



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques 1

1989

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Problème 1

Partie A

1. a. La composition est associative, et p et q commutent. En utilisant aussi $p \circ p = p$ et $q \circ q = q$, on obtient :

$$g \circ g = p \circ q \circ p \circ q = p \circ p \circ q \circ q = p \circ q = g.$$

Ainsi, g est un projecteur.

1. b. Soit λ une valeur propre de p et $v \neq 0$ un vecteur propre associé. On a $p(v) = \lambda v$, donc :

$$p^2(v) = p(\lambda v) = \lambda p(v) = \lambda^2 v.$$

Comme $p^2 = p$, on a aussi $p^2(v) = \lambda v$. Ainsi, $(\lambda^2 - \lambda)v = 0$. Le vecteur v étant non nul, $\lambda(\lambda - 1) = 0$, soit $\lambda \in \{0, 1\}$.

Le même raisonnement, avec $q^2 = q$, donne que les valeurs propres de q appartiennent à $\{0, 1\}$. Cela ne signifie pas que les deux nombres soient nécessairement valeurs propres de chacun des projecteurs.

1. c. Méthode 1 — Construction d'un polynôme annulateur particulier

La commutation de p et q donne :

$$f^2 = (p + q)^2 = p^2 + p \circ q + q \circ p + q^2 = f + 2g.$$

De plus,
$$f \circ g = (p + q) \circ p \circ q = p^2 \circ q + q \circ p \circ q = 2p \circ q = 2g.$$

Ainsi, $f^3 = f \circ (f + 2g) = f^2 + 4g = f + 6g$. En combinant ces égalités :

$$f^3 - 3f^2 + 2f = (f + 6g) - 3(f + 2g) + 2f = 0.$$

Le polynôme $X(X - 1)(X - 2)$ annule donc f . Si $f(v) = \lambda v$ avec $v \neq 0$, l'action de ce polynôme sur v donne $\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)v = 0$.

On conclut $\lambda \in \{0, 1, 2\}$. On utilise ici uniquement l'action d'un polynôme d'endomorphisme sur un vecteur propre, et non un critère général de diagonalisation.

Méthode 2 — Action d'un projecteur sur un vecteur propre

Soit $v \neq 0$ tel que $(p + q)(v) = \lambda v$. En appliquant p et en utilisant sa commutation avec q , on obtient :

$$p(v) + q(p(v)) = \lambda p(v).$$

Si $p(v) \neq 0$, il s'agit d'une équation propre de q : $q(p(v)) = (\lambda - 1)p(v)$. Par 1.b, $\lambda - 1 \in \{0, 1\}$, donc $\lambda \in \{1, 2\}$.

Si $p(v) = 0$, l'équation initiale devient $q(v) = \lambda v$. Comme $v \neq 0$, 1.b donne $\lambda \in \{0, 1\}$.

Les deux cas donnent $\lambda \in \{0, 1, 2\}$. La première méthode produit une identité d'endomorphismes réutilisable ; la seconde évite le calcul des puissances en étudiant directement un vecteur propre.

2. a. On établit l'identité $\text{Ker } f = \text{Ker } p \cap \text{Ker } q$.

Si $v \in \text{Ker } p \cap \text{Ker } q$, $f(v) = p(v) + q(v) = 0$, donc $v \in \text{Ker } f$.

Réciproquement, supposons $f(v) = 0$. En appliquant p puis q à cette égalité, et en utilisant leurs relations, on obtient :

$$p(v) + g(v) = 0 \quad \text{et} \quad g(v) + q(v) = 0.$$

En soustrayant ces égalités, $p(v) = q(v)$. Comme $p(v) + q(v) = 0$, on a $2p(v) = 0$, donc $p(v) = q(v) = 0$.

Ainsi, $v \in \text{Ker } p \cap \text{Ker } q$, ce qui prouve l'identité des noyaux.

Le nombre 0 est valeur propre de f exactement lorsqu'il existe un vecteur non nul dans $\text{Ker } f$. On conclut :

$$0 \text{ est valeur propre de } f \iff \text{Ker } p \cap \text{Ker } q \neq \{0\}.$$

2. b. Méthode 1 — Identification directe de l'espace propre

Pour un projecteur p , un vecteur v appartient à $\text{Im } p$ si et seulement si $p(v) = v$.

En effet, si $v = p(u)$, alors $p(v) = p^2(u) = p(u) = v$; réciproquement, $p(v) = v$ écrit v comme une image par p . La même propriété vaut pour q .

Si $v \in \text{Im } p \cap \text{Im } q$, alors $p(v) = q(v) = v$, donc $f(v) = 2v$.

Réciproquement, si $f(v) = 2v$, on applique p à l'équation : $p(v) + g(v) = 2p(v)$, donc $g(v) = p(v)$. En appliquant q , on obtient de même $g(v) = q(v)$.

Alors $2v = p(v) + q(v) = 2g(v)$, donc $v = g(v) = p(v) = q(v)$. Ainsi, v appartient aux deux images.

On a donc $\text{Ker}(f - 2 \text{Id}_E) = \text{Im } p \cap \text{Im } q$. Le nombre 2 est valeur propre précisément lorsque cet espace contient un vecteur non nul, d'où l'équivalence demandée.

Méthode 2 — Projecteurs complémentaires et valeur propre nulle

Posons $\tilde{p} = \text{Id}_E - p$ et $\tilde{q} = \text{Id}_E - q$. On calcule $\tilde{p}^2 = \text{Id}_E - 2p + p^2 = \text{Id}_E - p = \tilde{p}$, et de même $\tilde{q}^2 = \tilde{q}$.

De plus, $\tilde{p} \circ \tilde{q} = \text{Id}_E - p - q + p \circ q = \tilde{q} \circ \tilde{p}$, car p et q commutent. Ces deux applications vérifient donc les hypothèses de la partie A.

Leur somme vaut $2 \text{Id}_E - f$. Un vecteur non nul vérifie $f(v) = 2v$ si et seulement si $(\tilde{p} + \tilde{q})(v) = 0$. La question 2.a appliquée à ces deux projecteurs donne :

2 est valeur propre de $f \iff \text{Ker } \tilde{p} \cap \text{Ker } \tilde{q} \neq \{0\}$.

Or $\text{Ker } \tilde{p} = \{v : p(v) = v\} = \text{Im } p$, et de même $\text{Ker } \tilde{q} = \text{Im } q$. On retrouve l'équivalence avec $\text{Im } p \cap \text{Im } q \neq \{0\}$. Cette méthode ramène le cas de la valeur propre 2 à celui de la valeur propre 0, en remplaçant les projecteurs par leurs complémentaires.

Partie B

Rectification du préambule : les notations $\mathbb{R}_n[X]$ utilisées dans le PDF pour l'espace ambiant et pour le domaine et le codomaine de T_n sont remplacées par $\mathbb{R}_N[X]$. L'espace décrit est celui des polynômes de degré au plus N , et les questions suivantes définissent bien des endomorphismes de cet espace.

1. Fixons $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \leq N$. Pour

$$P = \sum_{k=0}^N \lambda_k X^k,$$

le polynôme

$$T_n(P) = \sum_{k=0}^n \lambda_k X^k$$

est nul ou de degré au plus n , donc appartient à $\mathbb{R}_N[X]$.

Soient

$$P = \sum_{k=0}^N \lambda_k X^k,$$

$$Q = \sum_{k=0}^N \mu_k X^k$$

et $a, b \in \mathbb{R}$. Les coefficients de $aP + bQ$ sont $a\lambda_k + b\mu_k$. Ainsi :

$$T_n(aP + bQ) = \sum_{k=0}^n (a\lambda_k + b\mu_k) X^k = aT_n(P) + bT_n(Q).$$

L'application T_n est linéaire et à valeurs dans $\mathbb{R}_N[X]$: c'est donc un endomorphisme de cet espace.

2. a. Le polynôme $T_n(P)$ ne contient plus aucun terme de degré supérieur à n . Une nouvelle application de T_n conserve donc tous ses termes :

$$T_n(T_n(P)) = \sum_{k=0}^n \lambda_k X^k = T_n(P).$$

Cette égalité étant vraie pour tout $P \in \mathbb{R}_N[X]$, on a $T_n \circ T_n = T_n$. L'endomorphisme T_n est un projecteur.

2. b. Pour

$$P = \sum_{k=0}^N \lambda_k X^k,$$

l'égalité $T_n(P) = 0$ équivaut à $\lambda_0 = \dots = \lambda_n = 0$, par unicité des coefficients d'un polynôme.

Si $n < N$, on obtient donc :

$$\text{Ker } T_n = \text{Vect}(X^{n+1}, X^{n+2}, \dots, X^N), \quad \dim \text{Ker } T_n = N - n.$$

Si $n = N$, T_N est l'identité et $\text{Ker } T_N = \{0\}$, de dimension 0.

Tout polynôme image par T_n est de degré au plus n , donc $\text{Im } T_n \subset \mathbb{R}_n[X]$.

Réciproquement, pour $Q \in \mathbb{R}_n[X]$, $T_n(Q) = Q$, donc $Q \in \text{Im } T_n$.

Ainsi, pour tout $0 \leq n \leq N$:

$$\text{Im } T_n = \mathbb{R}_n[X] = \text{Vect}(1, X, \dots, X^n), \quad \dim \text{Im } T_n = n + 1.$$

En particulier, T_0 conserve seulement le terme constant, et T_N conserve tous les coefficients.

2. c. Soit

$$P = \sum_{k=0}^N \lambda_k X^k.$$

L'application de T_r conserve les termes d'indices au plus r , puis l'application de T_n conserve ceux d'indices au plus n . Ainsi :

$$(T_n \circ T_r)(P) = \sum_{k=0}^{\min(n,r)} \lambda_k X^k = T_{\min(n,r)}(P).$$

En échangeant n et r , on obtient la même expression. Par conséquent :

$$T_n \circ T_r = T_r \circ T_n = T_{\min(n,r)}.$$

3. a. Comme $n \leq r$, tout polynôme dont les coefficients d'indices 0 à r sont nuls a aussi ses coefficients d'indices 0 à n nuls. Donc :

$$\text{Ker } T_r \subset \text{Ker } T_n.$$

De même, tout polynôme de degré au plus n est de degré au plus r , donc :

$$\text{Im } T_n = \mathbb{R}_n[X] \subset \mathbb{R}_r[X] = \text{Im } T_r.$$

Si $n = r$, ces inclusions sont des égalités. Si $n < r$, elles sont strictes : X^{n+1} appartient à $\text{Ker } T_n$ mais pas à $\text{Ker } T_r$, et appartient à $\text{Im } T_r$ mais pas à $\text{Im } T_n$.

3. b. Méthode 1 — Application des résultats sur les projecteurs

Les endomorphismes T_n et T_r sont des projecteurs qui commutent, par 2.a et 2.c. Les résultats de la partie A s'appliquent donc.

Par 3.a, $\text{Ker } T_n \cap \text{Ker } T_r = \text{Ker } T_r$. Comme $r < N$, cet espace contient le polynôme non nul X^{r+1} . Il n'est pas réduit à $\{0\}$; par A.2.a, 0 est valeur propre de $T_n + T_r$.

De même, $\text{Im } T_n \cap \text{Im } T_r = \text{Im } T_n$, qui contient le polynôme constant non nul 1. Par A.2.b, 2 est valeur propre de $T_n + T_r$.

Méthode 2 — Construction de vecteurs propres explicites

Comme $n \leq r < N$, le monôme X^{r+1} est un élément non nul de $\mathbb{R}_N[X]$, de degré supérieur à n et à r . Les deux troncatures l'annulent : $T_n(X^{r+1}) = T_r(X^{r+1}) = 0$.

Ainsi, $(T_n + T_r)(X^{r+1}) = 0 \times X^{r+1}$, ce qui prouve directement que 0 est valeur propre.

Le polynôme constant 1 est non nul et de degré 0, donc chacune des troncatures le conserve : $T_n(1) = T_r(1) = 1$. Ainsi, $(T_n + T_r)(1) = 2 \times 1$, et 2 est valeur propre.

La première méthode explique ces valeurs propres par les intersections de noyaux et d'images ; la seconde les établit en donnant immédiatement deux polynômes propres.

3. c. On étudie l'action de $T_n + T_r$ sur la base canonique $(1, X, \dots, X^N)$.

Pour $0 \leq k \leq n$, les deux troncatures conservent X^k , donc $(T_n + T_r)(X^k) = 2X^k$.

Pour $n < k \leq r$, seule T_r conserve X^k , donc $(T_n + T_r)(X^k) = X^k$.

Pour $r < k \leq N$, les deux troncatures annulent X^k , donc $(T_n + T_r)(X^k) = 0$.

La matrice dans cette base est donc diagonale, avec $n + 1$ coefficients égaux à 2, puis $r - n$ coefficients égaux à 1, puis $N - r$ coefficients égaux à 0.

L'endomorphisme $T_n + T_r$ est diagonalisable. Ses espaces propres sont :

$$E_2 = \text{Vect}(1, X, \dots, X^n), \quad E_0 = \text{Vect}(X^{r+1}, \dots, X^N).$$

Si $n < r$, $E_1 = \text{Vect}(X^{n+1}, \dots, X^r)$; si $n = r$, l'espace $\text{Ker}(T_n + T_r - \text{Id})$ est nul, donc 1 n'est pas valeur propre. Les valeurs 0 et 2 sont présentes dans tous les cas imposés par l'énoncé.

Problème 2

Partie I

1. Pour $x \leq 1/4$, l'équation $x = y - y^2$ équivaut, en complétant le carré, à :

$$\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - x.$$

Le membre de droite est positif ou nul. La condition $y \leq 1/2$ impose $y - 1/2 \leq 0$, donc nécessairement :

$$y - \frac{1}{2} = -\sqrt{\frac{1}{4} - x}.$$

On obtient l'unique candidat $y = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - 4x})$. Il est bien inférieur ou égal à $1/2$, et son carré centré vérifie l'égalité initiale, donc il satisfait $x = y - y^2$.

Cela prouve l'existence et l'unicité demandées, y compris pour $x = 1/4$, où $y = 1/2$.

Rectification de la définition de f : le PDF donne initialement le domaine $] -\infty, 1/4[$, mais la partie III utilise $f(1/4)$. On inclut cette borne dans le domaine en posant $f(1/4) = 1/2$, valeur donnée par la même formule. La fonction est continue à cette borne, car $\sqrt{1 - 4x} \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow 1/4^-$.

La relation obtenue sera utilisée sous la forme $f(x) = x + f(x)^2$ pour tout $x \leq 1/4$.

2. Sur $] -\infty, 1/4[$, on a $1 - 4x > 0$. En dérivant la formule explicite :

$$f'(x) = -\frac{1}{2} \frac{-4}{2\sqrt{1-4x}} = \frac{1}{\sqrt{1-4x}} > 0.$$

La fonction est strictement croissante sur cet intervalle, et le reste jusqu'à $1/4$ par continuité et par sa formule. Ses limites sont :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad f(0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1/4^-} f(x) = f(1/4) = \frac{1}{2}.$$

x	$-\infty$	0	$1/4$
Signe de f'	$+$	$+$	
Variation de f	$-\infty$	0	$1/2$

La dérivée $f'(x) = (1 - 4x)^{-1/2}$ est strictement croissante : lorsque x augmente, $1 - 4x$ diminue tout en restant positif. La fonction f est donc convexe sur l'intérieur de son domaine.

En 0, $f'(0) = 1$, donc la tangente a pour équation $y = x$.

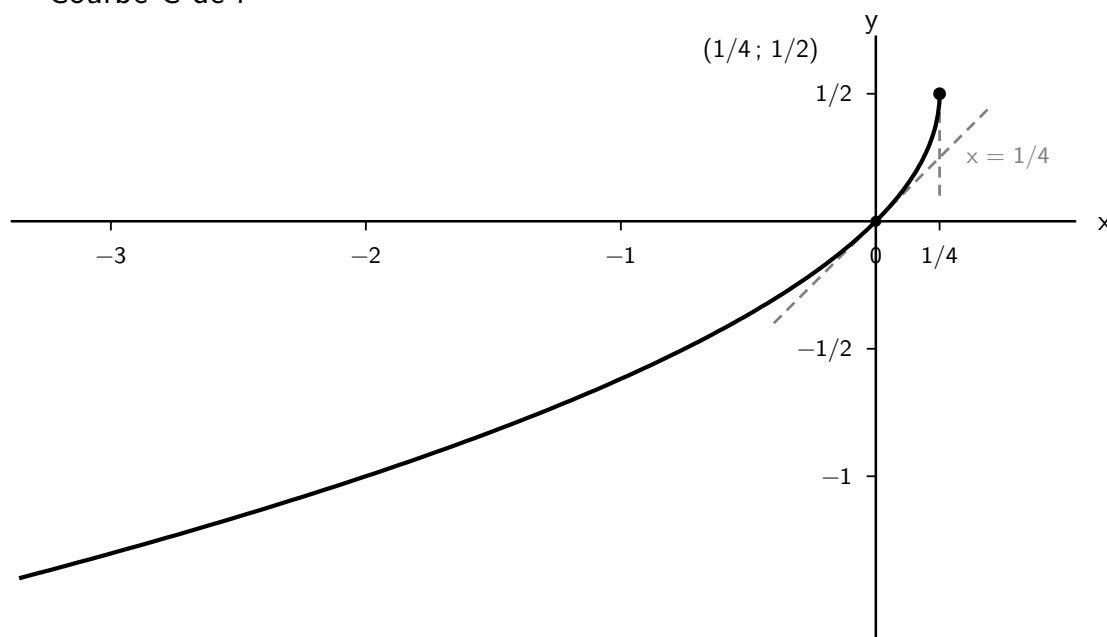
Pour la borne $1/4$, on étudie la pente des cordes :

$$\frac{f(x) - f(1/4)}{x - 1/4} = \frac{-\sqrt{1 - 4x}/2}{-(1 - 4x)/4} = \frac{2}{\sqrt{1 - 4x}} \xrightarrow{x \rightarrow 1/4^-} +\infty.$$

Il existe une demi-tangente verticale au point $(1/4, 1/2)$, d'équation $x = 1/4$.

La courbe peut être tracée exactement en utilisant la relation $x = y - y^2$, avec $y \leq 1/2$. Le repère ci-dessous utilise la même échelle sur les deux axes ; sur papier, on prend l'unité demandée de 4 cm.

Courbe C de f



Échelles identiques sur les deux axes.

Tangente en 0 : $y = x$. Demi-tangente finale : $x = 1/4$.

3. Sur $] -\infty, 1/4[$, l'expression $1 - 4x$ est strictement positive. La racine carrée est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$; sa composition avec $x \mapsto 1 - 4x$ montre donc que f est de classe C^∞ sur l'intervalle demandé.

On prouve la formule par récurrence sur $n \geq 1$.

Pour $n = 1$, elle donne $f'(x) = (0)!/(0)!(1 - 4x)^{-1/2}$, ce qui est bien la formule de la question 2.

Supposons la formule vraie à l'ordre n . En dérivant, on obtient :

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{(2n-2)!}{(n-1)!} \left(-n + \frac{1}{2} \right) (-4)(1-4x)^{-n-\frac{1}{2}}.$$

Le facteur supplémentaire vaut $4n - 2 = 2(2n - 1)$. Or :

$$\frac{(2n)!}{n!} = \frac{(2n)(2n-1)(2n-2)!}{n(n-1)!} = 2(2n-1) \frac{(2n-2)!}{(n-1)!}.$$

Ainsi :

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{(2n)!}{n!} (1-4x)^{-(n+1)+\frac{1}{2}}.$$

La formule est donc établie pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et tous $x < 1/4$.

Partie II

1. a. Fixons $n \geq 1$ et $x \in]-1/4, 1/4[$. Le segment ayant pour extrémités 0 et x est contenu dans $] -\infty, 1/4[$, où f est de classe C^{n+1} . Les hypothèses de la formule de Taylor avec reste intégral sont donc satisfaites.

Cette formule, écrite au point 0, donne :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Elle reste valable pour $x < 0$, avec une intégrale orientée de 0 vers x .

On a $f(0) = 0$ et, pour $k \geq 1$, la partie I donne $f^{(k)}(0) = (2k-2)!/(k-1)!$. En remplaçant ces valeurs :

$$f(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(2k-2)!}{(k-1)!k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt = Q_n(x) + R_n(x).$$

1. b. On calcule les quatre premiers coefficients de Q_n :

$$\frac{0!}{0!1!} = 1, \quad \frac{2!}{1!2!} = 1, \quad \frac{4!}{2!3!} = 2, \quad \frac{6!}{3!4!} = 5.$$

Ainsi :

$$Q_1(x) = x, \quad Q_2(x) = x + x^2, \quad Q_3(x) = x + x^2 + 2x^3, \quad Q_4(x) = x + x^2 + 2x^3 + 5x^4.$$

L'inégalité $\binom{2n}{n} < 4^n / \sqrt[3]{n}$, pour $n \geq 1$, est admise dans l'énoncé d'origine. Elle sera utilisée pour majorer les restes, sans recourir à une formule asymptotique des factorielles. La racine qui y figure est une racine cubique.

2. a. Fixons $x \in [0, 1/4[$ et posons $h_x(t) = (x - t)/(1 - 4t)$ pour $t \in [0, x]$. Le dénominateur est strictement positif sur ce segment.

Si $x > 0$, la règle du quotient donne :

$$h'_x(t) = \frac{-(1 - 4t) + 4(x - t)}{(1 - 4t)^2} = \frac{4x - 1}{(1 - 4t)^2} < 0.$$

La fonction est donc décroissante, et son maximum est atteint en $t = 0$, où $h_x(0) = x$.

Comme $h_x(x) = 0$, on a $0 \leq h_x(t) \leq x$.

Si $x = 0$, le domaine est le singleton $\{0\}$, et la fonction y vaut 0; sa borne supérieure vaut encore $x = 0$.

Dans tous les cas, $\sup_{t \in [0, x]} (x - t)/(1 - 4t) = x$.

2. b. La formule de I.3 à l'ordre $n + 1$ donne $f^{(n+1)}(t) = (2n)!/n! (1 - 4t)^{-n-1/2}$. On réécrit donc le reste :

$$R_n(x) = \binom{2n}{n} \int_0^x \left(\frac{x - t}{1 - 4t} \right)^n \frac{dt}{\sqrt{1 - 4t}}.$$

Pour $0 \leq t \leq x < 1/4$, tous les facteurs sont positifs ou nuls. Par 2.a, le quotient élevé à la puissance n est au plus x^n . Par croissance de l'intégrale :

$$0 \leq R_n(x) \leq \binom{2n}{n} x^n \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 - 4t}}.$$

Une primitive de $(1 - 4t)^{-1/2}$ est $-\sqrt{1 - 4t}/2$, donc :

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 - 4t}} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2} \leq \frac{1}{2}.$$

En utilisant l'inégalité admise en 1.b, on obtient :

$$0 \leq R_n(x) \leq \frac{\binom{2n}{n} x^n}{2} \leq \frac{(4x)^n}{2 \sqrt[3]{n}} \leq \frac{1}{2 \sqrt[3]{n}}.$$

La dernière inégalité vient de $0 \leq 4x < 1$. Pour $x = 0$, le reste et la borne intermédiaire sont tous deux nuls, donc les inégalités restent valables.

3. Fixons $n \geq 1$ et $x \in]-1/4, 0]$. Si $x = 0$, $R_n(0) = 0$, et les inégalités sont immédiates.

Si $x < 0$, on inverse les bornes de l'intégrale et on utilise l'inégalité sur la valeur absolue d'une intégrale :

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{n!} \int_x^0 |x-t|^n f^{(n+1)}(t) dt.$$

Pour $t \in [x, 0]$, $1-4t \geq 1$. Comme l'exposant $-n-1/2$ est négatif :

$$0 < f^{(n+1)}(t) = \frac{(2n)!}{n!} (1-4t)^{-n-1/2} \leq \frac{(2n)!}{n!}.$$

De plus, $|x-t| = t-x$ sur ce segment. Ainsi :

$$|R_n(x)| \leq \binom{2n}{n} \int_x^0 (t-x)^n dt = \binom{2n}{n} \frac{|x|^{n+1}}{n+1}.$$

Par l'inégalité admise :

$$|R_n(x)| \leq \frac{4^n |x|^{n+1}}{(n+1) \sqrt[3]{n}} = \frac{(-4x)^n |x|}{(n+1) \sqrt[3]{n}}.$$

Enfin, pour $-1/4 < x \leq 0$, $0 \leq -4x < 1$ et $|x| \leq 1/4$. On conclut :

$$|R_n(x)| \leq \frac{(-4x)^n |x|}{(n+1) \sqrt[3]{n}} \leq \frac{1}{4(n+1) \sqrt[3]{n}}.$$

Le sens de l'intégrale lorsque $x < 0$ a donc été traité explicitement, sans supposer que le reste est positif.

4. La question 1.a donne $|f(x) - Q_n(x)| = |R_n(x)|$.

Pour $x \geq 0$, 2.b fournit la borne $1/(2 \sqrt[3]{n})$. Pour $x \leq 0$, 3 fournit $1/[4(n+1) \sqrt[3]{n}]$, qui est au plus $1/(2 \sqrt[3]{n})$ puisque $n+1 \geq 2$.

Ainsi, un majorant indépendant de x est :

$$\forall n \geq 1, \quad \forall x \in]-1/4, 1/4[, \quad |f(x) - Q_n(x)| \leq \frac{1}{2 \sqrt[3]{n}}.$$

Comme $\sqrt[3]{n} \rightarrow +\infty$, ce majorant tend vers 0. L'erreur d'approximation peut donc être rendue simultanément petite pour tous les points de l'intervalle considéré.

5. a. Posons, pour $n \geq 1$:

$$a_n = \frac{(2/3)^n}{6 \times 10^{-4}(n+1)\sqrt[3]{n}}.$$

Tous les termes sont strictement positifs. Leur quotient vaut :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{3n+2} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{1/3} < 1.$$

La suite est donc strictement décroissante. Il suffit de déterminer le premier indice pour lequel $a_n < 1$.

Pour $n = 10$, on a $\sqrt[3]{10} < 9/4$, car $10 < (9/4)^3 = 729/64$. Ainsi :

$$6 \times 10^{-4} \times 11 \sqrt[3]{10} < \frac{3}{5000} \times 11 \times \frac{9}{4} = \frac{297}{20000}.$$

Or $(2/3)^{10} = 1024/59049 > 297/20000$, puisque

$1024 \times 20000 = 20480000 > 297 \times 59049 = 17537553$. Le numérateur de a_{10} est donc supérieur à son dénominateur : $a_{10} > 1$.

Pour $n = 11$, on a $\sqrt[3]{11} > 2$, car $11 > 2^3$. Ainsi :

$$6 \times 10^{-4} \times 12 \sqrt[3]{11} > \frac{3}{5000} \times 12 \times 2 = \frac{9}{625}.$$

Or $(2/3)^{11} = 2048/177147 < 9/625$, puisque

$2048 \times 625 = 1280000 < 9 \times 177147 = 1594323$. Le numérateur de a_{11} est donc inférieur à son dénominateur : $a_{11} < 1$.

Par décroissance, $a_n < 1$ pour tout $n \geq 11$, alors que tout entier $N \leq 10$ échoue en particulier à l'indice $n = 10$. Le plus petit entier recherché est donc $N = 11$.

5. b. La question 3 s'applique à $x = -1/6 \in]-1/4, 0]$. Elle donne :

$$\left| R_n \left(-\frac{1}{6} \right) \right| \leq \frac{(2/3)^n}{6(n+1)\sqrt[3]{n}} = 10^{-4} a_n.$$

Pour tout $n \geq 11$, la question 5.a donne $a_n < 1$. Par conséquent :

$$\forall n \geq 11, \quad \left| R_n \left(-\frac{1}{6} \right) \right| < 10^{-4}.$$

Partie III

1. On utilise la définition $P_{n+1}(x) = x + P_n(x)^2$, avec $P_0(x) = 0$:

$$P_1(x) = x.$$

$$P_2(x) = x + x^2.$$

$$P_3(x) = x + (x + x^2)^2 = x + x^2 + 2x^3 + x^4.$$

Pour calculer P_4 , on développe le carré de P_3 :

$$(x + x^2 + 2x^3 + x^4)^2 = x^2 + 2x^3 + 5x^4 + 6x^5 + 6x^6 + 4x^7 + x^8.$$

Les coefficients proviennent des produits de termes de même degré total : par exemple celui de x^4 vaut $2 \times 1 \times 2 + 1^2 = 5$, celui de x^5 vaut $2 \times 1 \times 1 + 2 \times 1 \times 2 = 6$, et celui de x^6 vaut $2 \times 1 \times 1 + 2^2 = 6$.

Ainsi :

$$P_4(x) = x + x^2 + 2x^3 + 5x^4 + 6x^5 + 6x^6 + 4x^7 + x^8.$$

2. a. On traite d'abord les coefficients des P_n par récurrence. Le polynôme nul P_0 a tous ses coefficients nuls, donc naturels.

Si P_n a des coefficients entiers naturels, les coefficients de P_n^2 sont des sommes finies de produits d'entiers naturels, donc sont eux-mêmes des entiers naturels. En ajoutant le polynôme X , cette propriété est conservée pour $P_{n+1} = X + P_n^2$.

Tous les P_n ont donc des coefficients entiers naturels.

Notons maintenant $D_n = P_{n+1} - P_n$. On a $D_0 = P_1 - P_0 = X$, dont les coefficients sont naturels. Pour tout $n \geq 0$:

$$D_{n+1} = P_{n+2} - P_{n+1} = P_{n+1}^2 - P_n^2 = D_n(P_{n+1} + P_n).$$

Si D_n a des coefficients entiers naturels, le produit de droite en a également, puisque les deux polynômes P_n, P_{n+1} ont déjà cette propriété. Une récurrence donne donc cette propriété pour tous les D_n .

Pour $x \geq 0$, chaque monôme à coefficient naturel a une valeur positive ou nulle. Ainsi, $D_n(x) = P_{n+1}(x) - P_n(x) \geq 0$ pour tout n .

Pour chaque $x \in [0, +\infty[$ fixé, la suite $(P_n(x))$ est donc croissante. On a également $P_n(x) \geq 0$ sur cet intervalle.

2. b. Question adaptée au programme actuel : l'inégalité stricte du PDF est rectifiée en une inégalité large sur $[0, 1/4]$, avec une inégalité stricte pour $x > 0$. En effet, en $x = 0$, $P_n(0) = 0 = f(0)$ pour tout n , donc l'inégalité stricte initiale est fausse.

Fixons $x \in [0, 1/4]$. La formule de f donne $0 \leq f(x) \leq 1/2$, et la partie I établit $f(x) = x + f(x)^2$.

Pour $n = 0$, $P_0(x) = 0 \leq f(x)$.

Supposons $P_n(x) \leq f(x)$. Par 2.a, $P_n(x) \geq 0$. Les deux nombres étant positifs ou nuls, l'élevation au carré conserve l'inégalité : $P_n(x)^2 \leq f(x)^2$. Ainsi :

$$P_{n+1}(x) = x + P_n(x)^2 \leq x + f(x)^2 = f(x).$$

Par récurrence, $0 \leq P_n(x) \leq f(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0, 1/4]$.

Pour la stricte inégalité, supposons $x > 0$. Alors $f(x) > 0$, et l'initialisation

$P_0(x) = 0 < f(x)$ est stricte. Si $0 \leq P_n(x) < f(x)$, alors

$$f(x)^2 - P_n(x)^2 = (f(x) - P_n(x))(f(x) + P_n(x)) > 0.$$

On en déduit $P_{n+1}(x) = x + P_n(x)^2 < x + f(x)^2 = f(x)$. Une nouvelle récurrence donne $P_n(x) < f(x)$ pour tout n lorsque $0 < x \leq 1/4$.

Enfin, pour $x = 0$, la relation $P_{n+1}(0) = P_n(0)^2$ et $P_0(0) = 0$ donnent $P_n(0) = 0 = f(0)$ pour tous les indices.

2. c. Fixons $x \in [0, 1/4]$. Par 2.a, la suite $(P_n(x))$ est croissante ; par 2.b, elle est majorée par $f(x)$. Le théorème de la limite monotone assure l'existence d'une limite réelle ℓ telle que $0 \leq \ell \leq f(x) \leq 1/2$.

La continuité de la fonction carré permet de passer à la limite dans la relation de récurrence $P_{n+1}(x) = x + P_n(x)^2$. Comme la suite décalée a la même limite :

$$\ell = x + \ell^2, \text{ soit } x = \ell - \ell^2.$$

La partie I.1 établit que, pour chaque $x \leq 1/4$, cette équation admet une unique solution inférieure ou égale à $1/2$, à savoir $f(x)$. Comme $\ell \leq 1/2$, on conclut $\ell = f(x)$.

Les deux bornes sont couvertes : pour $x = 0$, la suite est constamment nulle ; pour $x = 1/4$, l'équation limite est $(\ell - 1/2)^2 = 0$, donc la limite vaut $1/2 = f(1/4)$.

Ainsi :

$$\forall x \in [0, 1/4], \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x) = f(x).$$

Relevé des adaptations

Problème 1, partie B, préambule et question 1 : remplacement des notations incohérentes $\mathbb{R}_n[X]$ du préambule par $\mathbb{R}_N[X]$ pour l'espace ambiant, le domaine et le codomaine des troncatures. Le degré maximal fixé est N , et la question 1 porte bien sur cet espace.

Problème 2, définition après I.1 et questions III.2.b–c : inclusion du point $1/4$ dans le domaine de f , avec $f(1/4) = 1/2$, afin de rendre définies les expressions employées dans la partie III. Il s'agit du prolongement continu fourni par la formule initiale.

Problème 2, III.2.b : remplacement de l'inégalité stricte sur $[0, 1/4]$ par une inégalité large, et conservation de l'inégalité stricte sur $]0, 1/4]$. La rectification est nécessaire puisque $P_n(0) = f(0) = 0$.