



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques 1

1998

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Notations

E désigne l'ensemble des fonctions polynômes réelles.

n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.

E_n désigne l'ensemble des fonctions polynômes réelles de degré inférieur ou égal à n .

Pour tout entier naturel non nul k , X^k désigne la fonction polynôme $t \mapsto t^k$.

Une fonction polynôme P non nulle est dite unitaire lorsque son coefficient dominant est égal à 1 ; c'est-à-dire que, si d est le degré de P , alors $P = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \dots + a_0$, où $a_0, a_1, \dots, a_{d-1}$ sont des réels.

PARTIE I : Étude d'un produit scalaire

1.a. Montrer que, pour toute fonction polynôme P de E , l'intégrale $\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t} dt$ est convergente.

1.b. Pour tout entier naturel k , on note $I_k = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt$.

Déterminer une relation entre I_k et I_{k+1} . En déduire que $I_k = k!$.

On considère l'application notée $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de $E_n \times E_n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt.$$

2.a. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E_n .

2.b. Pour tout couple (i, j) d'entiers naturels inférieurs ou égaux à n , calculer $\langle X^i, X^j \rangle$.

Dans la suite du problème, E_n est muni de ce produit scalaire.

3.a. Construire une famille orthogonale (Q_0, Q_1, Q_2) de trois fonctions polynômes telle que, pour tout $k \in \{0, 1, 2\}$, Q_k soit unitaire et de degré k .

On pourra poser $Q_0 = 1$, puis chercher $Q_1 = X + c$ en imposant $\langle Q_1, Q_0 \rangle = 0$, et enfin $Q_2 = X^2 + dX + e$ en imposant $\langle Q_2, Q_0 \rangle = \langle Q_2, Q_1 \rangle = 0$.

On vérifiera que $Q_2 = X^2 - 4X + 2$.

3.b. Montrer, pour tout couple (u, v) de réels :

$$\int_0^{+\infty} (t^2 + ut + v)^2 e^{-t} dt = \langle Q_2, Q_2 \rangle + (u + 4)^2 \langle Q_1, Q_1 \rangle + (u + v + 2)^2 \langle Q_0, Q_0 \rangle.$$

3.c. Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ qui, à tout couple (u, v) de réels, associe l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} (t^2 + ut + v)^2 e^{-t} dt.$$

Déduire de la question précédente que H admet un minimum que l'on calculera.

PARTIE II : Construction d'une base orthogonale

Soit Φ l'application définie sur E_n par :

$$\forall P \in E_n, \quad \Phi(P) = XP'' + (1 - X)P'.$$

C'est-à-dire que $\Phi(P)$ est la fonction polynôme définie, pour tout réel t , par :

$$\Phi(P)(t) = tP''(t) + (1 - t)P'(t).$$

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de E_n et déterminer la matrice associée à Φ relativement à la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ de E_n .

2.a. Soit $k \in \{0, \dots, n\}$. Montrer que la famille $(\Phi(X^j) + kX^j)_{0 \leq j \leq k}$ est liée. En déduire que $-k$ est valeur propre de Φ .

2.b. Montrer que Φ est diagonalisable.

2.c. Montrer que la dimension de chaque sous-espace propre est égale à 1.

En déduire que, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, il existe une unique fonction polynôme unitaire P_k vérifiant $\Phi(P_k) = -kP_k$.

2.d. Déterminer, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, le degré de P_k .

2.e. Vérifier que $P_0 = Q_0$, $P_1 = Q_1$ et $P_2 = Q_2$.

3.a. À l'aide d'une intégration par parties, montrer :

$$\forall (P, Q) \in (E_n)^2, \quad \langle \Phi(P), Q \rangle = - \int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t} dt.$$

Indication : on pourra comparer la dérivée de la fonction $t \mapsto tP'(t)e^{-t}$ avec la fonction $t \mapsto \Phi(P)(t)e^{-t}$.

3.b. En déduire que Φ est un endomorphisme symétrique de E_n .

3.c. En déduire que la famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base orthogonale de E_n .

PARTIE III : Calcul d'une valeur approchée d'une intégrale

On note $a = 2 - \sqrt{2}$ et $b = 2 + \sqrt{2}$ les deux racines de P_2 .

1.a. Déterminer deux réels α et β tels que, pour toute fonction polynôme P de degré inférieur ou égal à 1, on ait :

$$\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t} dt = \alpha P(a) + \beta P(b).$$

1.b. Vérifier : $\int_0^{+\infty} P_2(t)e^{-t} dt = \alpha P_2(a) + \beta P_2(b)$.

1.c. Soit P une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 3.

Montrer qu'il existe deux fonctions polynômes Q et R , chacune de degré inférieur ou égal à 1, telles que $P = QP_2 + R$.

Montrer : $\langle P_2, Q \rangle = 0$.

En déduire : $\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t} dt = \alpha P(a) + \beta P(b)$.

Dans la suite du problème, on considère une fonction f réelle quatre fois dérivable sur $[0, +\infty[$ et dont la dérivée quatrième $f^{(4)}$ est continue et bornée sur $[0, +\infty[$.

Soit M un réel tel que $\forall t \in [0, +\infty[, \quad |f^{(4)}(t)| \leq M$.

2.a. En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, déterminer une fonction polynôme T de degré inférieur ou égal à 4 telle que :

$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad 0 \leq |f(t)| \leq T(t).$$

En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-t} dt$ converge.

2.b. Soit D l'application de E_3 dans $\mathbb{R}^4$ définie par :

$$\forall P \in E_3, \quad D(P) = (P(a), P'(a), P(b), P'(b)).$$

Montrer que D est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

2.c. En déduire l'existence d'un unique polynôme S de E_3 tel que :

$$S(a) = f(a), \quad S'(a) = f'(a), \quad S(b) = f(b), \quad S'(b) = f'(b).$$

3. Soit x_0 un réel positif ou nul, différent de a et de b .

On définit la fonction g sur $[0, +\infty[$ par :

$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad g(t) = f(t) - S(t) - \frac{f(x_0) - S(x_0)}{(P_2(x_0))^2} (P_2(t))^2.$$

3.a. Vérifier que g s'annule en a , b et x_0 .

3.b. En déduire que g' admet au moins quatre zéros deux à deux distincts (dont a et b), puis qu'il existe $c \in]0, +\infty[$ tel que $g^{(4)}(c) = 0$.

On étudiera avec soin le cas $a < x_0 < b$ et on expliquera pourquoi les autres cas sont similaires.

3.c. En déduire : $f(x_0) - S(x_0) = \frac{(P_2(x_0))^2}{4!} f^{(4)}(c)$, puis :

$$|f(x_0) - S(x_0)| \leq \frac{(P_2(x_0))^2}{4!} M.$$

3.d. Établir : $\forall x \in [0, +\infty[, \quad |f(x) - S(x)| \leq \frac{(P_2(x))^2}{4!} M.$

3.e. En déduire :

$$\left| \int_0^{+\infty} f(x) e^{-x} dx - \alpha f(a) - \beta f(b) \right| \leq \frac{M}{6}.$$

4. Application

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $t \in [0, +\infty[$, par $f(t) = \frac{1}{10+t}$.

En admettant que :

$$0,0915 \leq \frac{2-\sqrt{2}}{4} f(2+\sqrt{2}) + \frac{2+\sqrt{2}}{4} f(2-\sqrt{2}) \leq 0,0916,$$

donner une valeur décimale approchée de $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{10+t} dt$. On en indiquera la précision.