



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques 1

1996

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Problème 1

Partie I

1. On applique la définition en listant les indices autorisés pour chaque petit entier.

Pour $n = 0$, seul $k = 0$ intervient : $P_0 = \binom{1}{1} = 1$.

Pour $n = 1$, seul $k = 0$ intervient : $P_1 = \binom{2}{1}X = 2X$.

Pour $n = 2$, les indices sont $k = 0$ et $k = 1$, donc :

$$P_2 = \binom{3}{1}X^2 - \binom{3}{3}(1 - X^2) = 3X^2 - (1 - X^2) = 4X^2 - 1.$$

Pour $n = 3$, les indices sont encore $k = 0$ et $k = 1$:

$$P_3 = \binom{4}{1}X^3 - \binom{4}{3}(1 - X^2)X = 4X^3 - 4X + 4X^3 = 8X^3 - 4X.$$

Ainsi les trois égalités annoncées sont vérifiées et $P_3 = 8X^3 - 4X$.

2. On remplace X par $-X$ dans la somme définissant P_n .

Le facteur $(1 - X^2)^k$ est inchangé. Le facteur X^{n-2k} est multiplié par $(-1)^{n-2k} = (-1)^n$, puisque $2k$ est pair. Ainsi :

$$P_n(-X) = (-1)^n \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n+1}{2k+1} (1 - X^2)^k X^{n-2k} = (-1)^n P_n(X).$$

Par conséquent, P_n est pair si n est pair, et impair si n est impair.

3.a. Question adaptée au programme actuel. L'indication est remplacée par une preuve avec des matrices réelles et le binôme de matrices qui commutent. La variable réelle de l'identité est t , conformément aux questions suivantes.

Fixons $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$. Posons :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$R_t = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} = \cos t I_2 + \sin t J.$$

Les formules d'addition du sinus et du cosinus donnent, pour tous réels a, b :

$$R_a R_b = \begin{pmatrix} \cos a \cos b - \sin a \sin b & -(\cos a \sin b + \sin a \cos b) \\ \sin a \cos b + \cos a \sin b & \cos a \cos b - \sin a \sin b \end{pmatrix} = R_{a+b}.$$

Par récurrence sur l'entier $m \geq 1$, on en déduit $R_t^m = R_{mt}$. En particulier, le coefficient de la deuxième ligne et de la première colonne de R_t^{n+1} vaut $\sin((n+1)t)$.

Un calcul direct donne $J^2 = -I_2$, d'où $J^{2k} = (-1)^k I_2$ et $J^{2k+1} = (-1)^k J$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Les matrices $\cos t I_2$ et $\sin t J$ commutent, donc le binôme matriciel s'applique :

$$R_t^{n+1} = \sum_{\ell=0}^{n+1} \binom{n+1}{\ell} (\cos t)^{n+1-\ell} (\sin t)^\ell J^\ell.$$

Dans le coefficient de ligne 2 et de colonne 1, les puissances paires de J donnent 0, et les puissances impaires J^{2k+1} donnent $(-1)^k$. Ainsi :

$$\sin((n+1)t) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n+1}{2k+1} (\cos t)^{n-2k} (\sin t)^{2k+1}.$$

En factorisant $\sin t$ et en utilisant $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t$:

$$\sin((n+1)t) = \sin t \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n+1}{2k+1} (1 - \cos^2 t)^k (\cos t)^{n-2k} = \sin t P_n(\cos t).$$

Cette preuve ne divise pas par $\sin t$: l'identité est donc valable aussi lorsque $\sin t = 0$.

3.b. On dérive deux fois l'identité de la question 3.a, puis on utilise le fait qu'un polynôme nul sur un intervalle est le polynôme nul.

Fixons $n \in \mathbb{N}$ et posons $y(t) = \sin t P_n(\cos t)$. Toutes les fonctions intervenant sont deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$. En notant $s = \sin t$ et $c = \cos t$ uniquement dans le calcul suivant :

$$y'(t) = cP_n'(c) - s^2P_n'(c),$$

$$y''(t) = -sP_n(c) - scP_n'(c) - 2scP_n'(c) + s^3P_n''(c),$$

$$\text{soit } y''(t) = -sP_n(c) - 3scP_n'(c) + s^3P_n''(c).$$

Par la question 3.a, $y(t) = \sin((n+1)t)$, donc $y''(t) = -(n+1)^2 s P_n(c)$. En identifiant ces deux expressions :

$$s((n^2 + 2n)P_n(c) - 3cP_n'(c) + (1 - c^2)P_n''(c)) = 0.$$

Pour $t \in]0; \pi[$, $s > 0$, donc on peut diviser par s . Le cosinus parcourt alors tout l'intervalle $] -1; 1[$. Le polynôme :

$$Q(X) = (n^2 + 2n)P_n(X) - 3XP_n'(X) + (1 - X^2)P_n''(X)$$

s'annule donc en chaque réel de $] -1; 1[$. Un polynôme non nul possède un nombre fini de racines ; ainsi Q est nul. On a donc l'identité polynomiale :

$$(n^2 + 2n)P_n - 3XP_n' - (X^2 - 1)P_n'' = 0.$$

La restriction à $]0; \pi[$ permet de justifier la division ; l'identité polynomiale obtenue est ensuite valable pour toute valeur réelle de X .

4.a. On applique les formules d'addition autour de l'angle $(n + 1)t$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\sin((n + 2)t) = \sin((n + 1)t) \cos t + \cos((n + 1)t) \sin t,$$

$$\sin(nt) = \sin((n + 1)t) \cos t - \cos((n + 1)t) \sin t.$$

En ajoutant, les derniers termes se compensent, donc :

$$\sin((n + 2)t) + \sin(nt) = 2 \cos t \sin((n + 1)t).$$

La formule reste valable pour $n = 0$.

4.b. On remplace chaque sinus multiple par l'expression polynomiale de la question 3.a.

Pour $n \geq 1$ et $t \in \mathbb{R}$, la question 4.a donne :

$$\sin t P_{n+1}(\cos t) + \sin t P_{n-1}(\cos t) = 2 \cos t \sin t P_n(\cos t).$$

Sur $]0; \pi[$, $\sin t \neq 0$. Après division, le polynôme $P_{n+1} - 2XP_n + P_{n-1}$ s'annule pour tout $X \in]-1; 1[$, puisque $X = \cos t$ parcourt cet intervalle.

Comme à la question 3.b, il s'agit donc du polynôme nul. Ainsi, pour tout entier $n \geq 1$:

$$P_{n+1} = 2XP_n - P_{n-1}.$$

4.c. Méthode 1 — Récurrence demandée par l'énoncé

Les cas initiaux sont $P_0 = 1$ et $P_1 = 2X$, de degrés 0 et 1, avec coefficients dominants $a_0 = 1$ et $a_1 = 2$.

Supposons, pour un entier $n \geq 1$, que P_n et P_{n-1} soient de degrés respectifs n et $n - 1$. Dans la relation $P_{n+1} = 2XP_n - P_{n-1}$, le premier terme a degré $n + 1$ et coefficient dominant $2a_n$. Le second a degré $n - 1$, donc ne peut modifier le coefficient de X^{n+1} .

Ainsi P_{n+1} a degré $n + 1$ et $a_{n+1} = 2a_n$. La récurrence établit $\deg(P_n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et, à partir de $a_0 = 1$:

$$a_n = 2^n.$$

Méthode 2 — Lecture du coefficient dans la définition explicite

Dans la somme définissant P_n , chaque terme a degré au plus n . Le coefficient de X^{2k} dans $(1 - X^2)^k$ vaut $(-1)^k$. Le coefficient de X^n dans le terme d'indice k est donc :

$$(-1)^k \binom{n+1}{2k+1} (-1)^k = \binom{n+1}{2k+1}.$$

Par conséquent, le coefficient de X^n dans P_n est la somme des coefficients binomiaux d'indice impair de la ligne $n + 1$:

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n+1}{2k+1}.$$

Le binôme appliqué à $(1 + 1)^{n+1}$ et $(1 - 1)^{n+1}$ donne, puisque $n + 1 \geq 1$:

$$2^{n+1} = \sum_{\ell=0}^{n+1} \binom{n+1}{\ell}$$

et

$$0 = \sum_{\ell=0}^{n+1} (-1)^\ell \binom{n+1}{\ell}.$$

En soustrayant la seconde égalité de la première, puis en divisant par 2, la somme des termes impairs vaut 2^n . Ce coefficient est non nul ; ainsi P_n a exactement degré n et coefficient dominant 2^n .

La première méthode utilise la relation de récurrence imposée ; la seconde explique le coefficient dominant à partir de la somme binomiale initiale.

Partie II

1. On vérifie que les images restent dans E et que l'application est linéaire.

Si P a degré $m \geq 2$, alors XP' et $(X^2 - 1)P''$ ont degré au plus m , donc au plus n . Si P est de degré au plus 1, $P'' = 0$ et XP' a degré au plus 1. Le polynôme nul a également une image nulle. Ainsi, dans tous les cas, $\Phi(P) \in E$.

Pour $P, Q \in E$ et $a, b \in \mathbb{R}$, la linéarité de la dérivation donne :

$$\Phi(aP + bQ) = 3X(aP' + bQ') + (X^2 - 1)(aP'' + bQ'') = a\Phi(P) + b\Phi(Q).$$

Donc Φ est une application linéaire de E dans E , c'est-à-dire un endomorphisme de E .

2.a. On distingue les petits indices pour éviter d'écrire des puissances négatives inutiles.

Pour $k = 0$, $\Phi(1) = 0$. Pour $k = 1$, $\Phi(X) = 3X$.

Pour $2 \leq k \leq n$, les dérivées sont $(X^k)' = kX^{k-1}$ et $(X^k)'' = k(k-1)X^{k-2}$. Ainsi :

$$\Phi(X^k) = 3kX^k + k(k-1)(X^2 - 1)X^{k-2} = k(k+2)X^k - k(k-1)X^{k-2}.$$

Les images de tous les monômes de la base $\mathcal{B}_0$ sont donc déterminées.

2.b. On utilise les images de la base canonique comme famille génératrice, puis leurs degrés pour établir la liberté.

Posons $Q_1 = 3X$ et, pour $2 \leq k \leq n$, $Q_k = k(k+2)X^k - k(k-1)X^{k-2}$. D'après 2.a, $Q_k = \Phi(X^k)$ pour $1 \leq k \leq n$, et $\Phi(1) = 0$.

Toute image de Φ est une combinaison linéaire des images des monômes de $\mathcal{B}_0$, donc :

$$\text{Im } \Phi = \text{Vect}(Q_1, \dots, Q_n).$$

Pour chaque $k \geq 1$, Q_k a degré k et coefficient dominant $k(k+2) \neq 0$. Si une combinaison

$$\sum_{k=1}^n c_k Q_k$$

était nulle avec au moins un coefficient non nul, notons m le plus grand indice tel que $c_m \neq 0$. Le coefficient de X^m dans cette combinaison serait $c_m m(m+2) \neq 0$, une contradiction.

La famille $(Q_1, \dots, Q_n)$ est donc libre et génératrice de l'image : c'est une base de $\text{Im } \Phi$. En particulier, $\text{rg}(\Phi) = n$.

2.c. Méthode 1 — Théorème du rang

L'espace E a dimension $n+1$, et la question 2.b donne $\text{rg}(\Phi) = n$. Le théorème du rang implique :

$$\dim(\text{Ker } \Phi) = (n+1) - n = 1.$$

Comme $\Phi(1) = 0$ et que le polynôme 1 est non nul, il constitue une base du noyau. Ainsi $\text{Ker } \Phi = \text{Vect}(1)$: le noyau est l'ensemble des polynômes constants.

Méthode 2 — Coefficient dominant

Soit un polynôme non constant P de degré $m \geq 1$ et de coefficient dominant $a_m \neq 0$. La formule de 2.a montre que le coefficient de X^m dans $\Phi(P)$ est $a_m m(m+2)$: les images des monômes de degré inférieur ne peuvent contribuer à ce coefficient.

Ce nombre est non nul, donc $\Phi(P) \neq 0$. Aucun polynôme non constant n'appartient au noyau. Réciproquement, les dérivées d'un polynôme constant sont nulles, donc tous les polynômes constants appartiennent au noyau.

On retrouve $\text{Ker } \Phi = \text{Vect}(1)$. La première méthode exploite le rang déjà calculé ; la seconde précise que Φ conserve le degré de tout polynôme non constant.

3. On utilise dans les quatre sous-questions les polynômes étudiés dans la partie I.

3.a. On montre la liberté grâce aux degrés échelonnés, puis on compare le cardinal à la dimension de E .

Par I.4.c, P_k a degré k et coefficient dominant $2^k \neq 0$, pour chaque $0 \leq k \leq n$. Les polynômes appartiennent donc tous à E .

Si

$$\sum_{k=0}^n c_k P_k = 0$$

avec un coefficient non nul, prenons le plus grand indice m tel que $c_m \neq 0$. Le coefficient de X^m du membre de gauche vaut $c_m 2^m \neq 0$, puisque tous les autres termes ont un degré inférieur. Cela contredit la nullité de la combinaison.

La famille est libre et possède $n + 1$ éléments dans l'espace E de dimension $n + 1$. Ainsi $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base de E .

3.b. On réécrit l'équation polynomiale de I.3.b.

Pour chaque $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, cette équation donne :

$$(k^2 + 2k)P_k = 3XP'_k + (X^2 - 1)P''_k = \Phi(P_k).$$

Ainsi $\Phi(P_k) = k(k + 2)P_k$ pour tout k . En particulier, $\Phi(P_0) = 0$, en accord avec le noyau calculé précédemment.

3.c. On utilise la base de vecteurs propres obtenue aux questions 3.a–3.b et on vérifie qu'il n'y a pas d'autre valeur propre.

Posons $\lambda_k = k(k + 2)$ pour $0 \leq k \leq n$. Les polynômes P_k sont non nuls et vérifient $\Phi(P_k) = \lambda_k P_k$, donc chaque λ_k est valeur propre.

Ces nombres sont deux à deux distincts : si $0 \leq j < k \leq n$, alors :

$$\lambda_k - \lambda_j = (k - j)(k + j + 2) > 0.$$

Soit maintenant $\lambda \in \mathbb{R}$ et un polynôme

$$P = \sum_{j=0}^n c_j P_j.$$

Par linéarité :

$$\Phi(P) - \lambda P = \sum_{j=0}^n (\lambda_j - \lambda) c_j P_j.$$

Comme la famille des P_j est une base, cette expression est nulle si et seulement si $(\lambda_j - \lambda)c_j = 0$ pour chaque j .

Si λ ne figure pas parmi les λ_j , tous les coefficients c_j sont nuls : aucun vecteur propre non nul n'existe. Si $\lambda = \lambda_k$, la distinction des valeurs propres impose $c_j = 0$ pour $j \neq k$, tandis que c_k est libre.

Ainsi :

$$\text{Sp}(\Phi) = \{k(k+2) : 0 \leq k \leq n\} \text{ et } \text{Ker}(\Phi - \lambda_k \text{Id}_E) = \text{Vect}(P_k).$$

Chaque espace propre a dimension 1. Dans la base $(P_0, \dots, P_n)$, la matrice de Φ est diagonale, avec coefficients diagonaux $0, 3, 8, \dots, n(n+2)$.

3.d. Méthode 1 — Résolution dans la base des P_j

Écrivons

$$P = \sum_{j=0}^n c_j P_j.$$

La question 3.b donne

$$\Phi(P) = \sum_{j=0}^n j(j+2) c_j P_j.$$

Pour $k = 0$, l'équation $\Phi(P) = P_0$ est impossible : la coordonnée suivant P_0 du membre de gauche est toujours 0, tandis que celle du membre de droite vaut 1. Ainsi $S_0 = \emptyset$.

Pour $1 \leq k \leq n$, l'égalité $\Phi(P) = P_k$ impose $c_k = \frac{1}{k(k+2)}$ et $c_j = 0$ pour tous les indices $j \geq 1$ différents de k . Le coefficient c_0 reste arbitraire, puisque $\lambda_0 = 0$.

Comme $P_0 = 1$, on obtient :

$$S_k = \left\{ \frac{P_k}{k(k+2)} + c : c \in \mathbb{R} \right\} \text{ pour } 1 \leq k \leq n.$$

Méthode 2 — Une solution particulière et le noyau

Pour $k \geq 1$, la question 3.b montre que $R_k = \frac{P_k}{k(k+2)}$ satisfait $\Phi(R_k) = P_k$. Par linéarité, un polynôme P vérifie la même équation si et seulement si :

$$\Phi(P - R_k) = 0.$$

La question 2.c donne $P - R_k \in \text{Vect}(1)$, donc $P = R_k + c$ pour un réel c . Cela retrouve exactement l'ensemble S_k .

Pour $k = 0$, on peut aussi utiliser le degré : si P est constant, $\Phi(P) = 0 \neq 1$; si P est non constant, la preuve de 2.c montre que $\Phi(P)$ a le même degré positif que P , donc ne peut être le polynôme constant 1. Ainsi S_0 est vide.

La première méthode résout un système diagonal en coordonnées ; la seconde illustre le principe selon lequel les solutions d'une équation linéaire non homogène, lorsqu'elles existent, s'obtiennent en ajoutant le noyau à une solution particulière.

Problème 2

Rectification typographique du préambule : l'intégrande est $(\sin t)^x$. Le caractère parasite placé devant t dans le PDF est supprimé, en cohérence avec toutes les questions du problème.

Pour $x > 0$, la fonction $t \mapsto (\sin t)^x$ est continue sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ en prenant la valeur 0 en

$t = 0$. Pour $x = 0$, on prend l'intégrande égal à 1, conformément à $f(0) = \frac{\pi}{2}$. Toutes les intégrales définissant f existent sur ce segment.

Étude de f

1. On compare les puissances d'un nombre compris entre 0 et 1.

Pour $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$, $0 \leq \sin t \leq 1$, donc $(\sin t)^x \geq 0$ pour $x \geq 0$, avec la convention indiquée pour $x = 0$. L'intégrale d'une fonction positive ou nulle est positive ou nulle : $f(x) \geq 0$.

Si $0 \leq x \leq y$, alors, pour $0 < t \leq \frac{\pi}{2}$:

$$(\sin t)^y = (\sin t)^x (\sin t)^{y-x} \leq (\sin t)^x.$$

À $t = 0$, cette comparaison reste valable avec les valeurs retenues pour l'intégrande. Par croissance de l'intégrale, $f(y) \leq f(x)$. Ainsi f est décroissante et positive ou nulle sur $[0; +\infty[$.

2. On applique l'intégration par parties suggérée et on justifie la borne 0.

Fixons $x \geq 1$. Pour $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$, les fonctions $t \mapsto (\sin t)^x$ et $t \mapsto -\cos t$ sont de classe C^1 sur $[\varepsilon; \frac{\pi}{2}]$. Leur intégration par parties donne :

$$\int_{\varepsilon}^{\pi/2} (\sin t)^{x+1} dt = [-(\sin t)^x \cos t]_{\varepsilon}^{\pi/2} + x \int_{\varepsilon}^{\pi/2} (\sin t)^{x-1} \cos^2 t dt.$$

Le terme de bord vaut $(\sin \varepsilon)^x \cos \varepsilon$ et tend vers 0 lorsque $\varepsilon \rightarrow 0^+$, car $x \geq 1$. L'intégrande de la dernière intégrale est borné sur $]0; \frac{\pi}{2}]$ par 1 puisque $x - 1 \geq 0$. Pour $x = 1$, il se prolonge en 0 par la valeur 1 ; pour $x > 1$, par la valeur 0. On peut donc passer à la limite en ε et obtenir :

$$f(x+1) = x \int_0^{\pi/2} (\sin t)^{x-1} \cos^2 t dt.$$

Comme $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$, la linéarité sur le segment donne :

$$f(x+1) = x \left(\int_0^{\pi/2} (\sin t)^{x-1} dt - \int_0^{\pi/2} (\sin t)^{x+1} dt \right) = x(f(x-1) - f(x+1)).$$

En regroupant, $(x+1)f(x+1) = xf(x-1)$ pour tout $x \geq 1$.

3.a. On applique la relation précédente avec le paramètre $x+1$, qui est bien supérieur ou égal à 1.

Pour $x \geq 0$, la question 2 donne :

$$(x+2)f(x+2) = (x+1)f(x).$$

En multipliant par $f(x+1)$:

$$g(x+1) = (x+2)f(x+2)f(x+1) = (x+1)f(x)f(x+1) = g(x).$$

Ainsi g est 1-périodique sur son domaine $[0; +\infty[$.

3.b. On procède par récurrence sur l'entier n , avec $x \geq 0$ fixé.

Pour $n=0$, $g(x+0) = g(x)$. Supposons $g(x+n) = g(x)$ pour un entier $n \geq 0$. Comme $x+n \geq 0$, la question 3.a donne :

$$g(x+n+1) = g(x+n) = g(x).$$

Par récurrence, $g(x+n) = g(x)$ pour tout $x \geq 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$.

3.c. On calcule $g(0)$ et on utilise la périodicité.

$$f(1) = \int_0^{\pi/2} \sin t dt = [-\cos t]_0^{\pi/2} = 1.$$

Avec $f(0) = \frac{\pi}{2}$, on obtient $g(0) = f(1)f(0) = \frac{\pi}{2}$. La question 3.b appliquée à $x=0$ donne donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad g(n) = \frac{\pi}{2}.$$

4.a. Dans les trois sous-questions, on fixe $x \in [0; 1]$ et on fait varier $n \in \mathbb{N}$.

4.a.i. On encadre séparément les deux facteurs de $g(x+n)$ grâce à la décroissance de f .

Puisque $n \leq n+x \leq n+1$ et $n+1 \leq n+x+1 \leq n+2$, la question 1 donne :

$$f(n+1) \leq f(n+x) \leq f(n),$$

$$f(n+2) \leq f(n+x+1) \leq f(n+1).$$

Toutes ces valeurs sont positives ou nulles. On peut donc multiplier les deux encadrements, puis multiplier par $n+x+1 > 0$. On obtient :

$$\begin{aligned} 0 &\leq (n+x+1)f(n+1)f(n+2) \leq (n+x+1)f(n+x)f(n+x+1) \\ &\leq (n+x+1)f(n)f(n+1). \end{aligned}$$

Le membre central est $g(x+n)$, ce qui donne l'inégalité demandée.

4.a.ii. On remplace les deux produits aux indices entiers par les valeurs de g et on utilise la périodicité.

La question 3.c donne :

$$(n+2)f(n+2)f(n+1) = g(n+1) = \frac{\pi}{2},$$

$$(n+1)f(n+1)f(n) = g(n) = \frac{\pi}{2}.$$

Les entiers $n+1$ et $n+2$ sont strictement positifs, donc :

$$f(n+1)f(n+2) = \frac{\pi}{2(n+2)} \text{ et } f(n)f(n+1) = \frac{\pi}{2(n+1)}.$$

D'autre part, $g(x+n) = g(x)$ par la question 3.b. En reportant dans 4.a.i :

$$0 \leq \frac{\pi}{2} \frac{n+x+1}{n+2} \leq g(x) \leq \frac{\pi}{2} \frac{n+x+1}{n+1}.$$

4.a.iii. On fait tendre n vers $+\infty$ avec $x \in [0; 1]$ fixé.

Les quotients $\frac{n+x+1}{n+2}$ et $\frac{n+x+1}{n+1}$ tendent tous deux vers 1. L'encadrement de 4.a.ii donne donc :

$$\frac{\pi}{2} \leq g(x) \leq \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi $g(x) = \frac{\pi}{2}$ pour tout $x \in [0; 1]$.

4.b. On ramène tout réel du domaine à sa partie fractionnaire.

Soit $x \geq 0$. Posons $m = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{N}$ et $r = x - m \in [0; 1[$. Par la question 3.b :

$$g(x) = g(r + m) = g(r).$$

Comme $r \in [0; 1]$, la question 4.a.iii donne $g(r) = \frac{\pi}{2}$. Ainsi $g(x) = \frac{\pi}{2}$ pour tout $x \geq 0$.

5.a. On utilise la valeur de $g(x - 1)$ et la décroissance de f .

Pour $x \geq 1$, $x - 1 \geq 0$, donc la question 4.b donne :

$$g(x - 1) = x f(x) f(x - 1) = \frac{\pi}{2}.$$

Par la question 1, $0 \leq f(x) \leq f(x - 1)$. En multipliant par $x f(x) \geq 0$, on obtient :

$$x f(x)^2 \leq x f(x) f(x - 1) = \frac{\pi}{2}.$$

Comme $x > 0$, $f(x)^2 \leq \frac{\pi}{2x}$. La positivité de f permet de prendre les racines :

$$0 \leq f(x) \leq \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \text{ pour tout } x \geq 1.$$

5.b. On applique le théorème d'encadrement.

Le majorant $\sqrt{\frac{\pi}{2x}}$ tend vers 0 lorsque $x \rightarrow +\infty$. L'encadrement de la question 5.a donne donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Convergence et somme de la série de terme général $(-1)^n f(n)$

1.a. On étudie les variations des deux suites de sommes partielles et leur différence.

Pour $p \in \mathbb{N}$:

$$S_{2p+2} - S_{2p} = -f(2p+1) + f(2p+2) \leq 0,$$

car f est décroissante. La suite (S_{2p}) est donc décroissante.

De même :

$$S_{2p+3} - S_{2p+1} = f(2p+2) - f(2p+3) \geq 0.$$

La suite (S_{2p+1}) est donc croissante. Enfin :

$$S_{2p} - S_{2p+1} = f(2p+1) \geq 0 \text{ et } f(2p+1) \rightarrow 0,$$

par la limite de f à l'infini établie précédemment. Ainsi les suites sont ordonnées, monotones en sens contraires et leur différence tend vers 0 : elles sont adjacentes. Le théorème des suites adjacentes assure qu'elles convergent vers une même limite finie.

1.b. On reconstitue la convergence de la suite complète des sommes partielles à partir de ses sous-suites paires et impaires.

Notons L leur limite commune. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe p_0 tel que, pour $p \geq p_0$, $|S_{2p} - L| < \varepsilon$ et $|S_{2p+1} - L| < \varepsilon$. Tout entier assez grand est de l'une de ces deux formes avec $p \geq p_0$, donc $S_n \rightarrow L$.

Ainsi la série

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^n f(n)$$

converge.

On peut préciser qu'elle ne converge pas absolument. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de $g(n)$ donne :

$$\frac{\pi}{2} = (n+1)f(n+1)f(n) \leq (n+1)f(n)^2,$$

puisque $f(n+1) \leq f(n)$ et que les deux facteurs sont positifs ou nuls. Ainsi :

$$f(n) \geq \sqrt{\frac{\pi}{2(n+1)}}.$$

La série de terme général $\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ diverge : après le changement d'indice $m = n+1$,

c'est une série de Riemann d'exposant $\frac{1}{2} \leq 1$. Par comparaison de séries à termes positifs,

$$\sum f(n)$$

diverge. La série proposée est donc convergente, mais non absolument convergente.

2.a. On effectue un changement de variable affine, puis on établit la formule trigonométrique utilisée.

La fonction $\varphi(t) = \frac{1}{1 + \sin t}$ est continue sur $[0; \frac{\pi}{2}]$, car $1 + \sin t \geq 1$. Posons $u = \frac{\pi}{2} - t$, donc $dt = -du$. Lorsque t varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$, u varie de $\frac{\pi}{2}$ à 0.

La formule d'addition du sinus donne $\sin(\frac{\pi}{2} - u) = \cos u$. Ainsi :

$$\int_0^{\pi/2} \varphi(t) dt = \int_0^{\pi/2} \frac{du}{1 + \cos u}.$$

Pour établir le second dénominateur, la formule d'addition du cosinus donne :

$$\cos u = \cos^2(u/2) - \sin^2(u/2) = 2 \cos^2(u/2) - 1.$$

Donc $1 + \cos u = 2 \cos^2(u/2)$. Ce dénominateur est strictement positif pour $u \in [0; \frac{\pi}{2}]$, car $u/2 \in [0; \frac{\pi}{4}]$. On obtient bien :

$$\int_0^{\pi/2} \varphi(t) dt = \int_0^{\pi/2} \frac{du}{1 + \cos u} = \int_0^{\pi/2} \frac{du}{2 \cos^2(u/2)}.$$

2.b. Méthode 1 — Primitive après la transformation de 2.a

Sur $[0; \frac{\pi}{2}]$, la fonction $u \mapsto \tan(u/2)$ est dérivable et :

$$\frac{d}{du} \tan(u/2) = \frac{1}{2 \cos^2(u/2)}.$$

Grâce à 2.a, il vient :

$$\int_0^{\pi/2} \varphi(t) dt = [\tan(u/2)]_0^{\pi/2} = \tan \frac{\pi}{4} - \tan 0 = 1.$$

Méthode 2 — Une primitive dans la variable initiale

Pour $0 \leq t < \frac{\pi}{2}$, $\cos t > 0$ et l'identité $1 - \sin^2 t = \cos^2 t$ donne :

$$\frac{1}{1 + \sin t} = \frac{1 - \sin t}{\cos^2 t}.$$

La dérivée de $\tan t$ vaut $\frac{1}{\cos^2 t}$, et celle de $\frac{1}{\cos t}$ vaut $\frac{\sin t}{\cos^2 t}$. Une primitive sur $[0; \frac{\pi}{2}[$ est donc $\tan t - \frac{1}{\cos t}$.

Pour $b < \frac{\pi}{2}$:

$$\int_0^b \varphi(t) dt = \tan b - \frac{1}{\cos b} + 1.$$

On ne sépare pas les deux termes à la borne supérieure, où chacun devient non borné.

On réécrit leur différence :

$$\tan b - \frac{1}{\cos b} = \frac{\sin b - 1}{\cos b} = -\frac{\cos b}{1 + \sin b} \rightarrow 0 \text{ lorsque } b \rightarrow \frac{\pi}{2}^-.$$

Comme φ est continue sur le segment fermé, le passage à la limite dans l'intégrale donne sa valeur 1. La première méthode exploite l'angle moitié fourni par 2.a ; la seconde montre comment simplifier une primitive dont deux termes se compensent à une borne.

3. Pour les trois sous-questions, on pose $D_n = \int_0^{\pi/2} \varphi(t) dt - S_n$.

3.a. On utilise seulement la linéarité d'une somme finie et la formule de la somme géométrique finie.

Pour $n \in \mathbb{N}$, la définition de $f(k)$ donne :

$$S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^{\pi/2} \sin^k t dt = \int_0^{\pi/2} \sum_{k=0}^n (-1)^k \sin^k t dt.$$

Tous les intégrandes sont continus avec la convention $\sin^0 t = 1$. La somme étant finie, la linéarité s'applique sans hypothèse de convergence de série. On obtient donc la première égalité :

$$D_n = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{1 + \sin t} - \sum_{k=0}^n (-1)^k \sin^k t \right) dt.$$

Pour $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$, posons $q = -\sin t$. Alors $q \in [-1; 0]$, donc $q \neq 1$. La formule de la somme géométrique finie donne :

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \sin^k t = \frac{1 - (-\sin t)^{n+1}}{1 + \sin t}.$$

En soustrayant cette expression de $\frac{1}{1 + \sin t}$:

$$\frac{1}{1 + \sin t} - \sum_{k=0}^n (-1)^k \sin^k t = \frac{(-\sin t)^{n+1}}{1 + \sin t} = (-1)^{n+1} \frac{\sin^{n+1} t}{1 + \sin t}.$$

L'intégration sur le segment donne :

$$D_n = (-1)^{n+1} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{n+1} t}{1 + \sin t} dt.$$

La formule est valable aussi en $t = \frac{\pi}{2}$, où $q = -1$, car il s'agit d'une somme géométrique finie.

3.b. On majore le reste par une valeur de f qui tend vers 0.

L'intégrande de la dernière expression de 3.a est positif ou nul. Comme $1 + \sin t \geq 1$:

$$|D_n| = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{n+1} t}{1 + \sin t} dt \leq \int_0^{\pi/2} \sin^{n+1} t dt = f(n+1).$$

D'après la limite de f établie dans l'étude précédente, $f(n+1) \rightarrow 0$. Par encadrement, $D_n \rightarrow 0$.

3.c. On passe à la limite dans l'égalité entre l'intégrale, la somme partielle et le reste.

La question 2.b donne $\int_0^{\pi/2} \varphi(t) dt = 1$. Par définition de D_n , $S_n = 1 - D_n$. Comme $D_n \rightarrow 0$ par 3.b, $S_n \rightarrow 1$.

La série converge donc vers :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n f(n) = 1.$$

Le passage à la limite est justifié par la majoration explicite du reste ; aucun échange entre une série infinie et une intégrale n'a été utilisé.

Relevé des adaptations

Problème 1, I.3.a : l'indication de méthode initiale est remplacée par une indication utilisant les matrices réelles R_t et le binôme matriciel. L'identité demandée est conservée intégralement. Le caractère parasite accolé à la variable réelle t est également supprimé.

Problème 2, définition de f : le caractère parasite placé devant t dans l'intégrande est supprimé. La formule rectifiée est $f(x) = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^x dt$, conformément aux intégrales utilisées dans la suite du sujet.

Problème 2, convergence et somme, 1.a : le renvoi aux questions antérieures est écrit explicitement comme un renvoi aux questions 1 et 5 de l'étude de f , pour lever l'ambiguïté des numérotations répétées.