



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques 1

1996

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Problème 1

Partie I

Pour tout entier naturel n , on définit le polynôme P_n par :

$$P_n = \sum_{0 \leq 2k \leq n} (-1)^k \binom{n+1}{2k+1} (1-X^2)^k X^{n-2k},$$

c'est-à-dire, si l'on note $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ la partie entière de $\frac{n}{2}$:

$$P_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n+1}{2k+1} (1-X^2)^k X^{n-2k}.$$

1. Vérifier que $P_0 = 1$, $P_1 = 2X$, $P_2 = 4X^2 - 1$. Calculer P_3 .
2. Étudier la parité du polynôme P_n suivant la parité de l'entier naturel n .
- 3.a. Montrer, pour tout entier naturel n et pour tout réel t :

$$\sin((n+1)t) = \sin t P_n(\cos t).$$

On pourra utiliser les formules d'addition trigonométriques et développer, avec le binôme, les puissances de la matrice réelle

$$R_t = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} = \cos t I_2 + \sin t J,$$

où $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et I_2 est la matrice identité d'ordre 2.

3.b. En déduire que, pour tout entier naturel n , le polynôme P_n vérifie la relation :

$$(n^2 + 2n)P_n - 3XP'_n - (X^2 - 1)P''_n = 0.$$

On pourra dériver deux fois dans la relation obtenue à la question 3.a.

4.a. Montrer, pour tout entier naturel n et pour tout réel t :

$$\sin((n+2)t) + \sin(nt) = 2 \cos t \sin((n+1)t).$$

4.b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$P_{n+1} - 2XP_n + P_{n-1} = 0.$$

4.c. Montrer, en utilisant la relation précédente, que P_n est un polynôme de degré n et déterminer le coefficient dominant a_n de P_n , c'est-à-dire le coefficient de X^n dans P_n .

Partie II

Dans cette partie, n désigne un entier naturel fixé supérieur ou égal à 2. On note E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n , et $\mathcal{B}_0$ la base $(1, X, \dots, X^n)$ de E . Soit Φ l'application qui, à tout polynôme P de E , associe le polynôme $\Phi(P)$ défini par :

$$\Phi(P) = 3XP' + (X^2 - 1)P''.$$

1. Vérifier que Φ est un endomorphisme de E .

2.a. Pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, déterminer $\Phi(X^k)$.

2.b. Déterminer une base de l'image de Φ .

2.c. Déterminer une base du noyau de Φ .

3. On considère les polynômes $P_0, P_1, \dots, P_n$ définis dans la première partie.

3.a. Vérifier que la famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base de E .

3.b. Pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, déterminer $\Phi(P_k)$. On pourra utiliser le résultat de la question 3.b de la première partie.

3.c. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de Φ .

3.d. Pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, déterminer l'ensemble S_k des polynômes P de E tels que $\Phi(P) = P_k$.

Problème 2

On considère l'application $f : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in [0; +\infty[$, par :

$$f(x) = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^x dt.$$

En particulier : $f(0) = \frac{\pi}{2}$.

Étude de f

1. Montrer que f est décroissante et est positive ou nulle.

2. Démontrer : $\forall x \in [1; +\infty[, \quad (x+1)f(x+1) = xf(x-1)$.

On pourra intégrer par parties $\int_0^{\pi/2} (\sin t)^{x+1} dt$, en remarquant $(\sin t)^{x+1} = (\sin t)^x \sin t$.

On note $g : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall x \in [0; +\infty[, \quad g(x) = (x+1)f(x+1)f(x).$$

3.a. Montrer que g est 1-périodique, c'est-à-dire : $\forall x \in [0; +\infty[, \quad g(x+1) = g(x)$.

3.b. En déduire : $\forall x \in [0; +\infty[, \forall n \in \mathbb{N}, \quad g(x+n) = g(x)$.

3.c. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad g(n) = \frac{\pi}{2}$.

4.a. Soit $x \in [0; 1]$.

4.a.i. En utilisant 1, montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq (x+n+1)f(n+1)f(n+2) \leq g(x+n) \leq (x+n+1)f(n)f(n+1).$$

4.a.ii. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \frac{\pi n + x + 1}{2(n+2)} \leq g(x) \leq \frac{\pi n + x + 1}{2(n+1)}.$$

4.a.iii. Démontrer : $g(x) = \frac{\pi}{2}$.

4.b. En déduire : $\forall x \in [0; +\infty[, \quad g(x) = \frac{\pi}{2}$.

5.a. Établir : $\forall x \in [1; +\infty[, \quad 0 \leq f(x) \leq \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$.

5.b. En déduire la limite de f en $+\infty$.

Convergence et somme de la série de terme général $(-1)^n f(n)$

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k f(k).$$

1.a. Montrer que les suites $(S_{2p})_{p \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2p+1})_{p \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.

On pourra utiliser les questions 1 et 5 de l'étude de f .

1.b. En déduire la nature de la série de terme général $(-1)^n f(n)$.

On considère l'application $\varphi : [0; \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$, par :

$$\varphi(t) = \frac{1}{1 + \sin t}.$$

2.a. Montrer :

$$\int_0^{\pi/2} \varphi(t) dt = \int_0^{\pi/2} \frac{du}{1 + \cos u} = \int_0^{\pi/2} \frac{du}{2 \cos^2(u/2)}.$$

2.b. Calculer : $\int_0^{\pi/2} \varphi(t) dt$.

3. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $D_n = \int_0^{\pi/2} \varphi(t) dt - S_n$.

3.a. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$D_n = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{1 + \sin t} - \sum_{k=0}^n (-1)^k \sin^k t \right) dt = (-1)^{n+1} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{n+1} t}{1 + \sin t} dt.$$

3.b. En déduire : $\lim_{n \rightarrow +\infty} D_n = 0$.

3.c. Quelle est la valeur de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n f(n)$$

?