



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques

1990

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Les deux problèmes sont indépendants.

Problème 1

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On note E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à n .

Pour tout entier $k \in \{0, \dots, n\}$, μ_k est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall t \in \mathbb{R}, \mu_k(t) = t^k$.

1. Montrer que, pour tout entier $k \in \{0, \dots, n\}$, l'intégrale $\int_{-\infty}^0 t^k e^t dt$ est convergente.

2. Soit $f \in E$. Montrer qu'on peut définir une fonction g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = e^{-x} \int_{-\infty}^x f(t) e^t dt.$$

Cette fonction g dépend de f et est notée $L(f)$.

3. a. Calculer $L(\mu_0)$, $L(\mu_1)$ et $L(\mu_2)$.

3. b. Montrer que, pour tout entier $k \in \{0, \dots, n-1\}$: $L(\mu_{k+1}) = \mu_{k+1} - (k+1)L(\mu_k)$.

En déduire, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$:

$$L(\mu_k) = (-1)^k k! \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j}{j!} \mu_j.$$

3. c. Montrer que, pour tout $f \in E$, $L(f)$ appartient à E .

On considère l'application $L : f \mapsto L(f)$ de E vers E .

4. a. Montrer que L est une application linéaire et injective.

4. b. Écrire la matrice M représentant l'endomorphisme L de E dans la base $(\mu_0, \dots, \mu_n)$.

Montrer que M est inversible et calculer son inverse M^{-1} . On pourra utiliser 3.b.

5. a. Soient λ une valeur propre de L , et f un vecteur propre de L associé à la valeur propre λ . Montrer que λ est non nul et que, pour tout réel x , $(1 - \lambda)f(x) = \lambda f'(x)$.

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = e^{\frac{\lambda - 1}{\lambda}x} f(x)$. Montrer que φ est constante.

5. b. En déduire les valeurs propres et les sous-espaces propres de L . Est-ce que L est diagonalisable ?

Problème 2

La partie C est largement indépendante des parties A et B. On note $\ln$ le logarithme népérien.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$u_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - \ln n.$$

Partie A : Étude de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $v_n = u_{n+1} - u_n$.

1. Montrer que v_n est équivalent, quand n tend vers $+\infty$, à $-\frac{1}{2n^2}$.
2. Quelle est la nature de la série

$$\sum_{n \geq 1} v_n$$

?

3. En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge. On note γ sa limite.

Partie B : Expression intégrale de γ

1. Montrer que l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{1 - e^{-x}}{x} dx$ existe et que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\text{l'intégrale } I_n = \int_0^1 \frac{1}{x} \left(1 - \left(1 - \frac{x}{n} \right)^n \right) dx \text{ existe.}$$

2. a. Montrer que, pour tout $t \in]-1; +\infty[: \ln(1+t) \leq t$.

2. b. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0; n], \left(1 - \frac{x}{n} \right)^n \leq e^{-x}$.

2. c. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, étudier les variations de la fonction $\varphi_n : [0; \sqrt{n}[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi_n(x) = x + n \ln \left(1 - \frac{x}{n} \right) - \ln \left(1 - \frac{x^2}{n} \right).$$

2. d. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0; n], \left(1 - \frac{x^2}{n} \right) e^{-x} \leq \left(1 - \frac{x}{n} \right)^n$.

3. Montrer que la suite $(I_n)_{n \geq 1}$ converge vers I .

4. Montrer que les intégrales $\int_0^1 \frac{1}{x} e^{-1/x} dx$ et $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy$ existent et sont égales. On utilisera le changement de variable $y = 1/x$.

On note $J = \int_0^1 \frac{1}{x} e^{-1/x} dx$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $J_n = \int_1^n \frac{1}{x} \left(1 - \frac{x}{n} \right)^n dx$.

5. Montrer que la suite $(J_n)_{n \geq 1}$ converge vers J .

6. a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $K_n = \int_0^1 \frac{1 - (1-x)^n}{x} dx$ existe.

6. b. Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$K_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

7. a. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $I_n - J_n = K_n - \ln n$.

7. b. En déduire : $\int_0^1 \frac{1 - e^{-x} - e^{-1/x}}{x} dx = \gamma$.

Partie C : Calcul d'une valeur approchée de γ à 10^{-3} près

On utilise ici le résultat de la question B.7.b : $\gamma = I - J$, où $I = \int_0^1 \frac{1 - e^{-x}}{x} dx$ et

$$J = \int_0^1 \frac{1}{x} e^{-1/x} dx = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy.$$

1. a. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0; 1]$:

$$\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k x^k}{k!} \leq e^{-x} \leq \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k!}.$$

1. b. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{\ell=0}^{2n-1} \frac{(-1)^\ell}{(\ell+1)!(\ell+1)} \leq I \leq \sum_{\ell=0}^{2n-2} \frac{(-1)^\ell}{(\ell+1)!(\ell+1)},$$

puis :

$$-\frac{1}{(2n)!2n} \leq I - \sum_{\ell=0}^{2n-2} \frac{(-1)^\ell}{(\ell+1)!(\ell+1)} \leq 0.$$

1. c. Donner une valeur approchée de I à $0,5 \times 10^{-3}$ près.

2. a. Montrer : $\forall x \in [1; +\infty[, 0 \leq \int_x^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy \leq \frac{e^{-x}}{x}$.

2. b. Vérifier que le réel $x_0 = 7$ satisfait l'inégalité $\frac{e^{-x_0}}{x_0} < 0,25 \times 10^{-3}$.

2. c. On admet que $\int_1^7 \frac{e^{-y}}{y} dy$ vaut 0,2193 à $0,25 \times 10^{-3}$ près. Donner une valeur approchée de J à $0,5 \times 10^{-3}$ près.

2. d. Conclure.