



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques 1

1992

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

PROBLÈME 1

Les parties I et II peuvent être traitées de façon indépendante, sauf la question II.3 qui utilise les résultats de I.

Partie préliminaire

On considère les deux matrices à coefficients réels :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pour a et b réels, on pose $M_{a,b} = aA + bB$.

Enfin, on note $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices $M_{a,b}$, c'est-à-dire $\mathcal{E} = \{M_{a,b} : (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Quelle est sa dimension ?
2. Exprimer en fonction de A et B les matrices suivantes : A^2 , AB , BA , B^2 .
3. Est-ce que le produit de deux matrices de $\mathcal{E}$ appartient à $\mathcal{E}$? Est-ce que ce produit est commutatif ?

Partie I : Éléments propres des matrices de $\mathcal{E}$

1. Montrer que $B^3 + B^2 - 2B = 0$.
2. a. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de B .

2. b. Montrer que les vecteurs propres de B sont des vecteurs propres de A . Quelles sont les valeurs propres associées? Est-ce que B et A sont diagonalisables?
3. Soit $M_{a,b}$ une matrice de $\mathcal{E}$.
3. a. Montrer que les vecteurs propres de B sont des vecteurs propres de $M_{a,b}$.
3. b. Préciser, en fonction de a et b , les valeurs propres de $M_{a,b}$. Est-ce que $M_{a,b}$ est diagonalisable?

Partie II : Exponentielle d'une matrice de $\mathcal{E}$

Soit $M_{a,b}$ une matrice de $\mathcal{E}$ telle que $(a, b) \neq (0, 0)$.

On considère les deux matrices suivantes : $M_1 = A + B$ et $M_2 = A - 2B$.

1. a. Calculer en fonction de M_1 et M_2 les matrices suivantes : M_1^2 , $M_1 M_2$, $M_2 M_1$, M_2^2 .
1. b. Montrer que (M_1, M_2) est une base du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathcal{E}$.
1. c. On pose $M_{a,b} = xM_1 + yM_2$. Exprimer x et y en fonction de a et b .
2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.
2. a. Calculer M_1^n et M_2^n .
2. b. En déduire l'expression de $M_{a,b}^n$ en fonction de n , a , b , M_1 et M_2 .
2. c. On pose

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} M_{a,b}^k,$$

avec la convention $M_{a,b}^0 = I$, matrice unité d'ordre 3.

Montrer qu'il existe deux réels λ_n et μ_n tels que $S_n = I + \lambda_n M_1 + \mu_n M_2$.

Montrer que les suites (λ_n) et (μ_n) convergent vers des réels λ et μ que l'on déterminera.

On rappelle que, pour tout réel x :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

3. On pose alors $e^{M_{a,b}} = I + \lambda M_1 + \mu M_2$.

Déterminer les vecteurs propres et les valeurs propres de $e^{M_{a,b}}$. Est-ce que $e^{M_{a,b}}$ est diagonalisable ?

PROBLÈME 2

Pour tout réel x , on note $E(x)$ la partie entière de x , c'est-à-dire l'entier relatif $E(x)$ tel que $E(x) \leq x < E(x) + 1$.

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+$, on note $f_\alpha : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f_\alpha(x) = x^\alpha E\left(\frac{1}{x}\right).$$

Partie I

1. Étudier la continuité de f_0 sur $[\frac{1}{4}, 2]$ et tracer la courbe représentative de f_0 sur cet intervalle, dans un repère orthonormé d'unité 5 cm.
2. Déterminer, pour $\alpha \in \mathbb{R}_+$ fixé, la limite de $f_\alpha(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs strictement positives. Pour quelles valeurs de α la fonction f_α peut-elle être prolongée par continuité à droite en 0 ?

3. Tracer les représentations graphiques de f_2 , f_1 et $f_{1/2}$ sur l'intervalle $[\frac{1}{4}, 2]$, sur trois figures distinctes, dans un repère orthonormé d'unité 5 cm.

Partie II

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$I_\alpha(n) = \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} f_\alpha(x) dx, \quad J_\alpha(n) = \sum_{p=1}^n I_\alpha(p).$$

1. Calculer $I_\alpha(n)$, pour $\alpha \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$J_\alpha(n) = \frac{1}{\alpha+1} \left(\sum_{p=1}^{n+1} \frac{1}{p^{\alpha+1}} - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \right).$$

3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ fixé.
3. a. Exprimer $J_\alpha(n)$ sous forme d'une seule intégrale.
3. b. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad J_\alpha(n) \leq \frac{1}{\alpha} \left(1 - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \right).$
3. c. Conclure quant à la convergence de la suite $(J_\alpha(n))_{n \geq 1}$.
4. a. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad J_0(n) = \sum_{p=2}^{n+1} \frac{1}{p}.$$

4. b. Établir : $\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{p} \geq \int_p^{p+1} \frac{dx}{x}.$
4. c. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $J_0(n) \geq \int_2^{n+2} \frac{dx}{x}.$
4. d. Conclure quant à la convergence de la suite $(J_0(n))_{n \geq 1}.$

Partie III

On note $M = 3 \lim_{n \rightarrow +\infty} J_2(n)$, c'est-à-dire

$$M = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^3}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, on note :

$$u_n = \frac{1}{n^3}, \quad v_n = \frac{1}{(n-1)n(n+1)}, \quad w_n = v_n - u_n.$$

1. a. Montrer qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, \quad v_n = \frac{a}{n-1} + \frac{b}{n} + \frac{c}{n+1},$$

et calculer a, b et c .

1. b. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$:

$$\sum_{p=2}^n v_p = \frac{1}{4} - \frac{1}{2n(n+1)}.$$

1. c. Montrer que la série

$$\sum_{p \geq 2} v_p$$

converge et calculer sa somme.

1. d. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, calculer

$$\sum_{p=n+1}^{+\infty} v_p.$$

2. a. Calculer w_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$.

2. b. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$: $w_n = \frac{v_n}{n^2}$.

2. c. Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$:

$$0 \leq \sum_{p=n+1}^{+\infty} w_p \leq \frac{1}{2n^4}.$$

3. a. Déterminer un entier naturel n tel que $\frac{1}{2n^4} \leq \frac{10^{-7}}{2}$.

3. b. En déduire une valeur approchée de M à 10^{-7} près.