



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques 1

1994

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

PROBLÈME 1

$\mathbb{R}[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

On note E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ formé des polynômes de degré inférieur ou égal à 3.

On note $\mathcal{B}$ la base canonique de E : $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$.

On définit les polynômes suivants :

$$P_0(X) = -\frac{1}{6}(X-1)(X-2)(X-3).$$

$$P_1(X) = \frac{1}{2}X(X-2)(X-3).$$

$$P_2(X) = -\frac{1}{2}X(X-1)(X-3).$$

$$P_3(X) = \frac{1}{6}X(X-1)(X-2).$$

1. a. Pour tous entiers i et j entre 0 et 3, calculer $P_i(j)$.
1. b. Démontrer que la famille $\mathcal{C} = (P_0(X), P_1(X), P_2(X), P_3(X))$ est une base de E .
1. c. Donner la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$. On note M cette matrice.
1. d. Calculer M^{-1} par la méthode du pivot de Gauss : le détail des calculs devra figurer sur la copie.
2. On définit le polynôme $P(X) = X(X-1)(X-2)(X-3)$.

On note φ l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même qui, à tout polynôme $T(X)$, associe le reste $\widehat{T}(X)$ de la division suivant les puissances décroissantes de $T(X)$ par $P(X)$.

2. a. Démontrer que φ est linéaire.

2. b. Démontrer que, pour tout polynôme $T(X)$:

$$\widehat{T}(X) = T(0)P_0(X) + T(1)P_1(X) + T(2)P_2(X) + T(3)P_3(X).$$

2. c. En utilisant la formule vue en b., déterminer les composantes des polynômes $1, X, X^2, X^3$ dans la base $\mathcal{C}$. Quel résultat retrouve-t-on ainsi ?

3. Soit $S(X)$ un polynôme de $\mathbb{R}[X]$.

On désigne par ψ l'application qui, à tout polynôme $Q(X)$ de E , associe $Q(\widehat{X})S(X)$.

3. a. Démontrer que ψ est un endomorphisme de E .

3. b. Calculer $\psi(P_0(X)), \psi(P_1(X)), \psi(P_2(X)), \psi(P_3(X))$.

Est-ce que ψ est diagonalisable ?

3. c. On se place ici dans le cas particulier : $S(X) = 2X^3 + X^2 - 3X + 1$.

Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de ψ .

PROBLÈME 2

PREMIÈRE PARTIE

On note $f_0 : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^{-x^2}$ et, pour tout entier naturel n tel que $n \geq 1$,
 $f_n : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^n e^{-x^2}$.

1. a. Étudier, pour tout entier naturel n , la continuité et la dérivabilité de f_n .
1. b. Dresser le tableau des variations de f_0 , et celui de f_n pour tout entier naturel non nul n .
1. c. Pour tout x de $[0, +\infty[$ et tout entier naturel n , comparer $f_n(x)$ et $f_{n+1}(x)$ (on distinguera les cas $0 \leq x \leq 1$ et $x > 1$).

1. d. On note C_n la courbe représentative de f_n . Tracer sur un même schéma C_0, C_1, C_4 (repère orthonormé, unité 10 cm). On ne cherchera pas à déterminer d'éventuels points d'inflexion.
2. Les résultats de cette question 2. ne seront pas utilisés dans la suite du problème.
2. a. Montrer que, pour tout entier naturel n tel que $n \geq 2$, l'équation $f_n(x) = 1 - x$, d'inconnue $x \in [0, 1]$, admet une solution et une seule, qu'on notera x_n .
2. b. Démontrer que la suite $(x_n)_{n \geq 2}$ converge vers 1.
3. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n , l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f_n(x) dx$ converge. On note, pour tout entier naturel n , $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x) dx$.
3. b. Établir : $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+2} = \frac{n+1}{2} I_n$.
3. c. En déduire la valeur de I_n pour tout entier naturel n (on distinguera deux cas suivant la parité de n et on donnera le résultat à l'aide de factorielles ; on rappelle : $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$).
4. Démontrer, pour tout entier naturel n et tout réel a , la convergence des intégrales généralisées :

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2} \cos(ax) dx, \quad \int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2} \sin(ax) dx.$$

DEUXIÈME PARTIE

On note F et G les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies, pour tout réel a , par :

$$F(a) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos(ax) dx, \quad G(a) = \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} \sin(ax) dx.$$

Ces intégrales généralisées convergent d'après la question 4. de la première partie.

1. Démontrer : $\forall a \in \mathbb{R}, G(a) = \frac{1}{2}aF(a)$.

2. a. Soient $a \in \mathbb{R}, h \in \mathbb{R}, x \in [0, +\infty[$.

Montrer :

$$\cos((a+h)x) = \cos(ax) - hx \sin(ax) - x^2 \int_a^{a+h} (a+h-u) \cos(xu) du.$$

$$\left| \int_a^{a+h} (a+h-u) \cos(xu) du \right| \leq \frac{h^2}{2}.$$

2. b. En déduire, pour tout nombre réel a et tout nombre réel non nul h :

$$\left| \frac{F(a+h) - F(a)}{h} + G(a) \right| \leq \frac{|h|}{2} \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx.$$

2. c. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall a \in \mathbb{R}, F'(a) = -G(a).$$

3. Calculer, en fonction du réel a , $F(a)$ et $G(a)$.

On pourra considérer l'application H définie sur $\mathbb{R}$ par $H(a) = e^{a^2/4}F(a)$.