



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques 1

1993

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Problème 1

Partie I

1. Question adaptée au programme actuel : la notation $\mathcal{L}(E)$ désigne ici l'espace des endomorphismes. On utilise les hypothèses $p + q = \text{Id}$, $f = ap + bq$ et $f^2 = a^2p + b^2q$, avec $a \neq b$ et $ab \neq 0$.

1. a. L'identité commute avec tout endomorphisme et f commute avec lui-même. Les deux compositions de l'énoncé sont donc égales à

$$f^2 - (a + b)f + ab \text{Id}.$$

En substituant les trois expressions données,

$$f^2 - (a + b)f + ab \text{Id} = [a^2 - a(a + b) + ab]p + [b^2 - b(a + b) + ab]q = 0.$$

Par ailleurs,

$$f - a \text{Id} = ap + bq - a(p + q) = (b - a)q,$$

$$f - b \text{Id} = ap + bq - b(p + q) = (a - b)p.$$

Les trois identités demandées sont établies sans supposer à l'avance que p et q sont des projecteurs.

1. b. En remplaçant les deux facteurs dans les compositions nulles de 1.a, on obtient

$$(b - a)(a - b)q \circ p = 0, \quad (a - b)(b - a)p \circ q = 0.$$

Le scalaire commun vaut $-(a - b)^2 \neq 0$. On peut donc diviser par ce scalaire et conclure $q \circ p = p \circ q = 0$.

1. c. En composant $p + q = \text{Id}$ à gauche par p ,

$$p = p \circ \text{Id} = p \circ p + p \circ q = p \circ p.$$

De même, $q = q \circ p + q \circ q = q \circ q$. Ainsi p et q sont des projecteurs.

2. Question adaptée au programme actuel : le domaine des exposants est précisé. Les puissances définies avant cette question sont celles d'exposant naturel. Les puissances d'exposant négatif seront possibles après la justification de l'inversibilité.

Méthode 1 — Récurrence.

Pour $n = 0$, $f^0 = \text{Id} = p + q = a^0 p + b^0 q$. Supposons la formule vraie au rang $n \geq 0$. Par 1.b et 1.c,

$$f^{n+1} = (a^n p + b^n q) \circ (ap + bq) = a^{n+1} p + b^{n+1} q.$$

Les termes croisés sont nuls et les carrés des projecteurs sont eux-mêmes. La récurrence prouve la formule pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Méthode 2 — Binôme pour des endomorphismes qui commutent.

Les endomorphismes ap et bq commutent car $p \circ q = q \circ p = 0$. Pour $n \geq 1$, le binôme donne

$$f^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^j b^{n-j} p^j \circ q^{n-j}.$$

Si $1 \leq j \leq n-1$, les deux exposants sont positifs. Par idempotence, $p^j = p$ et $q^{n-j} = q$, donc le terme est nul. Les deux termes extrêmes valent $b^n q$ et $a^n p$. Pour $n = 1$, il n'y a pas de terme intermédiaire. Pour $n = 0$, on vérifie séparément $p + q = \text{Id}$.

La récurrence met en évidence la stabilité de la formule ; le binôme explique pourquoi seuls deux termes subsistent.

3. a. Les réels a et b étant non nuls, posons $u = p/a + q/b$. En développant la composition,

$$f \circ u = (ap + bq) \circ \left(\frac{1}{a}p + \frac{1}{b}q \right) = p + \frac{a}{b}p \circ q + \frac{b}{a}q \circ p + q = \text{Id}.$$

3. b. Méthode 1 — Vérifier les deux compositions.

La question 3.a donne $f \circ u = \text{Id}$. Le même développement dans l'autre ordre donne

$$u \circ f = p + \frac{b}{a}p \circ q + \frac{a}{b}q \circ p + q = \text{Id}.$$

Ces deux identités assurent respectivement la surjectivité et l'injectivité de f . Comme E n'a pas été supposé de dimension finie, il est nécessaire de justifier les deux. Ainsi f est bijectif et

$$f^{-1} = \frac{1}{a}p + \frac{1}{b}q.$$

Méthode 2 — Exploiter la relation quadratique.

La question 1.a donne $f^2 - (a + b)f + ab \text{Id} = 0$. Comme $ab \neq 0$, elle se réécrit

$$f \circ \frac{(a + b) \text{Id} - f}{ab} = \text{Id}.$$

Le second facteur est une combinaison de Id et f , donc commute avec f et fournit également une composition égale à l'identité dans l'autre ordre. C'est l'inverse de f . En substituant $\text{Id} = p + q$ et $f = ap + bq$, on retrouve

$$\frac{(a + b) \text{Id} - f}{ab} = \frac{bp + aq}{ab} = \frac{p}{a} + \frac{q}{b}.$$

La première méthode utilise les projecteurs ; la seconde permet de calculer un inverse directement à partir d'une relation polynomiale particulière.

Pour un exposant négatif $n = -m$, $m \geq 1$, on peut maintenant définir $f^n = (f^{-1})^m$. La formule déjà prouvée pour deux projecteurs s'applique à f^{-1} et donne $f^n = a^n p + b^n q$. La formule s'étend donc à tous les entiers relatifs après cette question.

4. a. Puisque $p \neq 0$, il existe $z \in E$ tel que $x = p(z) \neq 0$. Les questions 1.b et 1.c donnent

$$f(x) = (ap + bq)(p(z)) = ap(z) = ax.$$

Donc a est valeur propre. De même, $q \neq 0$ fournit un vecteur non nul de son image, propre pour la valeur b .

Réciproquement, si $f(x) = \lambda x$ avec $x \neq 0$, la composition nulle de 1.a appliquée à x donne

$$0 = (f - a \text{Id}) \circ (f - b \text{Id})(x) = (\lambda - a)(\lambda - b)x.$$

Le vecteur x étant non nul, $(\lambda - a)(\lambda - b) = 0$, donc $\lambda \in \{a, b\}$. Le spectre réel de f est exactement $\{a, b\}$.

4. b. Supposons E de dimension finie. Tout $x \in E$ se décompose sous la forme

$$x = p(x) + q(x), \text{ donc } E = \text{Im } p + \text{Im } q.$$

Cette somme est directe : si $x = p(u) = q(v)$, alors $p(x) = p^2(u) = x$ et $p(x) = p \circ q(v) = 0$, donc $x = 0$.

Les images sont les espaces propres. En effet, f vaut $a \text{Id}$ sur $\text{Im } p$ et $b \text{Id}$ sur $\text{Im } q$.

Réciproquement, $f(x) = ax$ équivaut à $q(x) = 0$ par 1.a ; alors $x = p(x)$ et $x \in \text{Im } p$.

L'argument analogue donne $E_f(b) = \text{Im } q$.

En réunissant une base de chacun des deux espaces supplémentaires, on obtient une base de E formée de vecteurs propres. Ainsi f est diagonalisable, avec une matrice diagonale portant les valeurs a et b . Cette démonstration établit directement le résultat, sans invoquer un critère général lié à un polynôme annulateur.

Partie II

1. Le produit matriciel donne

$$M^2 = \begin{pmatrix} 89 & -480 & 160 \\ 0 & 9 & 0 \\ -32 & 192 & -55 \end{pmatrix}.$$

Par exemple, les coefficients de la première ligne sont $13^2 + 20(-4) = 89$,
 $13(-60) + (-60)3 + 20(24) = -480$ et $13(20) + 20(-5) = 160$. La deuxième ligne est
 $(0, 9, 0)$. La troisième ligne vaut $(-4)13 + (-5)(-4) = -32$,
 $(-4)(-60) + 24(3) + (-5)24 = 192$ et $(-4)20 + (-5)^2 = -55$.

Dans $M^2 = \alpha M + \beta \text{Id}$, le coefficient $(1, 2)$ impose $-480 = -60\alpha$, donc $\alpha = 8$. Le
coefficient $(2, 2)$ impose $9 = 3\alpha + \beta$, donc $\beta = -15$. La substitution vérifie tous les
coefficients :

$$M^2 = 8M - 15 \text{Id}.$$

2. La relation précédente donne $M^2 - 8M + 15 \text{Id} = 0$. La factorisation réelle

$$X^2 - 8X + 15 = (X - 3)(X - 5) \text{ donne}$$

$$(M - 3 \text{Id})(M - 5 \text{Id}) = 0.$$

On peut choisir $a = 3$ et $b = 5$; les deux valeurs sont distinctes et non nulles. On
conservera cet ordre dans les questions suivantes.

3. De $A + B = \text{Id}$ et $3A + 5B = M$, on déduit $2B = M - 3 \text{Id}$. Ainsi

$$B = \frac{M - 3 \text{Id}}{2}, \quad A = \frac{5 \text{Id} - M}{2}.$$

Ces formules définissent des matrices réelles et vérifient les deux équations; elles

donnent même l'unique couple solution. Explicitement,

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 30 & -10 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -12 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -30 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 12 & -4 \end{pmatrix}.$$

4. Rectification locale : le PDF demande « pour tout entier b » ; l'exposant concerné est n .
Les puissances négatives sont définies après justification de l'inversibilité.

Vérifions les hypothèses de la partie I : A et B sont non nulles, $A + B = \text{Id}$ et $M = 3A + 5B$. La question 1 donne aussi

$$M^2 = 8(3A + 5B) - 15(A + B) = 9A + 25B.$$

En identifiant les matrices aux endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ dans sa base canonique, la partie I s'applique. Ainsi M est inversible, $M^{-1} = A/3 + B/5$, et, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$M^n = 3^n A + 5^n B.$$

En remplaçant A et B ,

$$M^n = \begin{pmatrix} 5 \cdot 5^n - 4 \cdot 3^n & 30(3^n - 5^n) & 10(5^n - 3^n) \\ 0 & 3^n & 0 \\ 2(3^n - 5^n) & 12(5^n - 3^n) & 5 \cdot 3^n - 4 \cdot 5^n \end{pmatrix}.$$

Pour $n = 0$, on retrouve la matrice identité ; pour $n = 1$, on retrouve M . Les réels 3^n et 5^n existent aussi lorsque $n < 0$, car leurs bases sont non nulles.

Problème II

Partie I

A — Étude de f .

1. Pour $0 < x \leq \pi/2$, $\sin x > 0$; la fonction est dérivable et

$$f'(x) = \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^2 x}.$$

Posons $u(x) = \sin x - x \cos x$. On a $u(0) = 0$ et $u'(x) = x \sin x > 0$ sur $]0; \pi/2]$. Ainsi $u(x) > 0$ pour $x > 0$ et $f'(x) > 0$.

La fonction f est donc strictement croissante sur $]0; \pi/2]$. Comme $\sin x/x \rightarrow 1$ en 0, $f(x) \rightarrow 1 = f(0)$. À l'autre extrémité, $f(\pi/2) = \pi/2$.

2. À l'extrémité 0, la dérivabilité s'entend à droite. On calcule le taux d'accroissement sans composer de développements limités :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{x - \sin x}{x \sin x}.$$

Le développement usuel $\sin x = x - x^3/6 + o(x^3)$ donne $x - \sin x = x^3/6 + o(x^3)$, tandis que $x \sin x \sim x^2$. Le quotient tend donc vers 0. Ainsi f est dérivable à droite en 0 et $f'(0) = 0$.

3. Sur $]0; \pi/2]$, l'expression de f' de la question 1 est continue. Il reste à vérifier sa limite en 0. Les développements usuels, évalués directement en x , donnent

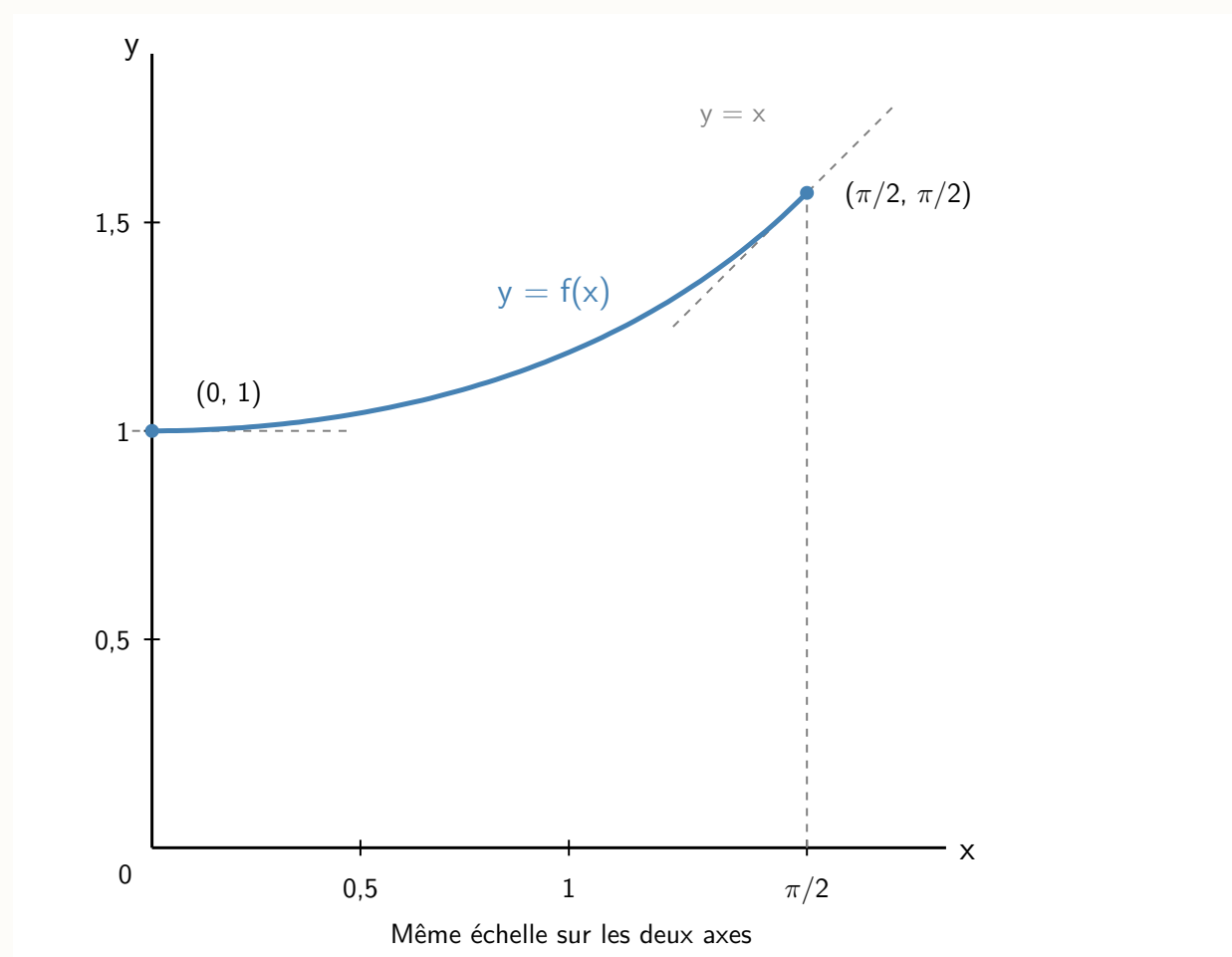
$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3), \quad x \cos x = x - \frac{x^3}{2} + o(x^3).$$

Par soustraction, $\sin x - x \cos x = x^3/3 + o(x^3)$, et $\sin^2 x \sim x^2$. Donc $f'(x) \sim x/3$, en particulier $f'(x) \rightarrow 0 = f'(0)$.

La fonction et sa dérivée sont continues jusqu'en 0, avec les dérivées unilatérales aux extrémités. Ainsi f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; \pi/2]$.

4. La courbe part du point $(0, 1)$ avec une tangente horizontale d'équation $y = 1$. Elle est strictement croissante et se termine en $(\pi/2, \pi/2)$. La formule de la dérivée donne $f'(\pi/2) = 1$, donc la tangente au point terminal est $y = x$.

Pour un tracé manuel, on utilise la même unité de 5 cm sur les deux axes. Les deux extrémités, les variations et les tangentes déterminent les éléments essentiels. Le tracé ci-dessous utilise la formule exacte de f , échantillonnée en 81 points, avec la même échelle sur les deux axes.



B — Intégrale oscillante.

1. Pour $x > 0$ fixé, les fonctions g et $t \mapsto -\cos(xt)/x$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1]$.
L'intégration par parties imposée donne

$$\int_0^1 \sin(xt)g(t) dt = \left[-\frac{\cos(xt)}{x}g(t) \right]_0^1 + \frac{1}{x} \int_0^1 \cos(xt)g'(t) dt.$$

Donc

$$\int_0^1 \sin(xt)g(t) dt = \frac{g(0) - g(1) \cos x}{x} + \frac{1}{x} \int_0^1 \cos(xt)g'(t) dt.$$

Par inégalité triangulaire et $|\cos(xt)| \leq 1$,

$$\left| \int_0^1 \sin(xt)g(t) dt \right| \leq \frac{|g(0)| + |g(1)| + \int_0^1 |g'(t)| dt}{x}.$$

La dérivée g' est continue sur un segment, donc l'intégrale de sa valeur absolue est finie.

On peut choisir $A = |g(0)| + |g(1)| + \int_0^1 |g'(t)| dt \geq 0$, indépendant de x .

2. La majoration précédente donne une valeur absolue comprise entre 0 et A/x , qui tend vers 0. Le théorème d'encadrement entraîne

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^1 \sin(xt)g(t) dt = 0.$$

C — Quotient associé à un polynôme.

1. Soit P un polynôme réel tel que $P(0) = 0$. La fonction $\phi(x) = P(x)/\sin(\pi x/2)$ est bien définie sur $]0; 1]$, car $0 < \pi x/2 \leq \pi/2$ et le dénominateur est strictement positif.

1. a. Comme $P(0) = 0$, il existe un polynôme R tel que $P(X) = XR(X)$. Pour $0 < x \leq 1$,

$$\phi(x) = \frac{xR(x)}{\sin(\pi x/2)} = \frac{2}{\pi} R(x) f\left(\frac{\pi x}{2}\right).$$

Cette expression ne comporte plus de division par x une fois le polynôme R défini.

1. b. Le polynôme R est de classe $\mathcal{C}^1$ et f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; \pi/2]$, par A.3. Les règles de composition et de produit donnent donc un prolongement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1]$:

$$\tilde{\phi}(x) = \frac{2}{\pi} R(x) f\left(\frac{\pi x}{2}\right) \quad (0 \leq x \leq 1).$$

En particulier, $\tilde{\phi}(0) = 2R(0)/\pi = 2P'(0)/\pi$, car la dérivation de $P(X) = XR(X)$ donne $P'(0) = R(0)$. Sur $]0; 1]$, cette fonction coïncide avec ϕ . Elle constitue donc le prolongement demandé.

2. Question adaptée au programme actuel : la convention sur le prolongement en 0 est précisée. Elle rend l'intégrande continu sur $[0; 1]$. Pour tout $n \geq 1$, l'intégrale est égale à

$$\int_0^1 \tilde{\phi}(t) \sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \pi t \right) dt.$$

La fonction $\tilde{\phi}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par C.1.b. La question B.2 s'applique avec $g = \tilde{\phi}$ et le paramètre $x_n = (n + 1/2)\pi$, qui tend vers $+\infty$. L'intégrale tend donc vers 0.

On pourrait aussi appliquer directement la majoration de B.1 : sa valeur absolue est au plus $A/((n + 1/2)\pi)$, ce qui explicite la vitesse de cette majoration.

Partie II

A — Étude de h .

1. Si P est polynomial, les intégrales $\int_0^x tP(t) dt$ et $\int_0^x P(t) dt$ sont des polynômes en x , d'après les primitives de leurs monômes. L'expression de $Q = h(P)$ est donc bien polynomiale, pour tout $x \in \mathbb{R}$, y compris pour $x < 0$ avec la convention des intégrales orientées.

1. a. Posons $c = \int_0^1 P(t) dt$. Pour éviter toute dérivation sous un signe intégral à paramètre, écrivons

$$Q(x) = \int_0^x tP(t) dt - x \int_0^x P(t) dt + \frac{x^2}{2}c.$$

Le théorème fondamental du calcul intégral s'applique aux intégrandes polynomiales,

donc continues. En dérivant les trois termes,

$$Q'(x) = xP(x) - \int_0^x P(t) dt - xP(x) + xc = xc - \int_0^x P(t) dt.$$

C'est l'identité demandée pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. b. On dérive la relation précédente. Le réel c est constant et la dérivée de la primitive est $P(x)$. Donc

$$Q''(x) = \int_0^1 P(t) dt - P(x).$$

2. La linéarité de l'intégrale et des produits par des fonctions fixées donne, pour $P, R \in E$ et $a, b \in \mathbb{R}$, $h(aP + bR) = ah(P) + bh(R)$. Ainsi h est linéaire.

Si $h(P) = 0$, la question 1.b donne $P(x) = \int_0^1 P(t) dt$ pour tout x , donc P est constant. Réciproquement, pour $P(x) = c$ constant,

$$h(P)(x) = c \int_0^x (t - x) dt + \frac{cx^2}{2} = -\frac{cx^2}{2} + \frac{cx^2}{2} = 0.$$

Le noyau est donc exactement l'espace des polynômes constants.

Posons $V = \{Q \in E : Q(0) = Q'(0) = Q'(1) = 0\}$. Si $Q = h(P)$, sa définition donne $Q(0) = 0$ et 1.a donne $Q'(0) = 0$ ainsi que $Q'(1) = \int_0^1 P - \int_0^1 P = 0$. Ainsi $\text{Im } h \subset V$.

Réciproquement, soit $Q \in V$. Suivons l'indication en posant $R = h(Q'')$. La question 1.b donne

$$R''(x) = \int_0^1 Q''(t) dt - Q''(x) = Q'(1) - Q'(0) - Q''(x) = -Q''(x).$$

Donc $(R + Q)'' = 0$; le polynôme $R + Q$ est affine. Or $R(0) = R'(0) = 0$ puisque R appartient à l'image, et $Q(0) = Q'(0) = 0$ par hypothèse. L'anneau $R + Q$ a donc son terme constant et son coefficient de degré un nuls : $R = -Q$.

Par linéarité, $Q = h(-Q'')$, donc $Q \in \text{Im } h$. On conclut

$$\text{Ker } h = \text{Vect}(1), \quad \text{Im } h = V.$$

Le signe est important dans la dernière construction : $h(Q'') = -Q$ et un antécédent de Q est $-Q''$.

B — Suite de polynômes.

1. Pour tout entier $m \geq 0$, l'intégration des monômes donne

$$h(X^m)(x) = \frac{x^{m+2}}{m+2} - \frac{x^{m+2}}{m+1} + \frac{x^2}{2(m+1)} = -\frac{x^{m+2}}{(m+1)(m+2)} + \frac{x^2}{2(m+1)}.$$

En particulier, $h(X^2) = -X^4/12 + X^2/6$ et $h(X) = -X^3/6 + X^2/4$. Comme $P_1 = X^2/2 - X$, la linéarité donne

$$P_2 = \frac{1}{2}h(X^2) - h(X) = -\frac{X^4}{24} + \frac{X^3}{6} - \frac{X^2}{6}.$$

Pour le rang suivant,

$$h(X^4) = -\frac{X^6}{30} + \frac{X^2}{10}, \quad h(X^3) = -\frac{X^5}{20} + \frac{X^2}{8}.$$

Ainsi

$$P_3 = -\frac{1}{24}h(X^4) + \frac{1}{6}h(X^3) - \frac{1}{6}h(X^2).$$

Les coefficients des degrés six, cinq et quatre valent respectivement $1/720$, $-1/120$ et $1/72$. Le coefficient de degré deux est $-1/240 + 1/48 - 1/36 = -1/90$. On obtient

$$P_3 = \frac{X^6}{720} - \frac{X^5}{120} + \frac{X^4}{72} - \frac{X^2}{90}.$$

2. Pour $n \geq 2$, $P_n = h(P_{n-1})$ appartient à $\text{Im } h$. D'après A.2,

$$P_n(0) = P'_n(0) = P'_n(1) = 0.$$

Cette affirmation n'est pas valable en entier au rang 1 : on a $P'_1(0) = -1$, tandis que $P_1(0) = P'_1(1) = 0$.

3. La formule de $h(X^m)$ montre que, si un polynôme P a degré $d \geq 1$ et coefficient dominant $c \neq 0$, alors $h(P)$ possède pour monôme de plus haut degré

$$-\frac{c}{(d+1)(d+2)}X^{d+2}.$$

Les termes ajoutés de degré deux ne peuvent annuler ce terme de degré $d+2 \geq 3$. Pour P_1 , le degré vaut 2 et le coefficient dominant vaut $1/2 = 1/2!$.

Par récurrence, si le monôme dominant de P_n est $(-1)^{n-1}X^{2n}/(2n)!$, alors celui de P_{n+1} est

$$-\frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!(2n+1)(2n+2)}X^{2n+2} = \frac{(-1)^n}{(2n+2)!}X^{2n+2}.$$

Ainsi, pour tout $n \geq 1$, P_n est de degré $2n$ et son monôme dominant est $(-1)^{n-1}X^{2n}/(2n)!$.

4. En appliquant A.1.b à P_{n-1} , on obtient immédiatement, pour $n \geq 2$,

$$P_n'' = \int_0^1 P_{n-1}(t) dt - P_{n-1}.$$

Fixons $k \in \mathbb{N}^*$ et posons $w = k\pi > 0$ ainsi que $C_n = \int_0^1 P_n(t) \cos(wt) dt$. Les polynômes sont de classe $\mathcal{C}^2$, ce qui permet deux intégrations par parties sur $[0; 1]$.

Comme $\sin 0 = \sin(k\pi) = 0$, la première donne

$$C_n = -\frac{1}{w} \int_0^1 P_n'(t) \sin(wt) dt.$$

La seconde donne

$$C_n = \left[\frac{P_n'(t) \cos(wt)}{w^2} \right]_0^1 - \frac{1}{w^2} \int_0^1 P_n''(t) \cos(wt) dt.$$

Pour $n \geq 2$, les dérivées aux deux extrémités sont nulles par B.2, donc le crochet est nul.

De plus, $\int_0^1 \cos(wt) dt = \sin(k\pi)/w = 0$, ce qui annule le terme constant de P_n'' . Ainsi

$$\int_0^1 P_n''(t) \cos(wt) dt = -C_{n-1},$$

et donc $C_n = C_{n-1}/w^2$.

Il reste à calculer le premier terme. On a $P_1'' = 1$, $P_1'(1) = 0$ et $P_1'(0) = -1$. La même formule d'intégration par parties donne

$$C_1 = \frac{0 - (-1)}{w^2} - \frac{1}{w^2} \int_0^1 \cos(wt) dt = \frac{1}{w^2}.$$

La récurrence entraîne finalement

$$\int_0^1 P_n(t) \cos(k\pi t) dt = \frac{1}{(k\pi)^{2n}} \quad (n \geq 1).$$

La distinction entre le rang 1 et les rangs suivants évite de supprimer à tort le terme de bord $P_1'(0)$.

Partie III

A — Sommes de séries.

1. On utilise seulement les formules d'addition réelles. Elles donnent, pour $k \geq 1$,

$$\sin((k + \frac{1}{2})t) - \sin((k - \frac{1}{2})t) = 2 \sin(t/2) \cos(kt).$$

En effet, on applique l'addition du sinus à $kt + t/2$ et $kt - t/2$, puis on soustrait les deux expressions. En sommant de $k = 1$ à $k = N$, les termes intermédiaires se compensent :

$$2 \sin(t/2) \sum_{k=1}^N \cos(kt) = \sin((N + \frac{1}{2})t) - \sin(t/2).$$

Pour $t \in]0; \pi]$, $\sin(t/2) > 0$. La division est donc permise et donne

$$\sum_{k=1}^N \cos(kt) = \frac{\sin((N + \frac{1}{2})t)}{2 \sin(t/2)} - \frac{1}{2}.$$

2. Rectification locale : dans la première formule du PDF, les arguments

trigonométriques doivent être $(N + 1/2)\pi t$ et $\pi t/2$, puisque la question II.B.4 utilise $\cos(k\pi t)$. Dans la seconde formule, le coefficient correct est $-\pi^{2n}/2$, et non $-\pi^{2n}$.

Pour $N, n \geq 1$, II.B.4 donne

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{k^{2n}} = \pi^{2n} \sum_{k=1}^N \int_0^1 P_n(t) \cos(k\pi t) dt = \pi^{2n} \int_0^1 P_n(t) \sum_{k=1}^N \cos(k\pi t) dt.$$

L'échange porte seulement sur une somme finie d'intégrales de fonctions continues, donc il est justifié par la linéarité. En appliquant A.1 à l'angle πt pour $0 < t \leq 1$,

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{k^{2n}} = \pi^{2n} \int_0^1 P_n(t) \left(\frac{\sin((N + \frac{1}{2})\pi t)}{2 \sin(\pi t/2)} - \frac{1}{2} \right) dt.$$

Le quotient entre parenthèses possède une limite en 0, égale à N , parce qu'il coïncide pour $t > 0$ avec la somme finie

$$\sum_{k=1}^N \cos(k\pi t).$$

L'intégrande est donc compris avec son prolongement continu.

Par linéarité de l'intégrale,

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{k^{2n}} = \frac{\pi^{2n}}{2} \int_0^1 P_n(t) \frac{\sin((N + \frac{1}{2})\pi t)}{\sin(\pi t/2)} dt - \frac{\pi^{2n}}{2} \int_0^1 P_n(t) dt.$$

On a $P_n(0) = 0$ pour tout $n \geq 1$, par la définition de P_1 et II.B.2. La question I.C.2 s'applique donc à $P = P_n$: pour n fixé, la première intégrale tend vers 0 lorsque $N \rightarrow +\infty$.

La série de gauche converge également par le critère de Riemann, puisque $2n > 1$. En

faisant tendre N vers l'infini dans cette égalité finie, on obtient

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2n}} = -\frac{\pi^{2n}}{2} \int_0^1 P_n(t) dt.$$

Il n'y a aucun échange automatique entre une série infinie et une intégrale : le passage à la limite est justifié par l'estimation de I.C.2.

3. On utilise les polynômes de II.B.1 et la formule rectifiée de A.2. Pour $n = 1$,

$$\int_0^1 P_1(t) dt = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3},$$

donc

$$\sum_{k=1}^{+\infty} 1/k^2 = \pi^2/6;$$

on peut choisir $a = 2$ et $b = 6$.

Pour $n = 2$,

$$\int_0^1 P_2(t) dt = -\frac{1}{120} + \frac{1}{24} - \frac{1}{18} = \frac{-3 + 15 - 20}{360} = -\frac{1}{45}.$$

Donc

$$\sum_{k=1}^{+\infty} 1/k^4 = \pi^4/90;$$

on peut choisir $a = 4$ et $b = 90$.

Pour $n = 3$,

$$\int_0^1 P_3(t) dt = \frac{1}{5040} - \frac{1}{720} + \frac{1}{360} - \frac{1}{270} = \frac{3 - 21 + 42 - 56}{15120} = -\frac{2}{945}.$$

Donc

$$\sum_{k=1}^{+\infty} 1/k^6 = \pi^6/945;$$

on peut choisir $a = 6$ et $b = 945$.

Ces résultats sont déduits des intégrales calculées; aucune valeur de somme de série n'est supposée connue à l'avance.

B — Calcul des coefficients et programmation.

1. Rectification locale : la dernière borne du PDF est $p \in \llbracket 3, n \rrbracket$; elle doit être remplacée par $3 \leq p \leq 2n$ pour calculer tous les coefficients de P_n , de degré $2n$.

Les égalités $P_n(0) = P'_n(0) = 0$ pour $n \geq 2$ donnent $a_{n,0} = a_{n,1} = 0$. Posons

$c_{n-1} = \int_0^1 P_{n-1}(t) dt$. L'intégration d'une somme finie de monômes donne

$$c_{n-1} = \sum_{p=0}^{2n-2} \frac{a_{n-1,p}}{p+1}.$$

La relation de II.B.4 s'écrit $P''_n = c_{n-1} - P_{n-1}$. Dans le membre de gauche, le coefficient de X^r est $(r+2)(r+1)a_{n,r+2}$.

Pour $r = 0$, le coefficient à droite est $c_{n-1} - a_{n-1,0} = c_{n-1}$, car $P_{n-1}(0) = 0$, y compris pour $n-1 = 1$. Ainsi

$$a_{n,2} = \frac{c_{n-1}}{2} = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{2n-2} \frac{a_{n-1,p}}{p+1}.$$

Pour $1 \leq r \leq 2n - 2$, le coefficient à droite est $-a_{n-1,r}$. En posant $p = r + 2$, on obtient

$$a_{n,p} = -\frac{a_{n-1,p-2}}{p(p-1)} \quad (3 \leq p \leq 2n).$$

Tous les dénominateurs sont non nuls dans ces intervalles d'indices. Avec les deux coefficients initiaux nuls, les relations déterminent l'ensemble des coefficients de P_n .

2. Le réel demandé est, d'après A.2,

$$\beta_n = -\frac{1}{2} \int_0^1 P_n(t) dt = -\frac{1}{2} \sum_{p=0}^{2n} \frac{a_{n,p}}{p+1}.$$

Le facteur $1/2$ est conservé dans le programme, conformément à la formule rectifiée.

2. a. Un tableau de nombres réels convient : sa case d'indice p contient le coefficient de X^p . Pour un polynôme de degré au plus $2n$, il faut $2n + 1$ cases, d'indices 0 à $2n$.

Un tableau NumPy est donc adapté. Les coefficients nuls doivent être conservés, afin que l'indice corresponde toujours au degré du monôme.

2. b. Code adapté en Python.

Le programme part du tableau des coefficients de P_1 , puis construit successivement ceux de $P_2, \dots, P_n$. On utilise un nouveau tableau à chaque rang pour conserver les coefficients précédents jusqu'à la fin du calcul du nouveau polynôme.

Python

```
import numpy as np

def calculer(n):
    a = np.array([0.0, -1.0, 0.5])
    for r in range(2, n + 1):
        b = np.zeros(2 * r + 1)
        integrale = 0.0
        for p in range(2 * r - 1):
```

```
        integrale = integrale + a[p] / (p + 1)

    b[2] = integrale / 2.0

    for p in range(3, 2 * r + 1):
        b[p] = -a[p - 2] / (p * (p - 1))

    a = b

    integrale = 0.0

    for p in range(2 * n + 1):
        integrale = integrale + a[p] / (p + 1)

    beta = -integrale / 2.0

    return a, beta

n = int(input("Entier n compris entre 1 et 25 : "))

if 1 <= n <= 25:
    coefficients, beta = calculer(n)

    print("Coefficients de P_n :", coefficients)

    print("beta_n =", beta)

else:
    print("n doit être compris entre 1 et 25.")
```

Au début de l'itération de rang r , le tableau a représente P_{r-1} et possède $2r - 1$ coefficients, d'indices 0 à $2r - 2$. La boucle `range(2 * r - 1)` parcourt exactement ces indices. Le tableau b , initialisé à zéro, possède les $2r + 1$ cases nécessaires à P_r ; ses deux premières cases restent nulles. La boucle `range(3, 2 * r + 1)` remplit les indices 3 à $2r$, borne finale incluse mathématiquement et rendue accessible par la borne exclusive de Python.

Une fois `a = b` effectué, le nouveau tableau représente P_r . Après la dernière itération, la seconde somme calcule l'intégrale de P_n , puis `beta` applique le facteur $-1/2$. Pour $n = 1$, la première boucle est vide; le tableau initial est conservé et le calcul final donne $\beta_1 = 1/6$.

Ce programme a été exécuté pour tous les entiers de 1 à 25, avec vérification de la saisie aux deux bornes. Les valeurs obtenues aux trois premiers rangs sont numériquement cohérentes avec $1/6$, $1/90$ et $1/945$. Les coefficients et les valeurs de β_n ont aussi été contrôlés par une récurrence indépendante en arithmétique rationnelle exacte. Sur ces

exécutions, l'erreur relative des valeurs flottantes est inférieure à 2×10^{-15} .

Ces sorties sont des approximations numériques. La démonstration de la formule de β_n repose sur les questions précédentes, et non sur l'exécution du programme.

Relevé des adaptations

- Problème 1, I.1 : la désignation de $\mathcal{L}(E)$ comme « algèbre » est remplacée par celle d'espace vectoriel des endomorphismes ; les opérations utilisées restent la somme, la multiplication scalaire et la composition du programme.
- Problème 1, I.2 : précision $n \in \mathbb{N}$ conformément à la définition initiale des puissances. L'extension aux exposants négatifs est justifiée après le calcul de l'inverse en I.3.b.
- Problème 1, II.4 : rectification de la coquille « entier b » en « entier n » et précision de la convention pour les puissances négatives après justification de l'inversibilité.
- Problème II, I.C.2 : précision de la convention de prolongement continu de l'intégrande en 0, permise par I.C.1.b, pour expliciter la définition de l'intégrale.
- Problème II, III.A.2 : ajout des facteurs π manquants dans les deux arguments trigonométriques de la première formule et rétablissement du facteur $1/2$ dans la seconde. Les formules originales sont incompatibles avec II.B.4 ; les expressions corrigées sont démontrées et utilisées en III.A.3 et III.B.2.
- Problème II, III.B.1 : remplacement de la borne supérieure n par $2n$ dans la récurrence des coefficients, afin de couvrir tous les degrés du polynôme P_n .
- Problème II, III.B.2.b : code adapté en Python ; calcul de β_n avec le facteur $-1/2$ issu de la formule rectifiée et explication des commandes de saisie et d'affichage.