



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques 1

1999

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Problème 1

Notations

n désigne un entier supérieur ou égal à 3.

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.

On identifie les matrices unicolonnes $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ d'ordre n avec les vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

$\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$, défini par : si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et

$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, alors

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k.$$

En identifiant les matrices de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ avec les réels, on a $\langle X, Y \rangle = {}^tXY$.

I_n désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

A_n est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le terme général $a_{i,j}$ est égal à 1 si $|i - j| = 1$ et égal à 0 sinon.

Ainsi, par exemple :

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que A_3 est diagonalisable.

Déterminer une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $A_3 = PDP^{-1}$.

2. Soit $\theta \in]0, \pi[$. On désigne par S_θ l'ensemble des suites réelles $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telles que $s_0 = 0$ et, pour tout entier naturel k , $s_{k+2} - 2 \cos \theta s_{k+1} + s_k = 0$.

Montrer que, si la suite $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ appartient à S_θ , alors, pour tout entier naturel k :

$$s_k = s_1 \frac{\sin(k\theta)}{\sin \theta}.$$

En déduire que S_θ est un espace vectoriel réel de dimension 1.

3. Soit λ une valeur propre réelle de A_n et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre non nul associé à λ .

On note m le plus grand des réels $|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|$.

3. a. Montrer :

$$\begin{cases} \lambda x_1 = x_2, \\ \forall k \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket, \quad \lambda x_k = x_{k-1} + x_{k+1}, \\ \lambda x_n = x_{n-1}. \end{cases}$$

Montrer, pour tout entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $|\lambda| |x_k| \leq 2m$, et en déduire $|\lambda| \leq 2$.

3. b. On suppose $|\lambda| < 2$.

Montrer qu'il existe un unique $\theta \in]0, \pi[$ tel que $\lambda = 2 \cos \theta$.

Montrer que la suite $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de S_θ déterminée par $s_1 = x_1$ vérifie :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad s_k = x_k \quad \text{et} \quad s_{n+1} = 0.$$

En déduire qu'il existe un entier $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\theta = \frac{p\pi}{n+1}$.

Pour tout entier $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note :

$$\theta_p = \frac{p\pi}{n+1}, \quad \lambda_p = 2 \cos \theta_p, \quad X_p = \begin{pmatrix} \sin \theta_p \\ \sin(2\theta_p) \\ \vdots \\ \sin(n\theta_p) \end{pmatrix}.$$

3. c. Soit $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Montrer que λ_p est une valeur propre de A_n et que X_p est un vecteur propre associé à λ_p .

3. d. Montrer que $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ est l'ensemble de toutes les valeurs propres de A_n et que $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

4. Soit U_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de terme général $u_{p,q} = \sin\left(\frac{pq\pi}{n+1}\right)$, pour $(p, q) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$.

5. Montrer que U_n est inversible et déterminer la matrice $D_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$D_n = U_n^{-1} A_n U_n.$$

6. a. Montrer, pour tout couple $(p, q) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$:

$$\lambda_p {}^t(X_p) X_q = \lambda_q {}^t(X_p) X_q.$$

En déduire que la base $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est orthogonale et que, pour tout couple $(p, q) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ tel que $p \neq q$, on a :

$$\sum_{k=0}^n \sin(k\theta_p) \sin(k\theta_q) = 0.$$

6. b. Montrer, pour tout $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\sum_{k=0}^n \cos(2k\theta_p) = 0.$$

En déduire que, pour tout entier $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a :

$$\sum_{k=1}^n \sin^2(k\theta_p) = \frac{n+1}{2}.$$

6. c. En déduire $U_n^2 = \frac{n+1}{2} I_n$, puis $A_n = \frac{2}{n+1} U_n D_n U_n$.

Problème 2

On considère l'application $f : [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout réel $t \in [0, 1[$, par :

$$f(t) = \begin{cases} -\frac{\ln(1-t)}{t} & \text{si } t \in]0, 1[, \\ 1 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

1. a. Montrer que f est continue sur $[0, 1[$.
1. b. Montrer que f est de classe C^1 sur $]0, 1[$ et calculer $f'(t)$ pour tout réel $t \in]0, 1[$.
1. c. Établir que $f'(t)$ tend vers $\frac{1}{2}$ lorsque t tend vers 0, et que f est de classe C^1 sur $[0, 1[$.
1. d. Montrer, pour tout réel $t \in [0, 1[$: $\ln(1 - t) + \frac{t}{1 - t} \geq 0$.
1. e. Dresser le tableau de variation de f . On précisera la limite de $f(t)$ lorsque t tend vers 1.
1. f. Tracer l'allure de la courbe représentative de f . On n'étudiera pas la dérivée seconde de f et on admettra que f est convexe.
2. a. Montrer que, pour tout réel $x \in [0, 1]$, l'intégrale $\int_0^x f(t) dt$ existe. On distinguera les cas $x \in [0, 1[$ et $x = 1$.

On note $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout réel $x \in [0, 1]$, par
$$g(x) = \int_0^x f(t) dt.$$
2. b. Montrer que g est continue sur $[0, 1]$, de classe C^2 sur $[0, 1[$ et calculer $g'(x)$ pour tout réel $x \in [0, 1[$.
2. c. Établir que $\frac{g(x) - g(1)}{x - 1}$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 1.
2. d. Dresser le tableau de variation de g . On admettra qu'une valeur approchée de $g(1)$ à 10^{-2} près est 1,65.
2. e. Établir que g est convexe sur $[0, 1[$.

2. f. Tracer l'allure de la courbe représentative de g . On précisera les demi-tangentes aux points d'abscisses 0 et 1.

3. a. Justifier que, pour tout réel $t \in [0, 1[$, la série numérique

$$\sum_{n \geq 0} t^n$$

converge. Quelle est sa somme ?

On note, pour tout entier naturel n , $R_n : [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall t \in [0, 1[, \quad R_n(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} t^k.$$

3. b. Montrer, pour tout entier naturel n et tout réel $t \in [0, 1[$, $R_n(t) = \frac{t^{n+1}}{1-t}$, et en déduire que, pour tout entier naturel n , R_n est continue sur $[0, 1[$.

3. c. Établir, pour tout entier naturel n et tout réel $x \in [0, 1[$:

$$\int_0^x \frac{1}{1-t} dt = \sum_{k=0}^n \frac{x^{k+1}}{k+1} + \int_0^x R_n(t) dt.$$

3. d. Montrer, pour tout entier naturel n et tout réel $x \in [0, 1[$:

$$0 \leq \int_0^x R_n(t) dt \leq \frac{x}{(n+2)(1-x)}.$$

3. e. Démontrer que, pour tout réel $x \in [0, 1[$, la série numérique

$$\sum_{k \geq 0} \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

est convergente et que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k+1}.$$

4. a. Montrer que, pour tout réel $x \in [0, 1]$, la série numérique

$$\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2}$$

est convergente.

On note, pour tout entier naturel n , $\rho_n : [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall t \in [0, 1[, \quad \rho_n(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{t^k}{k+1}.$$

4. b. Montrer que, pour tout entier naturel n , ρ_n est continue sur $[0, 1[$.

4. c. Établir, pour tout entier naturel n et tout réel $x \in [0, 1[$:

$$g(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{k+1}}{(k+1)^2} + \int_0^x \rho_n(t) \, dt.$$

4. d. Démontrer, pour tout entier naturel n et tout réel $t \in [0, 1[$:

$$0 \leq \rho_n(t) \leq \frac{1}{(n+2)(1-t)}.$$

4. e. En déduire que, pour tout entier naturel n et tout réel $x \in [0, 1[$:

$$0 \leq \int_0^x \rho_n(t) \, dt \leq \frac{-\ln(1-x)}{n+2}.$$

4. f. Conclure que, pour tout réel $x \in [0, 1[$:

$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$