



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques 1

1995

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

PROBLÈME 1

Dans ce problème, n désigne un entier supérieur ou égal à 3.

On définit la matrice $A_n = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, carrée d'ordre n à coefficients réels, de la manière suivante :

$$\begin{cases} a_{i,i+1} = i & \text{si } 1 \leq i \leq n-1, \\ a_{i,i-1} = n+1-i & \text{si } 2 \leq i \leq n, \\ a_{i,j} = 0 & \text{si } j \neq i-1 \text{ et } j \neq i+1. \end{cases}$$

Ainsi :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ n-1 & 0 & 2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & n-2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & n-2 & 0 \\ \vdots & & \ddots & 2 & 0 & n-1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. On suppose, dans cette question seulement, $n = 3$: $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

1. (a) Déterminer les valeurs propres de A_3 .

1. (b) La matrice A_3 est-elle diagonalisable ?

1. (c) La matrice A_3 est-elle inversible ?
2. Dans toute la suite du problème, E désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $n - 1$.

On note $\mathcal{B}$ la base canonique de E : $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^{n-1})$.

On note u l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est A_n .

2. (a) Calculer $u(1)$, $u(X^{n-1})$, et, pour tout entier j tel que $1 \leq j \leq n - 2$, $u(X^j)$.

2. (b) Démontrer que, pour tout élément $P(X)$ de E :

$$u(P(X)) = (n - 1)XP(X) - (X^2 - 1)P'(X),$$

où $P'(X)$ désigne la dérivée de $P(X)$.

3. Dans cette question, λ désigne un nombre réel. On suppose que λ est valeur propre de l'endomorphisme u , et on considère un vecteur propre $P(X)$ associé à cette valeur propre.

3. (a) On suppose : $\lambda \neq n - 1$. Montrer que 1 est racine de $P(X)$.

3. (b) On suppose : $\lambda \neq 1 - n$. Montrer que -1 est racine de $P(X)$.

3. (c) On suppose : $\lambda = n - 1$.

Montrer qu'il existe un polynôme $T(X)$ de E et un entier naturel non nul s tels que $P(X) = (X + 1)^s T(X)$ et $T(-1) \neq 0$.

Montrer que : $s = n - 1$.

Montrer que $T(X)$ est un polynôme constant et non nul.

3. (d) On suppose : $\lambda = 1 - n$.

Montrer qu'il existe un réel non nul a tel que $P(X) = a(X-1)^{n-1}$.

3. (e) On suppose : $\lambda \neq 1 - n$ et $\lambda \neq n - 1$.

Montrer qu'il existe un polynôme $T(X)$ de E et deux entiers naturels non nuls r et s tels que $P(X) = (X-1)^r(X+1)^sT(X)$, $T(-1) \neq 0$ et $T(1) \neq 0$.

Montrer que :

$$\begin{cases} 1 \leq r \leq n-2, \\ s = n-1-r, \\ \lambda = n-1-2r. \end{cases}$$

Montrer que $T(X)$ est constant et non nul.

4. (a) Pour tout entier naturel r tel que $0 \leq r \leq n-1$, calculer $u[(X-1)^r(X+1)^{n-1-r}]$.

4. (b) La matrice A_n est-elle diagonalisable ?

Démontrer que $\mathcal{C} = ((X-1)^r(X+1)^{n-1-r})_{0 \leq r \leq n-1}$ est une base de E .

5. La matrice A_n est-elle inversible ?

PROBLÈME 2

Le but du problème est l'étude de l'application $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(0) = 1$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}.$$

On note r l'application de $] -1, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par $r(u) = \frac{1}{\sqrt{1+u}}$.

1. Étude globale de F sur $\mathbb{R}^*$

1. (a) Montrer : $\forall x \in]0, +\infty[, \quad 0 \leq F(x) \leq 1$.

1. (b) En utilisant le changement de variable $y = -t$, étudier la parité de F .

1. (c) Montrer que F est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et que

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad xF'(x) = -F(x) + r(x^4).$$

1. (d) Montrer : $\forall x \in]0, +\infty[, \quad r(x^4) \leq F(x)$, et en déduire que F est décroissante sur $]0, +\infty[$.

2. Étude locale de F en 0

2. (a) Montrer que F est continue en 0.

2. (b) i. Établir :

$$\forall u \in [0, +\infty[, \quad 0 \leq \frac{1}{\sqrt{1+u}} - \left(1 - \frac{u}{2}\right) \leq \frac{3}{8}u^2.$$

2. (b) ii. En déduire que F admet un développement limité à l'ordre 4 en 0, et déterminer celui-ci.

2. (b) iii. Montrer que F est dérivable en 0, et calculer $F'(0)$.

2. (c) Établir que F' admet un développement limité à l'ordre 3 en 0, et déterminer celui-ci.

2. (d) Établir que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

3. Étude locale de F en $+\infty$

3. (a) i. On note h l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $h(x) = \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$.

En utilisant le changement de variable $z = \frac{1}{t}$, former une relation entre $h(x)$ et $h\left(\frac{1}{x}\right)$, pour $x \in]0, +\infty[$.

3. (a) ii. En déduire :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad xF(x) + \frac{1}{x}F\left(\frac{1}{x}\right) = 2F(1).$$

3. (b) i. En déduire : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$.

3. (b) ii. Montrer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F'(x) = 0$.

4. (a) Écrire un programme Python de calcul approché de $F(1)$ par la méthode des rectangles avec 1000 pas.

On admettra que $F(1)$ admet 0,93 comme valeur approchée à 10^{-2} près.

4. (b) Tracer la courbe représentative de F (on n'étudiera ni la concavité, ni les points d'inflexion).