propres de f sont de dimension 1.

5. On suppose dans cette question que f est cyclique d'ordre n et que $\dim(E) = n$. Soit $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ un cycle de f .

a. Montrer que, si un réel λ est valeur propre de f , alors $\lambda^n = 1$.

b. Déterminer la matrice associée à f relativement à la base $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$.

c. Déterminer les valeurs propres réelles de f et une base de chaque sous-espace propre. En déduire que f est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $n \in \{1, 2\}$ et donner, dans ces deux cas, une base de vecteurs propres de f .