



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques 1

1997

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

PREMIER PROBLÈME

1. Pour $f, g \in E$, le produit fg est continu sur le segment $[0, 1]$, donc son intégrale existe et est finie.

La linéarité de l'intégrale montre que Φ est bilinéaire. Elle est symétrique, car $f(t)g(t) = g(t)f(t)$ pour tout t . Enfin,

$$\Phi(f, f) = \int_0^1 f(t)^2 dt \geq 0.$$

Pour vérifier le caractère défini positif, supposons $f \neq 0$. Il existe alors $t_0 \in [0, 1]$ tel que $f(t_0) \neq 0$. Par continuité, on peut trouver un sous-intervalle J de $[0, 1]$, de longueur strictement positive, sur lequel $|f(t)| \geq |f(t_0)|/2$. Ce raisonnement reste valable si t_0 est une extrémité du segment, en prenant un intervalle d'un seul côté. Ainsi

$$\Phi(f, f) \geq \int_J f(t)^2 dt \geq \frac{|f(t_0)|^2}{4} \text{longueur}(J) > 0.$$

Par conséquent, $\Phi(f, f) = 0$ si et seulement si $f = 0$. L'application Φ est bien un produit scalaire sur E , de norme associée $\|f\| = \sqrt{\int_0^1 f(t)^2 dt}$.

2. Pour $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $e_i(t)e_j(t) = t^{i+j-2}$. Comme $i + j - 1 \geq 1$,

$$\Phi(e_i, e_j) = \int_0^1 t^{i+j-2} dt = \left[\frac{t^{i+j-1}}{i+j-1} \right]_0^1 = \frac{1}{i+j-1}.$$

Ce sont précisément les coefficients de H_n : la matrice contient les produits scalaires des vecteurs de la base $(e_1, \dots, e_n)$.

3. a. On a

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Cherchons ses valeurs propres en résolvant le système $H_2X = \lambda X$.

Pour $X = {}^t(a, b) \neq 0$, ce système s'écrit

$$(1 - \lambda)a + \frac{1}{2}b = 0, \quad \frac{1}{2}a + \left(\frac{1}{3} - \lambda\right)b = 0.$$

Si $a = 0$, la première équation impose $b = 0$, contradiction. Ainsi $a \neq 0$ et la première équation donne $b = 2(\lambda - 1)a$. En substituant dans la seconde et en divisant par a ,

$$\frac{1}{2} + 2\left(\frac{1}{3} - \lambda\right)(\lambda - 1) = 0.$$

Après développement, cela équivaut à

$$\lambda^2 - \frac{4}{3}\lambda + \frac{1}{12} = 0, \quad \text{soit} \quad 12\lambda^2 - 16\lambda + 1 = 0.$$

La résolution de cette équation du second degré donne

$$\lambda_- = \frac{4 - \sqrt{13}}{6}, \quad \lambda_+ = \frac{4 + \sqrt{13}}{6}.$$

Pour chacune de ces valeurs, le vecteur ${}^t(3, -2 \pm \sqrt{13})$ satisfait les deux équations ; les deux valeurs sont donc effectivement propres. Le raisonnement précédent exclut toute autre valeur propre.

Ainsi le spectre réel de H_2 est $\{\lambda_-, \lambda_+\}$. Les deux valeurs sont strictement positives, car $\sqrt{13} < 4$.

3. b. Méthode 1 — Deux valeurs propres distinctes

Les valeurs λ_- et λ_+ sont distinctes. Les vecteurs propres non nuls

$$v_- = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 - \sqrt{13} \end{pmatrix}, \quad v_+ = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 + \sqrt{13} \end{pmatrix}$$

associés à ces valeurs sont libres. Ils forment donc une base de $\mathbb{R}^2$, ce qui prouve que H_2 est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Méthode 2 — Théorème spectral

La matrice H_2 est réelle et symétrique. Le théorème spectral assure alors qu'elle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ dans une base orthonormée.

La première méthode utilise les éléments propres calculés en 3. a ; la seconde suffit à établir la diagonalisation sans calculer les valeurs propres.

3. c. Résolvons $H_2 {}^t(a, b) = {}^t(r, s)$ pour des réels arbitraires r, s . Le système est

$$a + \frac{1}{2}b = r, \quad \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b = s.$$

En remplaçant a par $r - b/2$ dans la seconde équation, nous obtenons

$$\frac{r}{2} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)b = s, \quad \frac{b}{12} = s - \frac{r}{2}.$$

Ainsi $b = 12s - 6r$ et $a = r - b/2 = 4r - 6s$. Pour chaque (r, s) , il existe donc une solution unique. La matrice H_2 est inversible et

$$H_2^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}.$$

La multiplication directe confirme $H_2 H_2^{-1} = H_2^{-1} H_2 = I_2$.

4. Les coefficients de H_n sont réels et vérifient $(H_n)_{ij} = 1/(i + j - 1) = (H_n)_{ji}$. La matrice H_n est donc réelle symétrique.

Le théorème spectral s'applique : H_n est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, avec une base orthonormée de vecteurs propres.

5. a. Rectification de l'énoncé — Dans le PDF, la première coordonnée de la colonne B est imprimée 1. Elle doit être b_1 , comme dans le développement de Q ; le sujet fourni utilise $B = {}^t(b_1, \dots, b_n)$.

Par bilinéarité et parce que les sommes sont finies,

$$\Phi(P, Q) = \Phi \left(\sum_{i=1}^n a_i e_i, \sum_{j=1}^n b_j e_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_j \Phi(e_i, e_j).$$

La question 2 donne $\Phi(e_i, e_j) = (H_n)_{ij}$. Or le produit matriciel ${}^t A H_n B$ est justement la somme

$$\sum_{i,j} a_i (H_n)_{ij} b_j.$$

Donc

$$\Phi(P, Q) = {}^t A H_n B.$$

5. b. Soit λ une valeur propre réelle de H_n et $A \neq 0$ un vecteur propre associé. Posons

$$P = \sum_{i=1}^n a_i e_i,$$

où les a_i sont les coordonnées de A .

Puisque $(e_1, \dots, e_n)$ est une base et $A \neq 0$, $P \neq 0$. Le caractère défini positif du produit scalaire et la question 5. a donnent

$$0 < \Phi(P, P) = {}^t A H_n A = \lambda {}^t A A.$$

Comme

$${}^t A A = \sum_{i=1}^n a_i^2 > 0,$$

nous pouvons diviser et obtenir

$$\lambda = \frac{\Phi(P, P)}{{}^t A A} > 0.$$

Toutes les valeurs propres de H_n sont donc strictement positives.

5. c. Méthode 1 — Diagonalisation

D'après 4, H_n est semblable à une matrice diagonale. Tous les coefficients de cette diagonale sont ses valeurs propres, strictement positives par 5. b. Cette matrice diagonale est donc inversible, et H_n aussi.

Méthode 2 — Noyau et positivité

Supposons $H_n A = 0$ et posons

$$P = \sum_{i=1}^n a_i e_i.$$

La question 5. a donne $\Phi(P, P) = {}^t A H_n A = 0$. Comme Φ est un produit scalaire, $P = 0$, puis $A = 0$, puisque les e_i sont une base.

Ainsi $\text{Ker } H_n = \{0\}$. En dimension finie, une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même est inversible dès qu'elle est injective. Donc H_n est inversible.

La première preuve s'appuie sur les valeurs propres ; la seconde établit directement l'injectivité, sans avoir besoin de la diagonalisation.

6. a. L'inverse H_n^{-1} existe par 5. c, donc $A_0 = H_n^{-1} B$ est bien défini et vérifie $H_n A_0 = B$.

La coordonnée de ligne i de cette égalité est

$$\sum_{j=1}^n (H_n)_{ij} \alpha_j = \beta_i.$$

Par la question 2 et la définition de β_i , cela s'écrit

$$\Phi \left(e_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j \right) = \Phi(e_i, f),$$

soit $\Phi(e_i, P_0 - f) = 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

6. b. Tout $Q \in E_n$ s'écrit

$$Q = \sum_{i=1}^n q_i e_i.$$

La bilinéarité et 6. a donnent

$$\Phi(Q, P_0 - f) = \sum_{i=1}^n q_i \Phi(e_i, P_0 - f) = 0.$$

Ainsi $P_0 - f$ est orthogonal à tous les éléments de E_n .

6. c. Pour $P \in E_n$, écrivons $P - f = (P - P_0) + (P_0 - f)$. Le vecteur $P - P_0$ appartient à E_n , donc il est orthogonal à $P_0 - f$ par 6. b.

En développant le carré de la norme associée au produit scalaire,

$$\|P - f\|^2 = \|P - P_0\|^2 + 2\Phi(P - P_0, P_0 - f) + \|P_0 - f\|^2.$$

Le terme mixte est nul, d'où l'identité de Pythagore

$$\|P - f\|^2 = \|P - P_0\|^2 + \|P_0 - f\|^2.$$

6. d. D'après 6. c, $\|P - f\|^2 \geq \|P_0 - f\|^2$ pour tout $P \in E_n$. Les deux normes étant positives ou nulles, la croissance de la racine carrée donne $d(P) \geq d(P_0)$.

Le polynôme P_0 appartient à E_n , donc ce minimum est bien atteint. L'égalité

$d(P) = d(P_0)$ équivaut, par 6. c, à $\|P - P_0\|^2 = 0$. Une norme associée à un produit scalaire s'annule seulement sur le vecteur nul : l'égalité équivaut à $P = P_0$.

Ainsi P_0 est l'unique polynôme minimisant la distance à f dans E_n . Il est le projeté orthogonal de f sur ce sous-espace de dimension finie.

6. e. Méthode 1 — Cas particulier de l'identité précédente

Prenons $P = 0$, qui appartient à E_n , dans 6. c. Nous obtenons

$$\|f\|^2 = \|P_0\|^2 + \|P_0 - f\|^2.$$

Par réarrangement, $\|P_0 - f\|^2 = \|f\|^2 - \|P_0\|^2$.

Méthode 2 — Développement et orthogonalité

Le carré de la norme donne

$$\|P_0 - f\|^2 = \|P_0\|^2 - 2\Phi(P_0, f) + \|f\|^2.$$

En prenant $Q = P_0$ dans 6. b, nous avons $\Phi(P_0, P_0 - f) = 0$, donc $\Phi(P_0, f) = \|P_0\|^2$. La substitution donne la même formule.

La première méthode réutilise Pythagore ; la seconde est utile pour exprimer la distance minimale à partir d'un produit scalaire.

6. f. Ici E_2 est l'espace des polynômes affines et $f(t) = |t - 1/3|$ est continue. On a

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{3} - t & \text{pour } 0 \leq t \leq \frac{1}{3}, \\ t - \frac{1}{3} & \text{pour } \frac{1}{3} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Calculons d'abord les deux coefficients $\beta_1 = \int_0^1 f(t) dt$ et $\beta_2 = \int_0^1 t f(t) dt$ en

séparant les deux intervalles.

$$\beta_1 = \int_0^{1/3} \left(\frac{1}{3} - t \right) dt + \int_{1/3}^1 \left(t - \frac{1}{3} \right) dt = \frac{1}{18} + \frac{2}{9} = \frac{5}{18}.$$

Pour le second coefficient,

$$\int_0^{1/3} t \left(\frac{1}{3} - t \right) dt = \left[\frac{t^2}{6} - \frac{t^3}{3} \right]_0^{1/3} = \frac{1}{162},$$

$$\int_{1/3}^1 t \left(t - \frac{1}{3} \right) dt = \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{6} \right]_{1/3}^1 = \frac{28}{162}.$$

Ainsi $\beta_2 = 29/162$. Avec l'inverse obtenu en 3. c,

$$A_0 = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{18} \\ \frac{29}{162} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{27} \\ \frac{13}{27} \end{pmatrix}.$$

En effet, $4(5/18) - 6(29/162) = 10/9 - 29/27 = 1/27$, et

$-6(5/18) + 12(29/162) = -5/3 + 58/27 = 13/27$. Par conséquent,

$$P_0(t) = \frac{1 + 13t}{27}.$$

Pour calculer la distance, utilisons 6. e. D'une part,

$$\|f\|^2 = \int_0^1 \left(t - \frac{1}{3} \right)^2 dt = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{1}{9}.$$

D'autre part, $H_2 A_0 = B$, donc

$$\|P_0\|^2 = {}^t(A_0)H_2 A_0 = {}^t(A_0)B = \frac{1}{27} \frac{5}{18} + \frac{13}{27} \frac{29}{162} = \frac{211}{2187}.$$

Il vient

$$d(P_0)^2 = \frac{1}{9} - \frac{211}{2187} = \frac{32}{2187},$$

puis

$$d(P_0) = \sqrt{\frac{32}{2187}} = \frac{4\sqrt{6}}{81}.$$

$d(P_0) \approx 0,12096246$. Cette valeur décimale arrondie a une erreur inférieure à 10^{-8} ; le calcul numérique donne plus précisément 0,120962456433737

DEUXIÈME PROBLÈME

Étude de la suite de terme général $M_n = \frac{n^n}{n!} e^{-n}$

1. a. Utilisons le développement limité du logarithme en 0 :

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + o(z^2).$$

En évaluant cette formule en $z = 1/n$, puis en multipliant par n , nous obtenons

$$n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 1 - \frac{1}{2n} + o \left(\frac{1}{n} \right).$$

Ainsi

$$v_n = -\frac{1}{2n} + o \left(\frac{1}{n} \right) \sim -\frac{1}{2n}.$$

Le réel demandé est donc $\alpha = -1/2 < 0$. La substitution consiste ici à évaluer un développement connu le long d'une suite tendant vers 0, puis à multiplier son reste par n .

1. b. La question 1. a donne $-v_n \sim 1/(2n)$, donc $-v_n$ est strictement positif à partir d'un certain rang. La série de Riemann

$$\sum_{n \geq 1} 1/n$$

diverge ; le critère d'équivalence pour les séries à termes positifs montre donc que

$$\sum_{n \geq 1} (-v_n)$$

diverge vers $+\infty$.

Plus explicitement, il existe $N \geq 1$ tel que $-v_n \geq 1/(4n)$ pour $n \geq N$. Pour $m \geq N$,

$$V_m = \sum_{n=1}^{N-1} v_n + \sum_{n=N}^m v_n \leq \sum_{n=1}^{N-1} v_n - \frac{1}{4} \sum_{n=N}^m \frac{1}{n} \rightarrow -\infty.$$

Ainsi la série de terme général v_n est divergente, et ses sommes partielles V_n tendent vers $-\infty$.

2. a. Pour $n \geq 1$, $M_n > 0$; les quotients et logarithmes sont donc définis. En utilisant $(n+1)! = (n+1)n!$,

$$\frac{M_{n+1}}{M_n} = \frac{(n+1)^{n+1}n!}{(n+1)!n^n} e^{-1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n e^{-1}.$$

En prenant le logarithme,

$$\ln \left(\frac{M_{n+1}}{M_n} \right) = n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - 1 = v_n.$$

2. b. La relation précédente s'écrit $v_k = \ln M_{k+1} - \ln M_k$. En sommant de $k = 1$ à $n - 1$, pour $n \geq 2$, les termes se télescopent :

$$\ln M_n - \ln M_1 = V_{n-1}.$$

Comme $M_1 = e^{-1}$, $\ln M_n = -1 + V_{n-1} \rightarrow -\infty$ par 1. b. Par la limite usuelle de l'exponentielle en $-\infty$,

$$M_n = e^{-1+V_{n-1}} \rightarrow 0.$$

Cette preuve établit la limite à partir des rapports successifs, sans utiliser d'équivalent de la factorielle.

Étude d'une famille de fonctions

1. Pour chaque entier $n \geq 1$, $f_n(x) = x^n e^{-x}/n!$ est continue et dérivable sur $[0, +\infty[$, avec dérivée à droite en 0. Pour $x > 0$,

$$f'_n(x) = \frac{x^{n-1}e^{-x}}{n!}(n-x).$$

Le facteur $x^{n-1}e^{-x}/n!$ est strictement positif. Donc f_n est strictement croissante sur $[0, n]$ et strictement décroissante sur $[n, +\infty[$. De plus, $f_n(0) = 0$ et $f_n(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow +\infty$, par croissances comparées.

Pour f_1 , on a $f'_1(0) = 1$, donc la tangente à l'origine a pour équation $y = x$. Son maximum est $f_1(1) = e^{-1}$.

x	0	$]0, 1[$	1	$]1, +\infty[$	$+\infty$
$f'_1(x)$	1	+	0	—	
$f_1(x)$	0	croissante	e^{-1}	décroissante	0

Pour $n \geq 2$, la dérivée à droite en 0 vaut 0, donc la tangente à l'origine est horizontale. Le sommet de la courbe est le point (n, M_n) , où

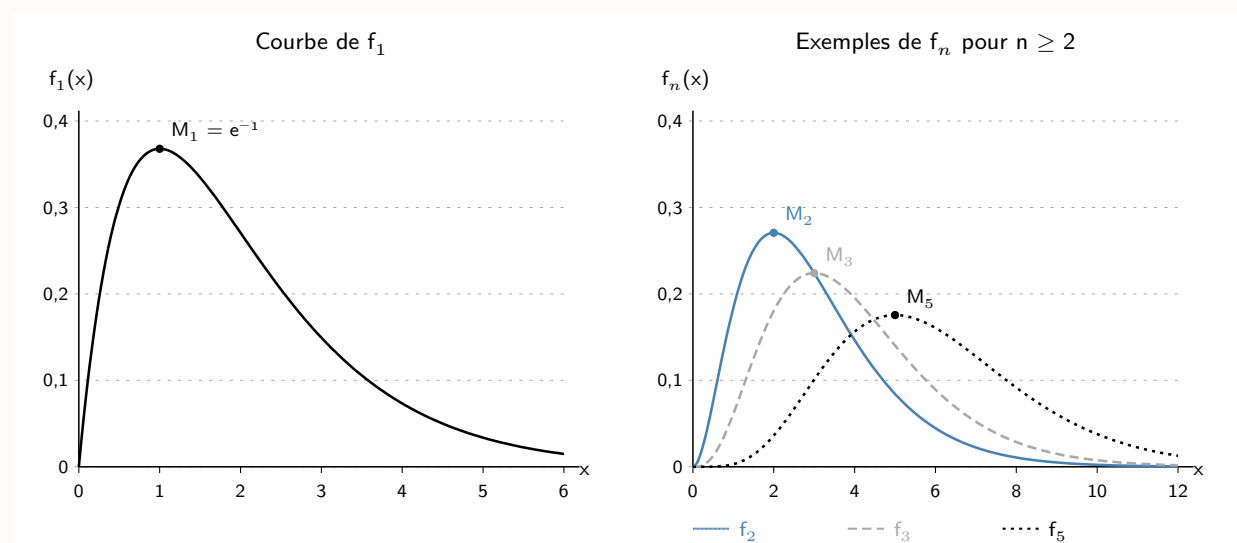
$$f_n(n) = \frac{n^n}{n!}e^{-n} = M_n.$$

x	0	$]0, n[$	n	$]n, +\infty[$	$+\infty$
$f'_n(x)$	0	+	0	—	
$f_n(x)$	0	croissante	M_n	décroissante	0

Toutes ces courbes restent strictement au-dessus de l'axe des abscisses pour $x > 0$, ont une tangente horizontale au sommet et admettent $y = 0$ pour asymptote en $+\infty$. Leur maximum est atteint en $x = n$, donc $\sup_{x \geq 0} f_n(x) = M_n$.

La figure ci-dessous représente f_1 à gauche et les exemples f_2, f_3, f_5 à droite, calculés à partir des formules exactes. Les points marqués sont les maxima. Les tableaux

précédents donnent les variations pour tout $n \geq 2$.



2. a. Sur le segment $[0, x]$, avec $x \geq 0$, une intégration par parties donne

$$F_{n+1}(x) = \int_0^x \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} e^{-t} dt = \left[-\frac{t^{n+1}}{(n+1)!} e^{-t} \right]_0^x + \int_0^x \frac{t^n}{n!} e^{-t} dt.$$

Le terme au bord inférieur est nul et celui au bord supérieur vaut $-f_{n+1}(x)$. Ainsi

$$F_{n+1}(x) = F_n(x) - f_{n+1}(x).$$

Calculons la valeur initiale par une intégration par parties sur $[0, x]$:

$$F_1(x) = \int_0^x t e^{-t} dt = [-t e^{-t}]_0^x + \int_0^x e^{-t} dt = 1 - (1+x)e^{-x}.$$

Elle correspond à la formule demandée pour $n = 1$. Si cette formule est vraie à l'ordre n , la relation précédente donne

$$F_{n+1}(x) = 1 - e^{-x} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} - e^{-x} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 1 - e^{-x} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!}.$$

Par récurrence, pour tout $n \geq 1$ et $x \geq 0$,

$$F_n(x) = 1 - e^{-x} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$

2. b. Fixons $n \geq 1$. Pour chaque $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $x^k e^{-x} \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow +\infty$. La somme comporte un nombre fini de termes, donc

$$F_n(x) = 1 - \sum_{k=0}^n \frac{x^k e^{-x}}{k!} \rightarrow 1.$$

Par définition d'une intégrale impropre, cette limite prouve la convergence de $\int_0^{+\infty} f_n(t) dt$, et sa valeur est 1. L'intégrande étant positive, l'intégrale converge aussi absolument.

Étude de la suite de terme général $u_n = F_n(n)$

1. Par Chasles et par la relation obtenue dans la partie précédente,

$$u_{n+1} - u_n = F_{n+1}(n+1) - F_n(n),$$

$$u_{n+1} - u_n = \int_n^{n+1} f_{n+1}(t) dt + F_{n+1}(n) - F_n(n) = \int_n^{n+1} f_{n+1}(t) dt - f_{n+1}(n).$$

La fonction f_{n+1} est strictement croissante sur $[0, n+1]$. Pour $t \in [n, n+1]$, $f_{n+1}(t) \geq f_{n+1}(n)$, avec inégalité stricte lorsque $t > n$. L'intégrande est continue, donc

$$\int_n^{n+1} f_{n+1}(t) dt > f_{n+1}(n)(n+1-n) = f_{n+1}(n).$$

Ainsi $u_{n+1} > u_n$: la suite est strictement croissante.

Par ailleurs, $f_n(t) > 0$ pour $t > 0$, donc $u_n = \int_0^n f_n(t) dt > 0$. Comme son intégrale totale sur $\mathbb{R}_+$ vaut 1 et que la queue après n est strictement positive, $u_n < 1$.

La suite est croissante et majorée ; le théorème de la limite monotone assure qu'elle converge vers un réel $L \leq 1$. Enfin $L \geq u_1 = 1 - 2e^{-1} > 0$, puisque $e > 2$. Donc $0 < L \leq 1$.

2. La formule de F_n donne

$$u_2 = F_2(2) = 1 - e^{-2} \left(1 + 2 + \frac{2^2}{2} \right) = 1 - 5e^{-2}.$$

$$u_2 \approx 0,3233235838, \text{ donc } 0,3 < u_2 < 0,4.$$

Pour justifier les bornes décimales par des encadrements exacts, utilisons la série exponentielle. La somme de ses termes jusqu'à l'ordre 5 en 2 vaut

$$\sum_{k=0}^5 \frac{2^k}{k!} = \frac{109}{15}.$$

Pour les termes de rang $k \geq 6$, le rapport du terme de rang $k+1$ au précédent vaut $2/(k+1) \leq 2/7$. Le premier terme de cette queue est $2^6/6! = 4/45$, donc, par comparaison avec une série géométrique,

$$0 < \sum_{k=6}^{+\infty} \frac{2^k}{k!} \leq \frac{4/45}{1 - 2/7} = \frac{28}{225}.$$

Ainsi $109/15 < e^2 \leq 1663/225$. En particulier,

$$\frac{50}{7} < e^2 < \frac{25}{3}.$$

Cela entraîne $0,3 < 1 - 5e^{-2} < 0,4$. La valeur approchée par défaut à 10^{-1} près de u_2 est donc 0,3.

La suite (u_n) est strictement croissante ; ainsi $L \geq u_3 > u_2 > 0,3$. Avec la majoration précédente, un nouvel encadrement est

$$0,3 < L \leq 1.$$

3. a. Sur $[0, 1]$, $2 - t \geq 1$, donc h est bien définie, continue et dérivable. Elle est positive ou nulle, puisque tous ses facteurs le sont.

La dérivée de $t/(2 - t)$ est $2/(2 - t)^2$. Par dérivation du produit,

$$h'(t) = e^{2-2t} \left(\frac{2}{(2-t)^2} - \frac{2t}{2-t} \right) = \frac{2e^{2-2t}}{(2-t)^2} (1 - 2t + t^2) = \frac{2e^{2-2t}(1-t)^2}{(2-t)^2} \geq 0.$$

Ainsi h est croissante sur $[0, 1]$. Comme $h(0) = 0$ et $h(1) = 1$, pour tout $t \in [0, 1]$, $0 \leq h(t) \leq 1$.

3. b. Fixons $n \geq 1$ et $x \in [0, n]$. Alors $2n - x \geq n > 0$, donc $f_n(2n - x) > 0$ et le quotient est défini. En remplaçant par les formules de f_n ,

$$\frac{f_n(x)}{f_n(2n - x)} = \left(\frac{x}{2n - x} \right)^n e^{2n-2x} = \left(\frac{x/n}{2 - x/n} e^{2-2x/n} \right)^n = \left(h\left(\frac{x}{n}\right) \right)^n.$$

Cette égalité reste vraie pour $x = 0$: les deux membres sont nuls, car $n \geq 1$. Pour $x = n$, les deux membres valent 1.

3. c. Pour $x \in [0, n]$, le réel x/n appartient à $[0, 1]$. D'après 3. a, $0 \leq h(x/n) \leq 1$, donc $0 \leq h(x/n)^n \leq 1$.

Par 3. b et puisque $f_n(2n - x) > 0$, on obtient

$$f_n(x) \leq f_n(2n - x).$$

3. d. En intégrant l'inégalité de 3. c sur le segment $[0, n]$, nous obtenons

$$u_n = \int_0^n f_n(t) dt \leq \int_0^n f_n(2n - t) dt.$$

Le changement de variable affine $s = 2n - t$ donne

$$\int_0^n f_n(2n - t) dt = \int_n^{2n} f_n(s) ds \leq \int_n^{+\infty} f_n(s) ds,$$

la dernière inégalité utilisant la positivité de f_n . Cela prouve les deux inégalités demandées.

Comme l'intégrale totale de f_n vaut 1,

$$\int_n^{+\infty} f_n(s) ds = 1 - u_n.$$

Ainsi $u_n \leq 1 - u_n$, donc $u_n \leq 1/2$. En passant à la limite dans cet encadrement, $L \leq 1/2$. En réunissant les résultats, $0, 3 < L \leq 1/2$.

Détermination de la limite de la suite (u_n) par un raisonnement probabiliste

Le préambule est précisé sous la forme d'une suite $(X_k)_{k \geq 1}$ de variables indépendantes de même loi de Poisson de paramètre 1, afin de définir les sommes Y_n pour tous les rangs sur un même cadre probabiliste.

1. Question adaptée au programme actuel — La famille indépendante du PDF est explicitée comme une suite, sans modification de la loi des sommes finies.

Pour chaque k , une variable de loi de Poisson de paramètre 1 a une espérance finie égale à 1 et une variance égale à 1. Par linéarité de l'espérance pour la somme finie,

$$E(Y_n) = \sum_{k=1}^n E(X_k) = n.$$

L'indépendance n'est pas nécessaire à cette égalité d'espérances; elle assure en revanche, par stabilité de la loi de Poisson par somme, que Y_n suit la loi de Poisson de paramètre n . Elle donne aussi $V(Y_n) = n$, utile à la normalisation finale.

2. Comme Y_n suit la loi de Poisson de paramètre n ,

$$P(Y_n \leq n) = \sum_{k=0}^n P(Y_n = k) = e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!}.$$

Or la formule de F_n au point n donne

$$u_n = 1 - e^{-n} \sum_{k=0}^n n^k / k!.$$

Donc

$$P(Y_n \leq n) = 1 - u_n.$$

3. Énonçons le théorème limite central. Si $(X_k)_{k \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi, d'espérance finie m et de variance finie strictement positive σ^2 , alors

$$\frac{\sum_{k=1}^n X_k - nm}{\sigma \sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

Cela signifie notamment que les fonctions de répartition de ces variables normalisées convergent, en chaque réel où la fonction de répartition de la loi limite est continue, vers celle de la loi normale centrée réduite.

Ici, les variables sont indépendantes et de même loi de Poisson de paramètre 1, avec $m = 1$ et $\sigma^2 = 1 > 0$. Toutes les hypothèses sont satisfaites. Ainsi

$$Z_n = \frac{Y_n - n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

La fonction de répartition de la loi normale est continue en 0 et, par symétrie de sa densité, sa valeur en 0 est $1/2$. Donc

$$P(Z_n \leq 0) \rightarrow \frac{1}{2}.$$

Puisque $\sqrt{n} > 0$, les événements $\{Z_n \leq 0\}$ et $\{Y_n \leq n\}$ sont exactement les mêmes. La question 2 donne alors $1 - u_n \rightarrow 1/2$, d'où

$$u_n \rightarrow \frac{1}{2}.$$

La limite L obtenue par monotonie vaut donc $L = 1/2$. Aucune approximation de seuil

ni opération sur une constante estimée n'est nécessaire : le seuil normalisé est exactement 0 à chaque rang.

Relevé des adaptations

- Premier problème, question 5. a : la première coordonnée de B , imprimée 1 dans le PDF, est rectifiée en b_1 , conformément à la définition des coordonnées de Q et à l'identité bilinéaire demandée.
- Deuxième problème, dernière partie, préambule et question 1 : les familles de variables indépendantes sont présentées comme une suite $(X_k)_{k \geq 1}$ afin de définir les sommes pour tous les rangs et d'appliquer directement le théorème limite central. Les lois des sommes finies sont conservées.
- Deuxième problème, étude d'une famille de fonctions, question 1 : les représentations graphiques demandées sont intégrées en SVG dans le corrigé et calculées à partir des formules exactes de f_1, f_2, f_3, f_5 .