



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EMLYON — 1992

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

PROBLÈME 1

Partie préliminaire

1. Par définition, $\mathcal{E} = \text{Vect}(A, B)$. C'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et, en particulier, un espace vectoriel réel.

Pour déterminer sa dimension, on vérifie la liberté de (A, B) . Supposons $aA + bB = 0$. Le coefficient de position $(1, 1)$ de cette matrice vaut a , donc $a = 0$. Le coefficient de position $(1, 3)$ vaut b , donc $b = 0$. La famille (A, B) est libre et engendre $\mathcal{E}$; c'est une base. Ainsi :

$$\dim \mathcal{E} = 2.$$

2. On effectue les produits matriciels, en utilisant les signes de chaque coefficient :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 2A,$$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} = 2B, \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} = 2B,$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = A - B.$$

Les quatre résultats sont donc $A^2 = 2A$, $AB = BA = 2B$ et $B^2 = A - B$.

3. Soient $M_{a,b} = aA + bB$ et $M_{c,d} = cA + dB$ deux éléments de $\mathcal{E}$. Par distributivité et les produits calculés précédemment :

$$M_{a,b}M_{c,d} = acA^2 + adAB + bcBA + bdB^2 = (2ac + bd)A + (2ad + 2bc - bd)B.$$

Ce produit appartient donc à $\mathcal{E}$. En échangeant (a, b) et (c, d) , les deux coefficients obtenus restent les mêmes. Ainsi :

$$M_{a,b}M_{c,d} = M_{c,d}M_{a,b}.$$

Le produit de deux éléments de $\mathcal{E}$ appartient à $\mathcal{E}$ et il est commutatif sur cet ensemble.

Partie I : Éléments propres des matrices de $\mathcal{E}$

1. De $B^2 = A - B$ et $AB = 2B$, on déduit :

$$B^3 = B(A - B) = BA - B^2 = 2B - (A - B) = 3B - A.$$

Donc :

$$B^3 + B^2 - 2B = (3B - A) + (A - B) - 2B = 0.$$

2. a. On utilise d'abord le polynôme annulateur pour limiter les valeurs propres possibles. Soit θ une valeur propre réelle de B et $X \neq 0$ un vecteur propre associé. L'égalité de I.1 donne :

$$0 = (B^3 + B^2 - 2B)X = (\theta^3 + \theta^2 - 2\theta)X.$$

Comme $X \neq 0$, $\theta(\theta - 1)(\theta + 2) = 0$. Les seules valeurs propres possibles sont donc 0, 1 et -2 .

On détermine maintenant leurs espaces propres par résolution des systèmes. Pour $X = {}^t(x, y, z)$:

$$BX = \begin{pmatrix} z \\ -z \\ x - y - z \end{pmatrix}.$$

Pour $\theta = 0$, le système impose $z = 0$ et $x = y$. Donc :

$$E_0(B) = \text{Vect}(v_0), \quad v_0 = {}^t(1, 1, 0).$$

Pour $\theta = 1$, les deux premières lignes imposent $z = x$ et $y = -z = -x$. La troisième ligne devient alors $x - (-x) - x = x = z$, et est satisfaite. Donc :

$$E_1(B) = \text{Vect}(v_1), \quad v_1 = {}^t(1, -1, 1).$$

Pour $\theta = -2$, les deux premières lignes imposent $z = -2x$ et $y = -x$. La troisième donne alors $x - (-x) - (-2x) = 4x = -2z$, et est satisfaite. Donc :

$$E_{-2}(B) = \text{Vect}(v_{-2}), \quad v_{-2} = {}^t(1, -1, -2).$$

Les trois espaces contiennent un vecteur non nul ; 0, 1 et -2 sont bien les trois valeurs

propres de B . Ses vecteurs propres sont exactement les multiples non nuls de v_0 , de v_1 ou de v_{-2} , avec la valeur propre associée à chaque droite.

2. b. Méthode 1 — Exploiter la relation polynomiale entre A et B

La partie préliminaire donne $A = B^2 + B$. Si $BX = \theta X$ avec $X \neq 0$, alors :

$$AX = (B^2 + B)X = (\theta^2 + \theta)X.$$

Chaque vecteur propre de B est donc un vecteur propre de A . Pour $\theta = 0$, la valeur propre associée de A est 0 ; pour $\theta = 1$ et $\theta = -2$, elle vaut 2.

Les vecteurs v_0 , v_1 et v_{-2} sont associés à trois valeurs propres distinctes de B , donc ils sont libres. Ils forment une base de $\mathbb{R}^3$. Dans cette base, les deux matrices sont diagonales :

$$P^{-1}BP = \text{diag}(0, 1, -2), \quad P^{-1}AP = \text{diag}(0, 2, 2),$$

où P est la matrice dont les colonnes sont v_0 , v_1 et v_{-2} . Sa liberté assure que P est inversible. Ainsi B et A sont diagonalisables.

Méthode 2 — Calcul direct dans la base de vecteurs propres

Pour $X = {}^t(x, y, z)$, on a $AX = {}^t(x - y, -x + y, 2z)$. En substituant les trois vecteurs trouvés :

$$Av_0 = 0, \quad Av_1 = 2v_1, \quad Av_{-2} = 2v_{-2}.$$

Chaque espace propre de B étant une droite engendrée par l'un de ces vecteurs, tout vecteur propre de B est aussi propre pour A , avec les mêmes correspondances $0 \mapsto 0$,

$1 \mapsto 2$ et $-2 \mapsto 2$. La base (v_0, v_1, v_{-2}) rend encore les deux matrices diagonales, donc prouve leur diagonalisation.

La première méthode réutilise une identité de matrices et s'étend à tout polynôme de B ; la seconde contrôle directement l'action de A sur les vecteurs déjà calculés.

3. a. Si X est un vecteur propre de B associé à $\theta \in \{0, 1, -2\}$, la question I.2.b donne $AX = (\theta^2 + \theta)X$. Ainsi :

$$M_{a,b}X = aAX + bBX = (a(\theta^2 + \theta) + b\theta)X.$$

Comme $X \neq 0$, c'est bien un vecteur propre de $M_{a,b}$.

3. b. On pose, pour alléger les formules, $L = 2a + b$ et $K = 2a - 2b$. Les images des trois vecteurs de base sont :

$$M_{a,b}v_0 = 0, \quad M_{a,b}v_1 = Lv_1, \quad M_{a,b}v_{-2} = Kv_{-2}.$$

Donc, dans la base (v_0, v_1, v_{-2}) :

$$P^{-1}M_{a,b}P = \text{diag}(0, L, K).$$

Les valeurs propres sont les valeurs distinctes parmi 0 , $2a + b$ et $2a - 2b$. La matrice est diagonalisable pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, y compris lorsque certaines de ces valeurs sont égales : on dispose toujours de la même base de vecteurs propres.

Plus précisément, pour une valeur propre ρ , son espace propre est engendré par ceux des vecteurs v_0 , v_1 et v_{-2} dont la valeur propre associée vaut ρ . Cette description traite toutes les coïncidences, notamment $(a, b) = (0, 0)$, où $M_{a,b} = 0$ et $E_0(M_{a,b}) = \mathbb{R}^3$.

Partie II : Exponentielle d'une matrice de $\mathcal{E}$

On conserve $L = 2a + b$ et $K = 2a - 2b$.

1. a. En développant les produits, puis en utilisant les résultats préliminaires :

$$M_1^2 = (A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 = 2A + 2B + 2B + (A - B) = 3(A + B) = 3M_1.$$

De même :

$$M_1 M_2 = (A + B)(A - 2B) = A^2 - 2AB + BA - 2B^2 = 2A - 4B + 2B - 2(A - B) = 0.$$

Les matrices A et B commutent, donc leurs combinaisons linéaires M_1 et M_2 commutent ; ainsi $M_2 M_1 = 0$.

Enfin :

$$\begin{aligned} M_2^2 &= (A - 2B)^2 = A^2 - 2AB - 2BA + 4B^2 = 2A - 4B - 4B + 4(A - B) \\ &= 6(A - 2B) = 6M_2. \end{aligned}$$

Les résultats sont donc $M_1^2 = 3M_1$, $M_1 M_2 = M_2 M_1 = 0$ et $M_2^2 = 6M_2$.

1. b. Les matrices M_1 et M_2 appartiennent à $\mathcal{E}$. Supposons $xM_1 + yM_2 = 0$. En les exprimant dans la base (A, B) :

$$(x + y)A + (x - 2y)B = 0.$$

La liberté de (A, B) impose $x + y = 0$ et $x - 2y = 0$. La soustraction donne $3y = 0$, donc $y = 0$ puis $x = 0$. La famille (M_1, M_2) est libre. Elle contient deux éléments dans l'espace $\mathcal{E}$ de dimension 2 ; c'est une base de cet espace.

1. c. On identifie les coordonnées dans (A, B) :

$$aA + bB = x(A + B) + y(A - 2B) \iff \begin{cases} x + y = a, \\ x - 2y = b. \end{cases}$$

En soustrayant les deux équations, $3y = a - b$, puis $x = a - y$. Ainsi :

$$x = \frac{2a + b}{3} = \frac{L}{3}, \quad y = \frac{a - b}{3} = \frac{K}{6}.$$

2. a. On prouve par récurrence que $M_1^n = 3^{n-1}M_1$ pour tout $n \geq 1$. Au rang 1, la formule vaut $M_1 = M_1$. Si elle est vraie au rang n , alors :

$$M_1^{n+1} = 3^{n-1}M_1^2 = 3^n M_1.$$

De la même façon, en utilisant $M_2^2 = 6M_2$, on obtient $M_2^n = 6^{n-1}M_2$. Donc :

$$\forall n \geq 1, \quad M_1^n = 3^{n-1}M_1, \quad M_2^n = 6^{n-1}M_2.$$

2. b. Méthode 1 — Binôme pour des matrices qui commutent

On écrit $M_{a,b} = xM_1 + yM_2$. Les deux matrices commutent, donc la formule du binôme s'applique. Pour $n \geq 1$, tous les termes mixtes sont nuls, puisque $M_1M_2 = 0$. Plus précisément, si $1 \leq j \leq n-1$, alors $M_1^j M_2^{n-j} = M_1^{j-1}(M_1M_2)M_2^{n-j-1} = 0$. Il reste :

$$M_{a,b}^n = x^n M_1^n + y^n M_2^n.$$

Pour $n = 1$, la même formule résulte directement de la définition et ne comporte aucun terme mixte. Avec II.2.a et II.1.c :

$$M_{a,b}^n = \left(\frac{L}{3}\right)^n 3^{n-1} M_1 + \left(\frac{K}{6}\right)^n 6^{n-1} M_2 = \frac{L^n}{3} M_1 + \frac{K^n}{6} M_2.$$

Méthode 2 — Deux projecteurs dont le produit est nul

Posons $Q_1 = \frac{1}{3}M_1$ et $Q_2 = \frac{1}{6}M_2$. La question II.1.a donne $Q_1^2 = Q_1$, $Q_2^2 = Q_2$ et $Q_1Q_2 = Q_2Q_1 = 0$. De plus, $M_{a,b} = LQ_1 + KQ_2$.

On montre par récurrence que $M_{a,b}^n = L^n Q_1 + K^n Q_2$ pour $n \geq 1$. La formule est vraie à $n = 1$. Si elle est vraie au rang n , on multiplie par $LQ_1 + KQ_2$; les deux termes mixtes s'annulent et les relations de projecteur donnent :

$$M_{a,b}^{n+1} = L^{n+1} Q_1 + K^{n+1} Q_2.$$

On retrouve donc :

$$M_{a,b}^n = \frac{(2a+b)^n}{3} M_1 + \frac{(2a-2b)^n}{6} M_2.$$

La méthode du binôme est la plus directe avec les produits précédents; la seconde met en évidence les projecteurs associés aux deux composantes de la matrice. Les deux formules restent valables si $L = 0$ ou $K = 0$, car les seules divisions sont par 3 et 6.

2. c. On sépare le terme $k = 0$, égal à I , puis on utilise II.2.b dans une somme finie :

$$S_n = I + \frac{1}{3} \left(\sum_{k=1}^n \frac{L^k}{k!} \right) M_1 + \frac{1}{6} \left(\sum_{k=1}^n \frac{K^k}{k!} \right) M_2.$$

Ainsi, on peut prendre :

$$\lambda_n = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \frac{L^k}{k!}, \quad \mu_n = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^n \frac{K^k}{k!}.$$

Ces coefficients sont uniques, puisque (M_1, M_2) est libre. La série exponentielle rappelée dans le sujet converge pour tout réel, notamment pour L et K . Le retrait de son terme d'indice 0, égal à 1, donne :

$$\lambda_n \longrightarrow \lambda = \frac{e^{2a+b} - 1}{3}, \quad \mu_n \longrightarrow \mu = \frac{e^{2a-2b} - 1}{6}.$$

3. On utilise la définition particulière de l'exponentielle donnée dans le sujet. L'action de $M_1 = A + B$ et de $M_2 = A - 2B$ sur les vecteurs de I.2 est :

$$M_1 v_0 = M_2 v_0 = 0, \quad M_1 v_1 = 3v_1, \quad M_2 v_1 = 0, \quad M_1 v_{-2} = 0, \quad M_2 v_{-2} = 6v_{-2}.$$

Par conséquent :

$$e^{M_{a,b}} v_0 = v_0,$$

$$e^{M_{a,b}} v_1 = (1 + 3\lambda) v_1 = e^{2a+b} v_1,$$

$$e^{M_{a,b}} v_{-2} = (1 + 6\mu) v_{-2} = e^{2a-2b} v_{-2}.$$

La base (v_0, v_1, v_{-2}) diagonalise donc $e^{M_{a,b}}$, avec diagonale $(1, e^L, e^K)$. Les valeurs propres sont les valeurs distinctes parmi 1, e^{2a+b} et e^{2a-2b} .

Pour déterminer tous les vecteurs propres, il faut tenir compte des coïncidences.

L'exponentielle réelle est injective, donc $e^L = e^K$ équivaut à $L = K$, c'est-à-dire $b = 0$. De

même, $e^L = 1$ équivaut à $L = 0$, et $e^K = 1$ à $K = 0$. Sous l'hypothèse $(a, b) \neq (0, 0)$, on obtient les cas suivants :

Conditions	Valeurs propres	Espaces propres associés
$b \neq 0, L \neq 0, K \neq 0$	$1, e^L, e^K$	Respectivement $\text{Vect}(v_0)$, $\text{Vect}(v_1)$, $\text{Vect}(v_{-2})$
$b = 0, a \neq 0$	$1, e^{2a}$	Respectivement $\text{Vect}(v_0)$ et $\text{Vect}(v_1, v_{-2})$
$L = 0$	$1, e^K$	Respectivement $\text{Vect}(v_0, v_1)$ et $\text{Vect}(v_{-2})$
$K = 0$	$1, e^L$	Respectivement $\text{Vect}(v_0, v_{-2})$ et $\text{Vect}(v_1)$

Dans la troisième ligne, $K \neq 0$; dans la quatrième, $L \neq 0$, sinon $a = b = 0$. Les vecteurs propres sont exactement les vecteurs non nuls des espaces indiqués. Dans tous les cas, $e^{M_{a,b}}$ est diagonalisable.

PROBLÈME 2

Partie I

1. Pour $x > 0$, $f_0(x) = E(1/x)$. Si $k \geq 1$ est entier, on a :

$$E(1/x) = k \iff k \leq \frac{1}{x} < k+1 \iff \frac{1}{k+1} < x \leq \frac{1}{k}.$$

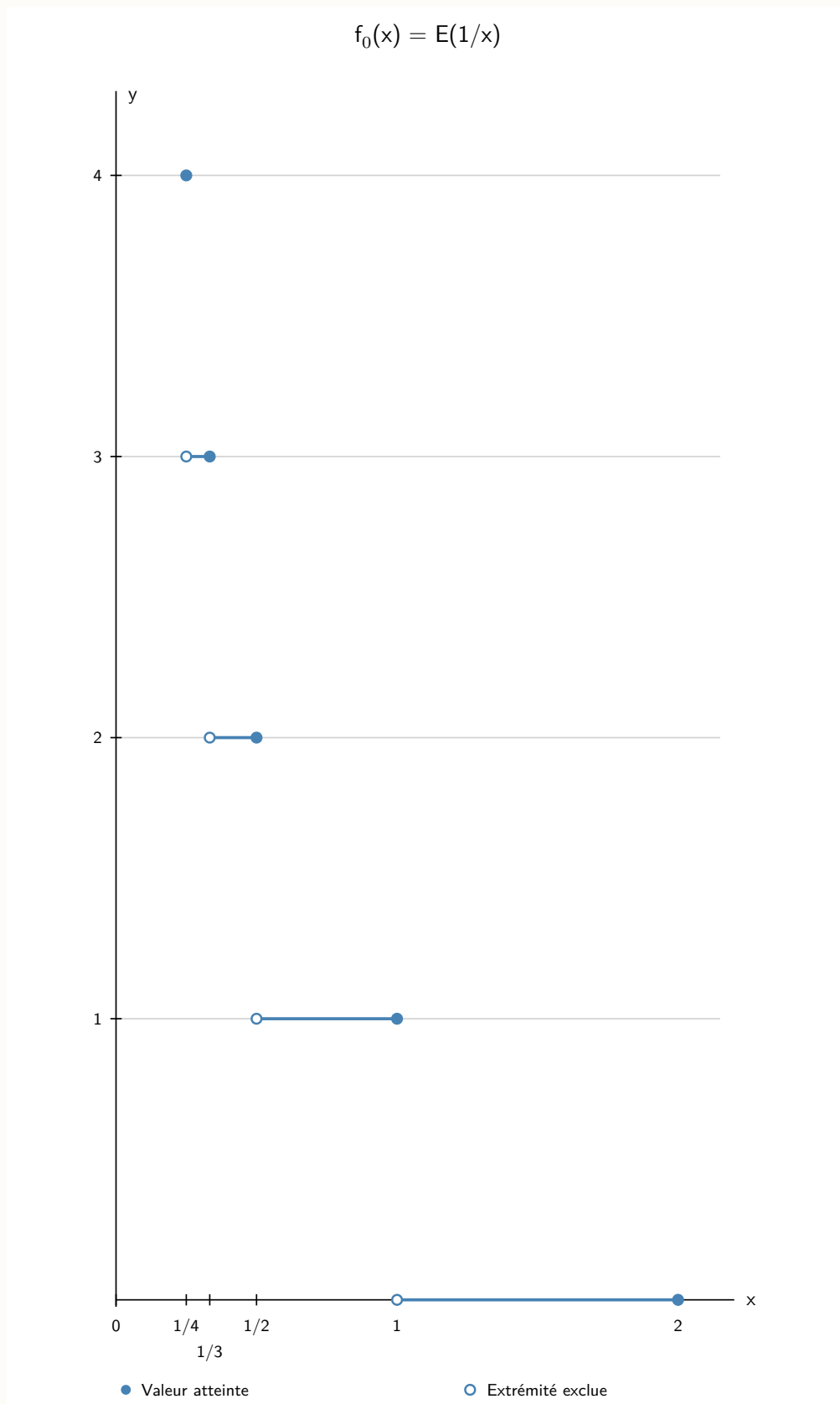
De plus, si $x > 1$, alors $0 < 1/x < 1$, donc $E(1/x) = 0$. Sur l'intervalle demandé, on obtient :

$$f_0(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } x = \frac{1}{4}, \\ 3 & \text{si } \frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{3}, \\ 2 & \text{si } \frac{1}{3} < x \leq \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1, \\ 0 & \text{si } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

La fonction est constante, donc continue, à l'intérieur de chacun de ces intervalles. À $x = \frac{1}{k}$, pour $k \in \{1, 2, 3\}$, sa valeur et sa limite à gauche valent k , tandis que sa limite à droite vaut $k - 1$; elle est donc discontinue. À la borne $\frac{1}{4}$, sa valeur vaut 4 et sa limite à droite vaut 3, donc elle n'est pas continue relativement à $[\frac{1}{4}, 2]$. À la borne 2, sa valeur et sa limite à gauche valent 0 ; elle est continue relativement à l'intervalle.

Ainsi, les seuls points de discontinuité sur $[\frac{1}{4}, 2]$ sont $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ et 1.

Le graphe est composé de segments horizontaux. Un point plein indique une valeur prise par la fonction ; un point blanc indique l'extrémité exclue d'un segment. Le point $(\frac{1}{4}, 4)$ est isolé dans le graphe restreint à l'intervalle.



2. On utilise les inégalités caractérisant la partie entière. Pour $x > 0$:

$$\frac{1}{x} - 1 < E(1/x) \leq \frac{1}{x}.$$

La multiplication par $x > 0$ donne $1 - x < xE(1/x) \leq 1$. Par encadrement, $xE(1/x) \rightarrow 1$ lorsque $x \rightarrow 0^+$. Pour $\alpha \geq 0$ fixé :

$$f_\alpha(x) = x^{\alpha-1}(xE(1/x)) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} x^{\alpha-1}.$$

On distingue alors les cas :

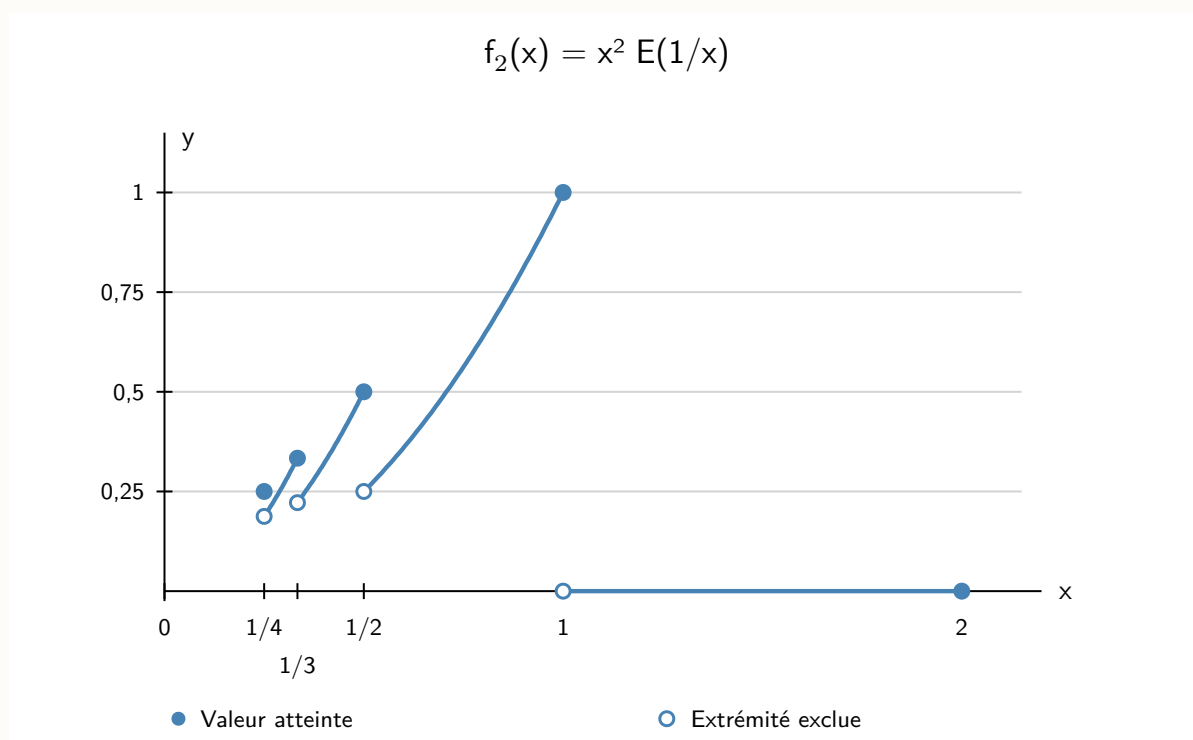
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_\alpha(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } 0 \leq \alpha < 1, \\ 1 & \text{si } \alpha = 1, \\ 0 & \text{si } \alpha > 1. \end{cases}$$

Un prolongement par continuité à droite en 0, à valeurs réelles, existe donc exactement pour $\alpha \geq 1$. Il est obtenu en posant $f_1(0) = 1$ si $\alpha = 1$, et $f_\alpha(0) = 0$ si $\alpha > 1$.

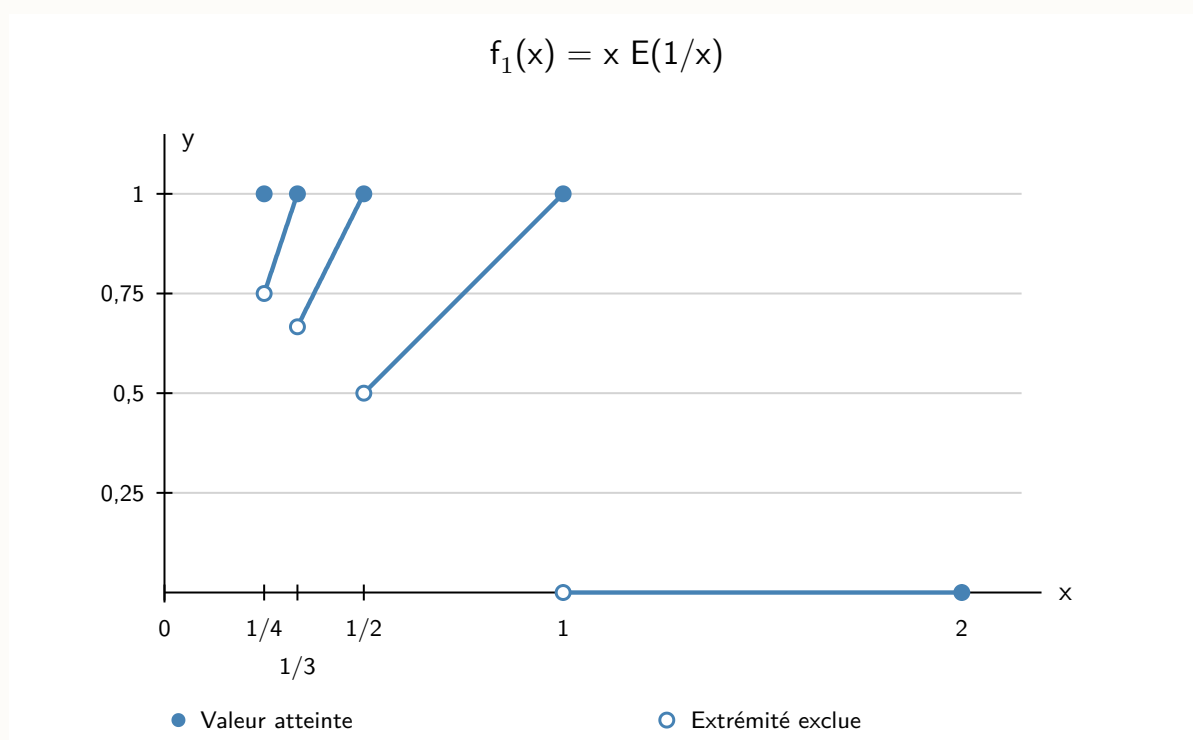
- 3.** Pour tracer chaque courbe, on multiplie les valeurs de la partie entière trouvées en I.1 par x^α . Sur $[\frac{1}{4}, 2]$:

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} 4(\frac{1}{4})^\alpha & \text{si } x = \frac{1}{4}, \\ 3x^\alpha & \text{si } \frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{3}, \\ 2x^\alpha & \text{si } \frac{1}{3} < x \leq \frac{1}{2}, \\ x^\alpha & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1, \\ 0 & \text{si } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Pour $\alpha = 2$, les arcs sont les portions des paraboles $y = 3x^2$, $y = 2x^2$ et $y = x^2$, puis le segment d'ordonnée nulle. Les valeurs aux points $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ et 1 sont respectivement $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ et 1. Les limites à droite correspondantes sont $\frac{3}{16}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{1}{4}$ et 0.

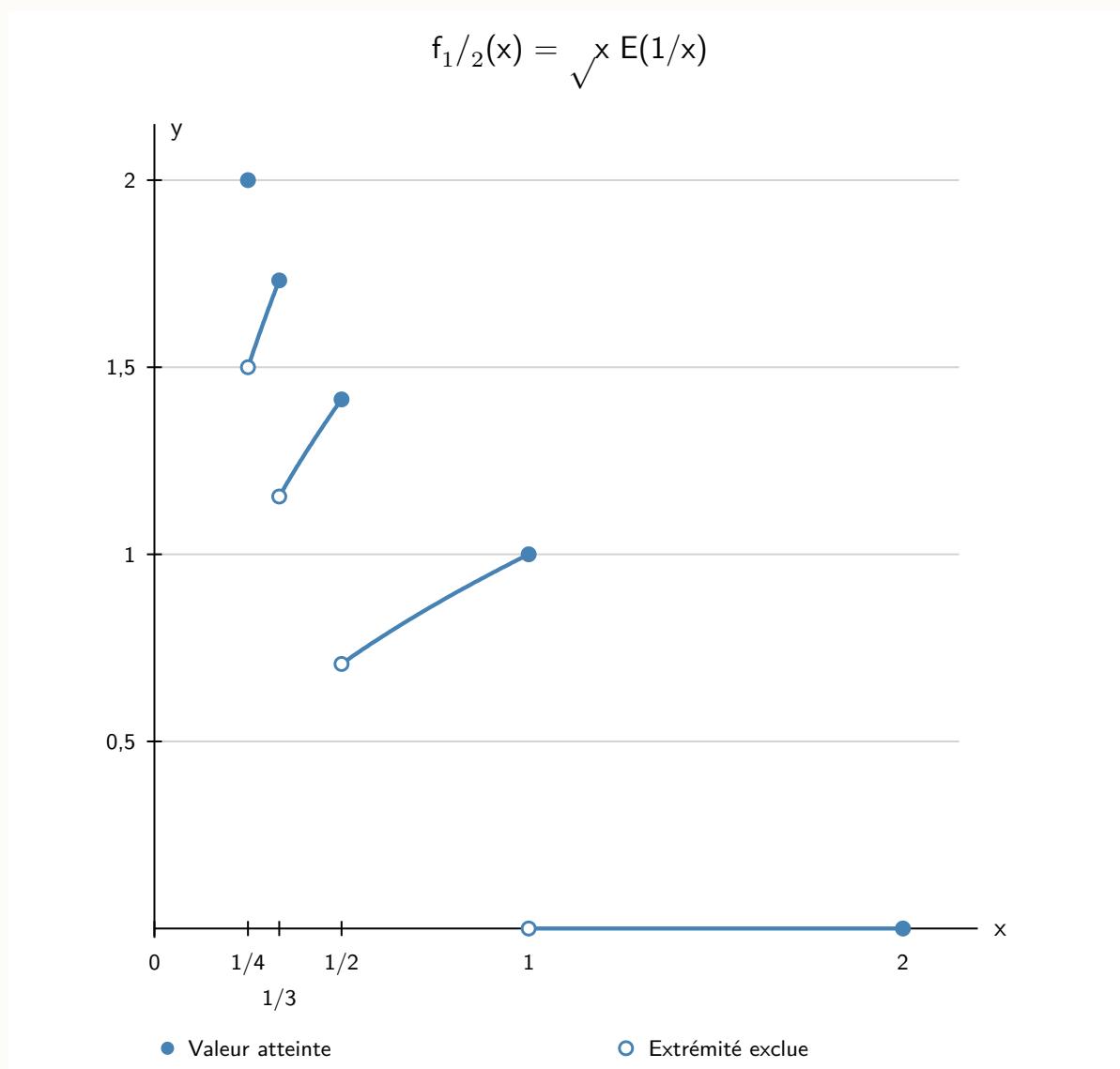


Pour $\alpha = 1$, les arcs sont les segments des droites $y = 3x$, $y = 2x$ et $y = x$, puis le segment d'ordonnée nulle. Les valeurs aux quatre points de saut sont toutes égales à 1. Les limites à droite correspondantes sont $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$ et 0.



Pour $\alpha = \frac{1}{2}$, les arcs sont ceux des courbes $y = 3\sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$ et $y = \sqrt{x}$, puis le

segment d'ordonnée nulle. Les valeurs aux quatre points de saut sont respectivement 2, $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$ et 1. Les limites à droite correspondantes sont $\frac{3}{2}$, $\frac{2}{\sqrt{3}}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et 0.



Les quatre dessins utilisent la même unité sur les deux axes de chaque repère. Leurs coordonnées sont calculées à partir des formules exactes, et les points pleins et blancs distinguent les valeurs de la fonction de ses limites à droite.

Partie II

1. Fixons $\alpha \geq 0$ et $n \geq 1$. Sur $]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$, on a $E(1/x) = n$, donc $f_\alpha(x) = nx^\alpha$. À la borne inférieure seulement, la valeur est $(n+1)(\frac{1}{n+1})^\alpha$. Cette différence en un point ne change pas l'intégrale.

La fonction est bornée sur le segment et y est continue par morceaux ; l'intégrale existe. Comme $\alpha + 1 > 0$, une primitive donne :

$$I_\alpha(n) = n \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} x^\alpha dx = \frac{n}{\alpha+1} \left(\frac{1}{n^{\alpha+1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha+1}} \right).$$

Cette expression est valable pour tous $\alpha \geq 0$ et $n \geq 1$.

2. Question adaptée au programme actuel — Rectification locale du domaine : le PDF annonce ici $\alpha \in \mathbb{R}$, alors que f_α , I_α et J_α ont été définis pour $\alpha \geq 0$, et que le membre de droite n'est pas défini à $\alpha = -1$. On conserve le domaine cohérent $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

En sommant la formule de II.1 et en décalant l'indice $q = p + 1$ dans la seconde somme :

$$(\alpha+1)J_\alpha(n) = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p^\alpha} - \sum_{q=2}^{n+1} \frac{q-1}{q^{\alpha+1}}.$$

On écrit $\frac{q-1}{q^{\alpha+1}} = \frac{1}{q^\alpha} - \frac{1}{q^{\alpha+1}}$. Ainsi :

$$(\alpha+1)J_\alpha(n) = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p^\alpha} - \sum_{q=2}^{n+1} \frac{1}{q^\alpha} + \sum_{q=2}^{n+1} \frac{1}{q^{\alpha+1}}.$$

La différence des deux premières sommes vaut $1 - \frac{1}{(n+1)^\alpha}$. On réunit le terme 1 à la dernière somme, puis on divise par $\alpha + 1 > 0$. On obtient :

$$J_\alpha(n) = \frac{1}{\alpha + 1} \left(\sum_{p=1}^{n+1} \frac{1}{p^{\alpha+1}} - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \right).$$

3. a. Les segments d'intégration de $I_\alpha(p)$, pour $p = 1, \dots, n$, se suivent sans laisser d'intervalle vide : ils couvrent $[\frac{1}{n+1}, 1]$. La fonction f_α y est continue par morceaux, avec seulement un nombre fini de sauts. La relation de Chasles donne donc :

$$J_\alpha(n) = \sum_{p=1}^n \int_{\frac{1}{p+1}}^{\frac{1}{p}} f_\alpha(x) dx = \int_{\frac{1}{n+1}}^1 f_\alpha(x) dx.$$

3. b. Pour $x > 0$, on a $0 \leq E(1/x) \leq 1/x$. La multiplication par $x^\alpha > 0$ donne $0 \leq f_\alpha(x) \leq x^{\alpha-1}$. On intègre sur le segment de II.3.a :

$$0 \leq J_\alpha(n) \leq \int_{\frac{1}{n+1}}^1 x^{\alpha-1} dx = \frac{1}{\alpha} \left(1 - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \right),$$

où l'on utilise l'hypothèse $\alpha > 0$. L'inégalité demandée est établie.

3. c. Méthode 1 — Suite croissante et majorée

Chaque intégrale $I_\alpha(n)$ est positive ou nulle. Ainsi $J_\alpha(n+1) - J_\alpha(n) = I_\alpha(n+1) \geq 0$: la suite est croissante.

D'après II.3.b, $J_\alpha(n) \leq \frac{1}{\alpha}$. Elle est donc majorée et converge vers un réel, par le théorème de la limite monotone.

Méthode 2 — Expression à l'aide d'une série de Riemann

La formule de II.2 exprime $J_\alpha(n)$ à partir des sommes partielles de

$$\sum_{p \geq 1} \frac{1}{p^{\alpha+1}}.$$

Comme $\alpha + 1 > 1$, cette série de Riemann converge. De plus, $(n + 1)^{-\alpha} \rightarrow 0$. Ainsi :

$$J_\alpha(n) \longrightarrow \frac{1}{\alpha + 1} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^{\alpha+1}}.$$

La première méthode est celle suggérée par la majoration précédente ; la seconde identifie en plus la limite. En particulier, pour $\alpha = 2$, elle justifie la relation entre M et la série utilisée dans la partie III.

4. a. La formule II.2 s'applique à $\alpha = 0$ et donne :

$$J_0(n) = \sum_{p=1}^{n+1} \frac{1}{p} - 1 = \sum_{p=2}^{n+1} \frac{1}{p}.$$

4. b. Pour $p \geq 1$ et $x \in [p, p + 1]$, on a $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{p}$. En intégrant sur un segment de longueur 1 :

$$\int_p^{p+1} \frac{dx}{x} \leq \int_p^{p+1} \frac{dx}{p} = \frac{1}{p}.$$

4. c. On somme les inégalités II.4.b pour $p = 2, \dots, n + 1$. La relation de Chasles et II.4.a donnent :

$$J_0(n) = \sum_{p=2}^{n+1} \frac{1}{p} \geq \sum_{p=2}^{n+1} \int_p^{p+1} \frac{dx}{x} = \int_2^{n+2} \frac{dx}{x}.$$

4. d. La minoration précédente s'écrit :

$$J_0(n) \geq \ln(n+2) - \ln 2 = \ln \left(\frac{n+2}{2} \right).$$

Le membre de droite tend vers $+\infty$. Donc $J_0(n) \rightarrow +\infty$: la suite diverge vers $+\infty$ et ne converge pas vers un réel.

Partie III

On utilise

$$M = \sum_{p=1}^{+\infty} p^{-3},$$

série convergente de Riemann. Les suites u_n , v_n et w_n sont définies pour $n \geq 2$.

1. a. Pour $n \geq 2$, le dénominateur $(n-1)n(n+1)$ est non nul. L'égalité demandée équivaut, après multiplication par ce dénominateur, à :

$$1 = an(n+1) + b(n-1)(n+1) + c(n-1)n.$$

Le membre de droite se développe en :

$$(a+b+c)n^2 + (a-c)n - b.$$

On impose l'égalité des coefficients avec le polynôme constant 1 :

$$a + b + c = 0, \quad a - c = 0, \quad -b = 1.$$

Ces conditions donnent $b = -1$ et $a = c = \frac{1}{2}$. Par substitution, l'identité polynomiale est vérifiée pour tout réel ; elle donne donc la décomposition demandée pour tout entier $n \geq 2$:

$$v_n = \frac{1}{2(n-1)} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2(n+1)}.$$

1. b. La décomposition précédente peut se réécrire :

$$v_p = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \right).$$

En sommant pour $p = 2, \dots, n$, les deux sommes sont télescopiques :

$$\sum_{p=2}^n v_p = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2(n+1)}.$$

En réduisant les deux derniers termes au même dénominateur :

$$\sum_{p=2}^n v_p = \frac{1}{4} - \frac{1}{2n(n+1)}.$$

1. c. La somme partielle obtenue en III.1.b tend vers $\frac{1}{4}$, puisque $\frac{1}{2n(n+1)} \rightarrow 0$. Par définition de la convergence d'une série :

$$\sum_{p=2}^{+\infty} v_p = \frac{1}{4}.$$

1. d. La série étant convergente, sa somme peut être décomposée en une somme finie et son reste. Pour $n \geq 2$:

$$\sum_{p=n+1}^{+\infty} v_p = \sum_{p=2}^{+\infty} v_p - \sum_{p=2}^n v_p = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2n(n+1)} \right) = \frac{1}{2n(n+1)}.$$

2. a. Pour $n \geq 2$, on a $(n-1)n(n+1) = n(n^2-1)$, avec $n^2-1 > 0$. En mettant les deux termes au même dénominateur :

$$w_n = \frac{1}{n(n^2-1)} - \frac{1}{n^3} = \frac{n^2 - (n^2-1)}{n^3(n^2-1)} = \frac{1}{n^3(n^2-1)}.$$

En particulier, $w_n > 0$.

2. b. La formule III.2.a et celle de v_n donnent :

$$\frac{v_n}{n^2} = \frac{1}{n^2} \frac{1}{n(n^2-1)} = \frac{1}{n^3(n^2-1)} = w_n.$$

2. c. On justifie d'abord que les sommes infinies existent. Pour tout $p \geq 2$,
 $0 \leq w_p = \frac{v_p}{p^2} \leq \frac{1}{4}v_p$. La série

$$\sum_{p \geq 2} v_p$$

converge par III.1.c ; par comparaison de séries à termes positifs,

$$\sum_{p \geq 2} w_p$$

converge également.

Fixons $n \geq 2$. Si $p \geq n + 1$, alors $p^2 \geq n^2 > 0$, donc $0 \leq w_p \leq \frac{1}{n^2} v_p$. On somme cette inégalité jusqu'à un entier $N \geq n + 1$, puis on fait tendre N vers l'infini, avec les convergences déjà établies. Il vient, par III.1.d :

$$0 \leq \sum_{p=n+1}^{+\infty} w_p \leq \frac{1}{n^2} \sum_{p=n+1}^{+\infty} v_p = \frac{1}{2n^3(n+1)} \leq \frac{1}{2n^4}.$$

C'est la majoration demandée.

3. a. Pour un entier $n \geq 2$, l'inégalité demandée équivaut à :

$$\frac{1}{2n^4} \leq \frac{10^{-7}}{2} \iff n^4 \geq 10^7.$$

On calcule $56^4 = 9\,834\,496 < 10^7$ et $57^4 = 10\,556\,001 > 10^7$. Ainsi $n = 57$ convient ; c'est même le plus petit entier positif satisfaisant l'inégalité.

3. b. Les trois séries utilisées ici sont convergentes :

$$\sum_{p \geq 1} u_p$$

est une série de Riemann, et la convergence des séries de v_p et de w_p a été établie. Puisque $u_p = v_p - w_p$ pour $p \geq 2$, leur linéarité donne :

$$M = u_1 + \sum_{p=2}^{+\infty} u_p = 1 + \sum_{p=2}^{+\infty} v_p - \sum_{p=2}^{+\infty} w_p = \frac{5}{4} - \sum_{p=2}^{+\infty} w_p.$$

Posons, pour $n \geq 2$:

$$T_n = \frac{5}{4} - \sum_{p=2}^n \frac{1}{p^3(p^2-1)}.$$

Alors

$$T_n - M = \sum_{p=n+1}^{+\infty} w_p.$$

La question III.2.c donne l'encadrement certifié :

$$T_n - \frac{1}{2n^4} \leq M \leq T_n.$$

Avec $n = 57$, le calcul de la somme finie donne $T_{57} \approx 1,202056926028572$ et $\frac{1}{2 \cdot 57^4} \approx 0,000000047366422$. En arrondissant les bornes vers l'extérieur, on obtient :

$$1,2020568786 \leq M \leq 1,2020569261.$$

Chaque terme de la somme finie est rationnel ; cet encadrement décimal s'obtient en comparant les bornes rationnelles exactes aux décimaux indiqués. Il ne repose donc pas sur une observation de stabilité des décimales.

Le nombre $1,2020569$ est situé dans cet intervalle, et sa distance à chacune des deux bornes est inférieure à $3 \cdot 10^{-8}$. On peut ainsi conclure :

$$M \approx 1,2020569 \quad \text{avec une erreur strictement inférieure à } 10^{-7}.$$

La somme finie fournit la valeur numérique ; la majoration du reste fournit la garantie de précision.

Relevé des adaptations

Problème 2, partie II, question 2 : remplacement de la condition $\alpha \in \mathbb{R}$ par $\alpha \in \mathbb{R}_+$, conformément aux définitions de f_α , I_α et J_α . Le domaine initial annoncé comprenait notamment $\alpha = -1$, pour lequel la formule n'est pas définie. Aucune question ultérieure n'utilise de paramètre négatif.