



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques 1

1987

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Les problèmes 1 et 2 sont indépendants. $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{R}$ celui des nombres réels.

Problème 1

On désigne par $\mathbb{R}_5[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes de degré inférieur ou égal à 5.

1. Montrer que l'ensemble E des polynômes de $\mathbb{R}_5[X]$ divisibles par X^3 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_5[X]$. Quelle est la dimension de E ?
2. On note u l'application de $\mathbb{R}_5[X]$ dans lui-même qui, à tout polynôme P de $\mathbb{R}_5[X]$, associe le polynôme $u(P)$ défini par

$$u(P) = X(P' + P'(0)) - 2(P - P(0)).$$

Vérifier que u est une application linéaire.

Pour P élément de $\mathbb{R}_5[X]$, calculer $u(P)$; en déduire le noyau, l'image, les valeurs propres et vecteurs propres de l'application u .

Montrer que u est diagonalisable.

Problème 2

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}_+^* = (0, +\infty)$ en posant

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{x^n \ln x}{x^2 - 1} & \text{si } x \neq 1, \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

On notera C_n la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé.

Partie I

- 1.a. Quel est le développement limité de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ à l'ordre 3 au voisinage de 0 ?
- 1.b. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 1 de f_0 , puis de f_n pour $n \geq 1$.
- 1.c. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, f_n est dérivable en 1. Que vaut $f'_n(1)$?
- 1.d. Préciser la position de C_n par rapport à sa tangente au point d'abscisse 1, suivant les valeurs de $n \in \mathbb{N}$.
- 2.a. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et calculer $f'_n(x)$.
- 2.b. Montrer que, pour $n \geq 1$, f_n est prolongeable par continuité en 0. Pour quelles valeurs de n ce prolongement est-il dérivable à droite en 0 ?
- 3.a. Étudier la fonction φ_0 définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\varphi_0(x) = 1 - \frac{1}{x^2} - 2 \ln x$. Quel est le signe de $f'_0(x)$?
- 3.b. En déduire les variations de la fonction f_0 , et tracer C_0 , l'unité étant prise égale à 5 cm.
- 4.a. Étudier les fonctions φ_1 et φ_2 définies sur $\mathbb{R}_+^*$ respectivement par $\varphi_1(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} - \ln x$ et $\varphi_2(x) = x^2 - 1 - 2 \ln x$.
- 4.b. En déduire les variations des fonctions f_1 et f_2 , et tracer C_1 et C_2 sur le même graphique que C_0 .

Partie II

On sait que la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ est convergente, et on admettra que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

1.a. Justifier, pour $n \geq 1$, l'existence de $\int_0^1 f_n(x) dx$.

1.b. Montrer que l'intégrale impropre $\int_0^1 (f_0(x) - f_2(x)) dx$ est convergente. On note $a_1 = \int_0^1 (f_0(x) - f_2(x)) dx$. Calculer a_1 .

1.c. En déduire que l'intégrale impropre $\int_0^1 f_0(x) dx$ est convergente. On note $I = \int_0^1 f_0(x) dx$. Le but de cette partie est de calculer I .

2.a. Pour $n \geq 2$, calculer $a_n = \int_0^1 (f_{2n-2}(x) - f_{2n}(x)) dx$.

2.b. Montrer que la série de terme général a_n est convergente.

3.a. Établir, en utilisant l'étude de f_1 effectuée à la partie I, que, pour $n \geq 1$ et $0 \leq x \leq 1$, on a

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{x^{n-1}}{2}.$$

On utilise en 0 les prolongements continus de la partie I, et x^0 désigne la fonction constante égale à 1, y compris en 0.

En déduire que $\int_0^1 f_n(x) dx$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

3.b. On note

$$S_n = \sum_{p=1}^n a_p.$$

Montrer que $I = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

4.a. Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

4.b. Calculer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2}.$$

4.c. Calculer I .