



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques 1

1997

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

PREMIER PROBLÈME

On note E l'espace vectoriel réel des applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que l'application $\Phi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\Phi(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t) dt$$

est un produit scalaire sur E .

On note $\| \cdot \|$ la norme associée à ce produit scalaire.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. On note E_n le sous-espace vectoriel de E formé des fonctions polynomiales définies sur $[0, 1]$ et de degré inférieur ou égal à $n - 1$, et, pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, e_i l'application de $[0, 1]$ vers $\mathbb{R} : t \mapsto t^{i-1}$.

On rappelle que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E_n .

2. Calculer, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $\Phi(e_i, e_j)$.

On considère la matrice carrée réelle d'ordre n :

$$H_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \dots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}.$$

3. Étude du cas $n = 2$

3. a. Déterminer les valeurs propres de la matrice H_2 .

3. b. La matrice H_2 est-elle diagonalisable ?

3. c. Montrer que la matrice H_2 est inversible et calculer son inverse.

Dans toute la suite du problème, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

4. Établir que la matrice H_n est diagonalisable.

5. a. Soient $P \in E_n, Q \in E_n$.

On note $a_1, \dots, a_n$ les réels tels que

$$P = \sum_{i=1}^n a_i e_i,$$

$b_1, \dots, b_n$ les réels tels que

$$Q = \sum_{i=1}^n b_i e_i,$$

et A, B les matrices-colonnes définies par :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Montrer : $\Phi(P, Q) = {}^t A H_n B$, où ${}^t A$ désigne la transposée de A .

5. b. En déduire que les valeurs propres de la matrice H_n sont toutes strictement positives.

5. c. La matrice H_n est-elle inversible ?

6. Soit $f \in E$. On note, pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\beta_i = \Phi(e_i, f)$.

On considère les matrices-colonnes B et A_0 définies par :

$$B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}, \quad A_0 = H_n^{-1}B.$$

On note $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ les réels tels que $A_0 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, et P_0 le polynôme défini par

$$P_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i.$$

On considère l'application $d : E_n \rightarrow \mathbb{R}, P \mapsto \|P - f\|$.

6. a. Montrer : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \Phi(e_i, P_0 - f) = 0$.

6. b. En déduire : $\forall Q \in E_n, \Phi(Q, P_0 - f) = 0$.

6. c. Établir :

$$\forall P \in E_n, \quad \|P - f\|^2 = \|P - P_0\|^2 + \|P_0 - f\|^2.$$

6. d. Démontrer que d admet un minimum et que ce minimum est atteint en P_0 et en P_0 seulement.

6. e. Montrer : $\|P_0 - f\|^2 = \|f\|^2 - \|P_0\|^2$.

6. f. Un exemple :

On choisit ici $n = 2$ et $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \left|t - \frac{1}{3}\right|$.

Calculer P_0 et $d(P_0)$, et donner une valeur approchée décimale de $d(P_0)$ à 10^{-8} près.

DEUXIÈME PROBLÈME

Étude de la suite de terme général $M_n = \frac{n^n}{n!} e^{-n}$

1. Pour tout entier naturel non nul n , on définit $v_n = -1 + n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$, où $\ln$ désigne le logarithme népérien.

1. a. Montrer qu'il existe un réel α strictement négatif tel que $v_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha}{n}$.

1. b. En déduire la nature de la série de terme général v_n et montrer que la suite de terme général $V_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$ admet pour limite $-\infty$.

2. Pour tout entier naturel non nul n , on définit $M_n = \frac{n^n}{n!} e^{-n}$.

2. a. Montrer, pour tout entier naturel non nul n :

$$v_n = \ln \left(\frac{M_{n+1}}{M_n} \right).$$

2. b. En déduire la limite de la suite de terme général M_n .

Étude d'une famille de fonctions

Pour tout entier naturel non nul n , on définit la fonction f_n sur $[0, +\infty[$ par

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n!} e^{-x}.$$

1. Donner le tableau des variations et une représentation graphique de f_1 , puis de f_n pour $n \geq 2$. On ne déterminera pas les éventuels points d'inflexion.

Vérifier que M_n est la borne supérieure de f_n .

2. Pour tout entier naturel non nul n , on définit la fonction F_n sur $[0, +\infty[$ par

$$F_n(x) = \int_0^x f_n(t) dt.$$

2. a. Soit x un réel positif ou nul. Établir une relation entre $F_{n+1}(x)$, $F_n(x)$ et $f_{n+1}(x)$.

En déduire, pour tout entier naturel non nul n :

$$F_n(x) = 1 - e^{-x} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$

2. b. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n , l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_n(t) dt$ est convergente et vaut 1.

Étude de la suite de terme général $u_n = F_n(n)$

1. Prouver, pour tout entier naturel non nul n :

$$u_{n+1} - u_n = \int_n^{n+1} f_{n+1}(t) dt - f_{n+1}(n).$$

En déduire que la suite (u_n) est croissante et qu'elle converge vers un réel L vérifiant $0 < L \leq 1$.

2. Déterminer une valeur approchée décimale par défaut à 10^{-1} près de u_2 .

En déduire un nouvel encadrement de L .

3. Soit h la fonction définie sur $[0, 1]$ par $h(t) = \frac{t}{2-t} e^{2-2t}$.

3. a. Montrer : $\forall t \in [0, 1], 0 \leq h(t) \leq 1$.

3. b. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, n], \quad \frac{f_n(x)}{f_n(2n-x)} = \left(h\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n.$$

3. c. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, n], \quad f_n(x) \leq f_n(2n-x).$$

3. d. En utilisant l'inégalité précédente, montrer, pour tout entier naturel non nul n :

$$u_n \leq \int_0^n f_n(2n-t) dt \leq \int_n^{+\infty} f_n(t) dt.$$

En déduire : $L \leq \frac{1}{2}.$

Détermination de la limite de la suite (u_n) par un raisonnement probabiliste

Soit $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi de Poisson de paramètre 1.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$Y_n = \sum_{k=1}^n X_k.$$

On rappelle que Y_n suit une loi de Poisson.

1. Déterminer l'espérance de Y_n .

2. Exprimer la probabilité $P(Y_n \leq n)$ en fonction de u_n .

3. À l'aide du théorème limite central, que l'on énoncera avec soin, trouver la valeur de L .