



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EMLYON — 1987

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Problème 1

1. On caractérise les polynômes divisibles par X^3 et on en déduit une base.

Méthode 1 — Description par les coefficients

Un polynôme

$$P = \sum_{k=0}^5 a_k X^k$$

est divisible par X^3 si et seulement si $a_0 = a_1 = a_2 = 0$. Ainsi,

$$E = \{a_3 X^3 + a_4 X^4 + a_5 X^5 : (a_3, a_4, a_5) \in \mathbb{R}^3\} = \text{Vect}(X^3, X^4, X^5).$$

Un espace engendré est un sous-espace vectoriel. Les trois monômes sont linéairement indépendants : l'égalité $a_3 X^3 + a_4 X^4 + a_5 X^5 = 0$ impose la nullité de chaque coefficient. Ils forment donc une base de E , et $\dim E = 3$.

Méthode 2 — Noyau d'une application linéaire

Considérons $v : \mathbb{R}_5[X] \rightarrow \mathbb{R}^3$, défini par $v(P) = (P(0), P'(0), P''(0))$. La dérivation et l'évaluation étant linéaires, v est linéaire. Pour

$$P = \sum_{k=0}^5 a_k X^k,$$

on a $v(P) = (a_0, a_1, 2a_2)$, donc $E = \text{Ker } v$. C'est un sous-espace vectoriel.

L'application v est surjective : pour tout $(b_0, b_1, b_2) \in \mathbb{R}^3$, le polynôme $P = b_0 + b_1X + \frac{b_2}{2}X^2$ vérifie $v(P) = (b_0, b_1, b_2)$. Par le théorème du rang, $\dim E = 6 - 3 = 3$.

La première méthode fournit directement une base ; la seconde illustre la description d'un sous-espace par des conditions linéaires.

2. Calculons l'action de u sur les coefficients, puis résolvons les équations du noyau et des espaces propres.

Pour $P \in \mathbb{R}_5[X]$, le degré de XP' est au plus 5, celui de $XP'(0)$ est au plus 1, et $P - P(0)$ appartient à $\mathbb{R}_5[X]$. Ainsi $u(P)$ appartient bien à cet espace.

Pour $P, Q \in \mathbb{R}_5[X]$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, les identités $(\alpha P + \beta Q)' = \alpha P' + \beta Q'$, $(\alpha P + \beta Q)'(0) = \alpha P'(0) + \beta Q'(0)$ et $(\alpha P + \beta Q)(0) = \alpha P(0) + \beta Q(0)$ donnent

$$u(\alpha P + \beta Q) = \alpha u(P) + \beta u(Q).$$

L'application u est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}_5[X]$.

Écrivons

$$P = \sum_{k=0}^5 a_k X^k.$$

On a

$$XP' = a_1X + 2a_2X^2 + 3a_3X^3 + 4a_4X^4 + 5a_5X^5,$$

$$XP'(0) = a_1X, \quad -2(P - P(0)) = -2a_1X - 2a_2X^2 - 2a_3X^3 - 2a_4X^4 - 2a_5X^5.$$

Par addition,

$$u(P) = a_3X^3 + 2a_4X^4 + 3a_5X^5.$$

Il s'ensuit que $u(P) = 0$ si et seulement si $a_3 = a_4 = a_5 = 0$. Ainsi,

$$\text{Ker } u = \text{Vect}(1, X, X^2) = \mathbb{R}_2[X].$$

De plus, $\text{Im } u \subset E$. Réciproquement, si $Q = b_3X^3 + b_4X^4 + b_5X^5 \in E$, alors $P = b_3X^3 + \frac{b_4}{2}X^4 + \frac{b_5}{3}X^5$ vérifie $u(P) = Q$. Donc

$$\text{Im } u = E = \text{Vect}(X^3, X^4, X^5).$$

Pour déterminer les éléments propres, soit $\lambda \in \mathbb{R}$. L'égalité $u(P) = \lambda P$ équivaut à

$$\lambda a_0 = \lambda a_1 = \lambda a_2 = 0, \quad (1 - \lambda)a_3 = 0, \quad (2 - \lambda)a_4 = 0, \quad (3 - \lambda)a_5 = 0.$$

Si $\lambda \notin \{0, 1, 2, 3\}$, ces égalités imposent $P = 0$: ce n'est pas une valeur propre. Pour les quatre autres valeurs, les espaces propres sont

$$E_0 = \text{Vect}(1, X, X^2), \quad E_1 = \text{Vect}(X^3), \quad E_2 = \text{Vect}(X^4), \quad E_3 = \text{Vect}(X^5).$$

Le spectre réel est donc $\{0, 1, 2, 3\}$. Les vecteurs propres sont exactement les éléments non nuls de ces espaces : les polynômes non nuls de degré au plus 2 pour la valeur propre 0, et les multiples non nuls de X^3 , X^4 ou X^5 pour les valeurs propres 1, 2 ou 3.

La base $(1, X, X^2, X^3, X^4, X^5)$ est constituée de vecteurs propres. Dans cette base, la matrice de u est $\text{diag}(0, 0, 0, 1, 2, 3)$. L'endomorphisme est donc diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Problème 2

Question adaptée au programme actuel. Rectification de l'énoncé : le PDF indique $\mathbb{R}^*$ comme domaine de f_n et des fonctions $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$. Le logarithme réel impose le domaine $\mathbb{R}_+^* = (0, +\infty)$, retenu dans le sujet.

Partie I

1.a. Le développement demandé est

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \quad (x \rightarrow 0).$$

Méthode 1 — Taylor-Young

La fonction $g : x \mapsto \ln(1+x)$ est de classe C^3 sur l'ouvert $(-1, +\infty)$, qui contient 0. Ses dérivées sont $g'(x) = \frac{1}{1+x}$, $g''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$ et $g'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$. Ainsi $g(0) = 0$, $g'(0) = 1$, $g''(0) = -1$, $g'''(0) = 2$. La formule de Taylor-Young donne le développement annoncé.

Méthode 2 — Identité algébrique et intégration

Pour $|t| < 1$, on a exactement $\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - \frac{t^3}{1+t}$. En intégrant de 0 à x , avec $|x| < \frac{1}{2}$, on obtient

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \int_0^x \frac{t^3}{1+t} dt.$$

Sur le segment entre 0 et x , $|1+t| \geq \frac{1}{2}$. La valeur absolue du reste est donc au plus

$2 \int_0^{|x|} s^3 ds = \frac{|x|^4}{2}$. Ce reste est $o(x^3)$, ce qui donne le même développement. Cette méthode construit le reste sans intégrer un développement limité de façon formelle.

1.b. Posons $h = x - 1$. Il s'agit d'un simple changement de variable vers 0, sans composition de développements limités.

Pour $h \neq 0$ assez petit, la question précédente et l'identité $(1+h)^2 - 1 = 2h + h^2$ donnent

$$f_0(1+h) = \frac{1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{3} + o(h^2)}{2+h}.$$

La division par h a été effectuée uniquement pour $h \neq 0$; le reste $o(h^3)$ devient alors $o(h^2)$. Pour déterminer le quotient sans invoquer de composition, on vérifie par multiplication que

$$(2+h) \left(\frac{1}{2} - \frac{h}{2} + \frac{5h^2}{12} \right) = 1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{3} + \frac{5h^3}{12}.$$

Comme $2+h$ tend vers 2, la différence entre le quotient et ce polynôme est $o(h^2)$. Par conséquent,

$$f_0(1+h) = \frac{1}{2} - \frac{h}{2} + \frac{5h^2}{12} + o(h^2).$$

Cette formule demeure valable en tenant compte de la valeur définie en $h = 0$. Pour tout entier fixé $n \geq 1$, la formule du binôme donne

$$(1+h)^n = 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2 + o(h^2).$$

Pour $n = 1$ ou $n = 2$, les termes absents sont simplement nuls. L'identité $f_n(x) = x^n f_0(x)$ est valable également en $x = 1$. En multipliant les deux développements, on obtient

$$f_n(1+h) = \frac{1}{2} + \frac{n-1}{2}h + \left(\frac{n(n-1)}{4} - \frac{n}{2} + \frac{5}{12} \right) h^2 + o(h^2).$$

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, y compris $n = 0$,

$$f_n(x) = \frac{1}{2} + \frac{n-1}{2}(x-1) + \frac{3n^2-9n+5}{12}(x-1)^2 + o((x-1)^2) \quad (x \rightarrow 1).$$

1.c. Utilisons la définition de la dérivée en 1. Pour $h \neq 0$,

$$\frac{f_n(1+h) - f_n(1)}{h} = \frac{n-1}{2} + \frac{3n^2-9n+5}{12}h + o(h).$$

Cette expression tend vers $\frac{n-1}{2}$. Ainsi, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, f_n est dérivable en 1 et

$$f'_n(1) = \frac{n-1}{2}.$$

1.d. La tangente T_n a pour équation $y = t_n(x)$, avec

$$t_n(x) = \frac{1}{2} + \frac{n-1}{2}(x-1).$$

Méthode 1 — Position locale par le développement limité

La question 1.b donne

$$f_n(x) - t_n(x) = \frac{3n^2-9n+5}{12}(x-1)^2 + o((x-1)^2).$$

Le coefficient vaut $\frac{5}{12}$ pour $n = 0$, $-\frac{1}{12}$ pour $n = 1$ et $n = 2$, et $\frac{5}{12}$ pour $n = 3$. Pour $n \geq 3$, l'expression $3n^2 - 9n + 5 = 3n(n - 3) + 5$ est strictement positive. Dans un voisinage suffisamment petit de 1, privé de 1, le signe de la différence est donc celui de ce coefficient.

Ainsi C_n est localement strictement au-dessus de T_n pour $n = 0$ ou $n \geq 3$, et strictement au-dessous pour $n = 1$ ou $n = 2$. Le coefficient ne s'annule pour aucun entier naturel.

Méthode 2 — Inégalités donnant la position sur tout le domaine

On peut renforcer cette conclusion locale. Posons $\psi(x) = \ln x - \frac{2(x-1)}{x+1}$ pour $x > 0$.
On a $\psi(1) = 0$ et

$$\psi'(x) = \frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}.$$

La fonction est strictement croissante : sa dérivée est positive sauf au point isolé 1. Donc $\psi(x)$ a le signe de $x - 1$, et, pour $x \neq 1$,

$$f_0(x) - \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{\psi(x)}{x^2 - 1} > 0.$$

En $x = 1$, il y a égalité. Posons $r_n(x) = \frac{2x^n}{(x+1)^2}$. On a $f_n(x) \geq r_n(x)$, $r_n(1) = \frac{1}{2}$ et $r'_n(1) = \frac{n-1}{2}$. Pour $n = 0$, $r''_0(x) = \frac{12}{(x+1)^4} > 0$. Pour $n \geq 3$, on calcule d'abord

$$r'_n(x) = \frac{2nx^{n-1}}{(x+1)^2} - \frac{4x^n}{(x+1)^3} = \frac{2x^{n-1}((n-2)x + n)}{(x+1)^3}.$$

Une seconde dérivation, sous la forme d'un produit, donne

$$r''_n(x) = \frac{2n(n-1)x^{n-2}}{(x+1)^2} - \frac{8nx^{n-1}}{(x+1)^3} + \frac{12x^n}{(x+1)^4}.$$

En réduisant au même dénominateur et en regroupant les puissances de x , on obtient

$$r_n''(x) = \frac{2x^{n-2}}{(x+1)^4} ((n-2)(n-3)x^2 + 2n(n-3)x + n(n-1)) > 0.$$

Ces fonctions sont donc strictement convexes sur $(0, +\infty)$. Leur tangente en 1 est T_n ; la propriété des tangentes d'une fonction convexe donne $r_n(x) \geq t_n(x)$. Pour $x \neq 1$, l'inégalité $f_n(x) > r_n(x)$ implique $f_n(x) > t_n(x)$ lorsque $n = 0$ ou $n \geq 3$.

Pour les deux autres valeurs, posons $\theta(x) = x - \frac{1}{x} - 2 \ln x$. On a $\theta(1) = 0$ et $\theta'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2}$. Ainsi $\theta(x)$ a strictement le signe de $x-1$ pour $x \neq 1$, et

$$f_1(x) - \frac{1}{2} = -\frac{x\theta(x)}{2(x^2-1)} < 0.$$

Or $t_1(x) = \frac{1}{2}$ et $t_2(x) = \frac{x}{2}$. L'identité $f_2(x) = xf_1(x)$ donne aussi $f_2(x) - t_2(x) = x(f_1(x) - \frac{1}{2}) < 0$ pour $x \neq 1$.

Les positions établies localement sont donc valables sur tout $(0, +\infty)$, avec contact uniquement en $x = 1$. La première méthode suffit près du point de tangence ; la seconde contrôle toute la courbe.

2.a. Question adaptée au programme actuel. Le domaine est rectifié en $\mathbb{R}_+^*$.

Sur $(0, 1)$ et $(1, +\infty)$, le numérateur et le dénominateur sont dérivables et $x^2 - 1 \neq 0$. La règle de dérivation d'un quotient s'applique. On a

$$(x^n \ln x)' = nx^{n-1} \ln x + x^{n-1}.$$

Pour $x > 0$, $x \neq 1$, il vient

$$f_n'(x) = \frac{x^{n-1}((n \ln x + 1)(x^2 - 1) - 2x^2 \ln x)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^{n-1}(((n-2)x^2 - n) \ln x + x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^2}.$$

Cette formule est valable aussi pour $n = 0$, puisque $x > 0$. En $x = 1$, la dérivabilité a été démontrée en 1.c, et $f'_n(1) = \frac{n-1}{2}$. Ainsi f_n est dérivable sur tout $\mathbb{R}_+^*$.

2.b. Pour chaque entier $n \geq 1$, les croissances comparées donnent $x^n \ln x \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow 0^+$. Comme $x^2 - 1 \rightarrow -1$, on a $f_n(x) \rightarrow 0$. Le prolongement continu est donc défini par $f_n(0) = 0$; on conserve cette notation pour la suite.

Son taux d'accroissement à droite en 0 est, pour $x > 0$,

$$\frac{f_n(x) - f_n(0)}{x} = \frac{x^{n-1} \ln x}{x^2 - 1}.$$

Pour $n = 1$, il tend vers $+\infty$: il n'existe pas de dérivée droite finie. Pour $n \geq 2$, $x^{n-1} \ln x \rightarrow 0$, donc le taux tend vers 0. Le prolongement est dérivable à droite exactement pour $n \geq 2$, avec $f'_n(0^+) = 0$. Pour $n = 1$, la courbe prolongée possède une demi-tangente verticale en l'origine.

3.a. Question adaptée au programme actuel. Rectification de l'énoncé : on étudie φ_0 sur $(0, +\infty)$, domaine du logarithme réel.

La fonction est dérivable et

$$\varphi'_0(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{2}{x} = \frac{2(1-x^2)}{x^3}.$$

Elle est donc strictement croissante sur $(0, 1]$, puis strictement décroissante sur $[1, +\infty)$.

On a $\varphi_0(1) = 0$. À l'infini, $\varphi_0(x) \rightarrow -\infty$. En 0, l'égalité

$$x^2 \varphi_0(x) = x^2 - 1 - 2x^2 \ln x \rightarrow -1$$

montre que $\varphi_0(x) \rightarrow -\infty$. En particulier $\varphi_0(x) < 0$ pour $x \neq 1$.

Pour $x > 0$, $x \neq 1$, la formule de 2.a donne

$$f'_0(x) = \frac{x^2 - 1 - 2x^2 \ln x}{x(x^2 - 1)^2} = \frac{x\varphi_0(x)}{(x^2 - 1)^2} < 0.$$

Enfin $f'_0(1) = -\frac{1}{2} < 0$. Ainsi la dérivée de f_0 est strictement négative sur tout $(0, +\infty)$.

3.b. La fonction f_0 est strictement décroissante. En 0, $f_0(x) \sim -\ln x$, donc $f_0(x) \rightarrow +\infty$.
À l'infini,

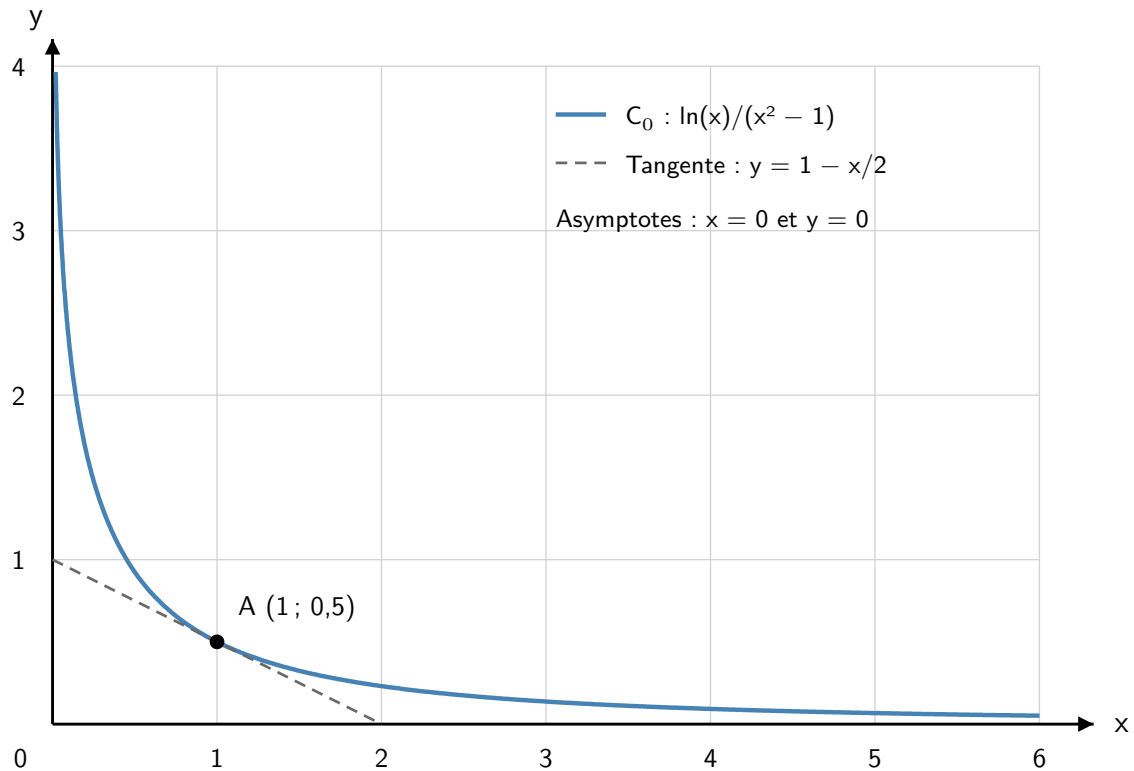
$$f_0(x) = \frac{\ln x/x^2}{1 - 1/x^2} \rightarrow 0$$

par croissances comparées. Le signe de $\ln x$ est celui de $x^2 - 1$ lorsque $x > 0$, $x \neq 1$; ainsi $f_0(x) > 0$ partout, y compris en 1.

Abscisse	0^+	1	$+\infty$
Valeur de f_0	$+\infty$	$\frac{1}{2}$	0
Variation	$\searrow$	$\searrow$	

La droite $x = 0$ est une asymptote verticale et la droite $y = 0$ une asymptote horizontale à l'infini. La courbe passe par $A = (1, \frac{1}{2})$; sa tangente y a pour équation $y = 1 - \frac{x}{2}$. Elle reste au-dessus de cette tangente, d'après 1.d.

Le tracé ci-dessous utilise des unités de même longueur sur les deux axes. Pour le tracé sur papier demandé, chaque unité mesure 5 cm.



4.a. Question adaptée au programme actuel. Rectification de l'énoncé : les deux fonctions sont étudiées sur $(0, +\infty)$.

Pour φ_1 , la dérivation donne

$$\varphi_1'(x) = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} - \frac{1}{x} = \frac{4x^2 - (x^2 + 1)^2}{x(x^2 + 1)^2} = -\frac{(x^2 - 1)^2}{x(x^2 + 1)^2}.$$

La dérivée est strictement négative sauf en 1. La fonction est strictement décroissante sur $(0, +\infty)$: elle l'est sur chacun des intervalles séparés par 1, et les valeurs se raccordent par continuité. Ses limites sont $+\infty$ en 0^+ et $-\infty$ à l'infini, car $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ tend respectivement vers -1 et 1 , alors que $-\ln x$ tend vers $+\infty$ et $-\infty$.

Comme $\varphi_1(1) = 0$, on a $\varphi_1(x) > 0$ pour $0 < x < 1$, et $\varphi_1(x) < 0$ pour $x > 1$.

Pour φ_2 , on a

$$\varphi_2'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2(x^2 - 1)}{x}.$$

La fonction est strictement décroissante sur $(0, 1]$, puis strictement croissante sur $[1, +\infty)$. En 0^+ , elle tend vers $+\infty$. À l'infini, $\varphi_2(x)/x^2 = 1 - 1/x^2 - 2 \ln x/x^2 \rightarrow 1$, donc elle tend aussi vers $+\infty$. Son minimum est $\varphi_2(1) = 0$; elle est strictement positive ailleurs.

4.b. Relions les dérivées aux fonctions étudiées. Pour $x > 0$, $x \neq 1$, on a

$$f_1'(x) = \frac{x^2 - 1 - (x^2 + 1) \ln x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{(x^2 + 1)\varphi_1(x)}{(x^2 - 1)^2}.$$

Ainsi f_1 est strictement croissante sur $(0, 1]$, puis strictement décroissante sur $[1, +\infty)$. Sa dérivée en 1 est nulle. Son prolongement vaut 0 en 0, et, à l'infini,

$$f_1(x) = \frac{\ln x/x}{1 - 1/x^2} \rightarrow 0.$$

Elle admet donc un maximum global égal à $\frac{1}{2}$, atteint uniquement en 1.

Abscisse	0	1	$+\infty$
Valeur de f_1	0	$\frac{1}{2}$	0
Variation	$\nearrow$	$\searrow$	

La courbe C_1 prolongée part de l'origine avec une demi-tangente verticale. Sa tangente en $A = (1, \frac{1}{2})$ est horizontale, et $y = 0$ est asymptote à l'infini.

Pour f_2 , la formule de 2.a donne

$$f_2'(x) = \frac{x(x^2 - 1 - 2 \ln x)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x\varphi_2(x)}{(x^2 - 1)^2} > 0 \quad (x \neq 1).$$

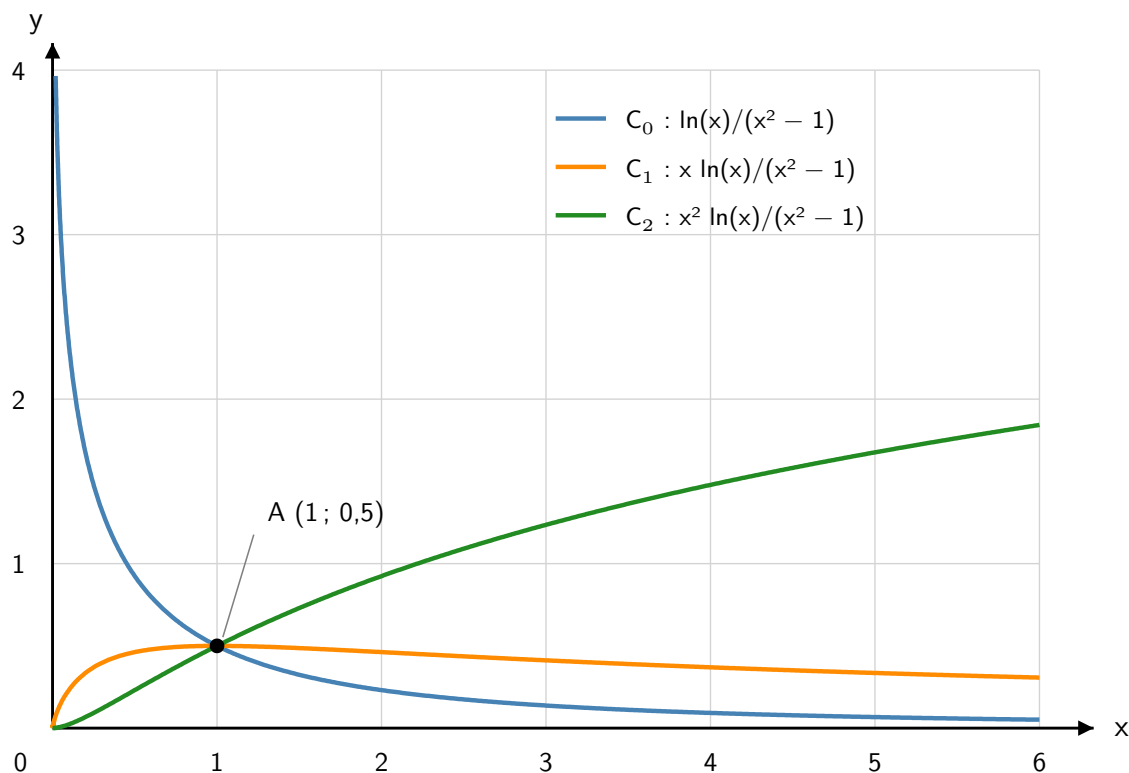
En 1, $f_2'(1) = \frac{1}{2} > 0$. La fonction est strictement croissante sur $(0, +\infty)$, et son prolongement vaut 0 en 0. À l'infini,

$$f_2(x) = \frac{\ln x}{1 - 1/x^2} \rightarrow +\infty.$$

Abscisse	0	1	$+\infty$
Valeur de f_2	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
Variation	$\nearrow$	$\nearrow$	

La tangente à droite en l'origine est l'axe des abscisses, et la tangente en A est $y = \frac{x}{2}$. La courbe est strictement en dessous de cette dernière, sauf au point de contact.

Enfin, les identités $f_1 = xf_0$ et $f_2 = x^2f_0$, avec $f_0 > 0$, permettent de comparer les courbes : pour $0 < x < 1$, $f_2(x) < f_1(x) < f_0(x)$; pour $x > 1$, $f_0(x) < f_1(x) < f_2(x)$. Elles se rencontrent toutes en A . Ces informations donnent le tracé commun suivant, dans le même repère orthonormé.



Partie II

1.a. Fixons $n \geq 1$. La fonction f_n est continue sur $(0, +\infty)$, notamment en 1 grâce au développement de la partie I. Son prolongement en 0 est continu et vaut 0. Il est donc continu sur le segment $[0, 1]$, et son intégrale sur ce segment existe.

L'intégrale écrite à partir de la fonction initiale converge également au sens impropre : l'intégrale de son prolongement sur $[\varepsilon, 1]$ tend vers l'intégrale sur $[0, 1]$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

1.b. Question adaptée au programme actuel. Rectification de l'énoncé : le différentiel absent dans le PDF est rétabli en dx dans l'intégrale et dans la définition de a_1 .

Pour $0 < x < 1$, on utilise $f_2(x) = x^2 f_0(x)$ pour obtenir

$$f_0(x) - f_2(x) = (1 - x^2) \frac{\ln x}{x^2 - 1} = -\ln x.$$

En $x = 1$, les deux membres valent 0, donc l'identité s'y prolonge. Pour $0 < \varepsilon < 1$, on calcule d'abord sur le segment $[\varepsilon, 1]$:

$$\int_{\varepsilon}^1 (f_0(x) - f_2(x)) \, dx = \int_{\varepsilon}^1 -\ln x \, dx = [-x \ln x + x]_{\varepsilon}^1 = 1 + \varepsilon \ln \varepsilon - \varepsilon.$$

Les croissances comparées donnent $\varepsilon \ln \varepsilon \rightarrow 0$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0^+$. L'intégrale impropre converge donc, et $a_1 = 1$.

1.c. Question adaptée au programme actuel. Rectification de l'énoncé : les intégrales de f_0 sont écrites avec le différentiel dx .

Sur tout segment $[\varepsilon, 1]$, avec $0 < \varepsilon < 1$, la linéarité donne

$$\int_{\varepsilon}^1 f_0(x) \, dx = \int_{\varepsilon}^1 (f_0(x) - f_2(x)) \, dx + \int_{\varepsilon}^1 f_2(x) \, dx.$$

Le premier terme tend vers $a_1 = 1$ d'après 1.b. Le second possède une limite finie d'après 1.a appliquée à $n = 2$. Le membre de gauche admet donc une limite finie : l'intégrale impropre définissant I est convergente, avec

$$I = 1 + \int_0^1 f_2(x) \, dx.$$

Cette preuve établit l'existence avant tout calcul ultérieur de I .

2.a. Question adaptée au programme actuel. Rectification de l'énoncé : le différentiel est rétabli en dx dans la définition de a_n .

Fixons $n \geq 2$. Les deux fonctions f_{2n-2} et f_{2n} ont un prolongement continu sur $[0, 1]$ d'après la partie I. L'intégrale de leur différence existe donc. Pour $0 < x < 1$,

$$f_{2n-2}(x) - f_{2n}(x) = x^{2n-2}(1-x^2) \frac{\ln x}{x^2-1} = -x^{2n-2} \ln x.$$

Les deux membres valent aussi 0 en 1, et leur limite en 0 est 0. Calculons cette intégrale par parties, d'abord sur $[\varepsilon, 1]$. Posons $m = 2n - 2$ et $q = m + 1 = 2n - 1 > 0$. Les

fonctions intervenant sont de classe C^1 sur ce segment. On prend $u(x) = -\ln x$ et $v'(x) = x^m$, donc $u'(x) = -1/x$ et $v(x) = x^q/q$. Il vient

$$\int_{\varepsilon}^1 -x^m \ln x \, dx = \left[-\frac{x^q \ln x}{q} \right]_{\varepsilon}^1 + \frac{1}{q} \int_{\varepsilon}^1 x^{q-1} \, dx = \frac{\varepsilon^q \ln \varepsilon}{q} + \frac{1 - \varepsilon^q}{q^2}.$$

Puisque $q > 0$, $\varepsilon^q \rightarrow 0$ et $\varepsilon^q \ln \varepsilon \rightarrow 0$. En passant à la limite, on obtient

$$a_n = \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

La formule est également valable pour $n = 1$, puisque $a_1 = 1$.

2.b. Les termes a_n sont positifs. Deux majorations classiques permettent de conclure.

Méthode 1 — Comparaison avec une série de Riemann

Pour $n \geq 1$, on a $2n-1 \geq n > 0$, donc $0 < a_n \leq \frac{1}{n^2}$. La série de terme général $1/n^2$ est convergente, comme rappelé dans l'énoncé. Le théorème de comparaison des séries à termes positifs assure donc la convergence de

$$\sum_{n \geq 1} a_n.$$

Méthode 2 — Majoration télescopique

Pour $n \geq 2$, l'identité $(2n-1)^2 = 4n(n-1) + 1$ donne

$$0 < a_n \leq \frac{1}{4n(n-1)} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right).$$

Pour $N \geq 2$, on somme ces inégalités :

$$\sum_{n=1}^N a_n \leq 1 + \frac{1}{4} \sum_{n=2}^N \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = 1 + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{N} \right) \leq \frac{5}{4}.$$

Les sommes partielles sont croissantes, car les termes sont positifs, et majorées. Elles convergent par le théorème de la limite monotone. Cette méthode prouve la convergence sans utiliser la convergence de la série de Riemann, mais ne donne pas encore la somme exacte.

3.a. Question adaptée au programme actuel. Les valeurs en 0 désignent les prolongements continus et la convention $x^0 = 1$ y est explicitée.

La fonction f_1 est positive sur $(0, 1]$, nulle en 0 après prolongement, et atteint son maximum $\frac{1}{2}$ en 1, d'après la partie I. Donc $0 \leq f_1(x) \leq \frac{1}{2}$ sur $[0, 1]$.

Pour $n \geq 1$ et $x \in (0, 1]$, on a $f_n(x) = x^{n-1} f_1(x)$. Comme $x^{n-1} \geq 0$, on en déduit

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{x^{n-1}}{2}.$$

Cette inégalité est encore valable en 0 : pour $n = 1$, elle se lit $0 \leq 0 \leq \frac{1}{2}$, avec la convention de l'énoncé $x^0 = 1$; pour $n \geq 2$, les trois expressions valent 0.

Les fonctions comparées sont continues sur $[0, 1]$. La positivité et la croissance de l'intégrale donnent

$$0 \leq \int_0^1 f_n(x) dx \leq \frac{1}{2} \int_0^1 x^{n-1} dx = \frac{1}{2n}.$$

Le majorant tend vers 0. Par encadrement, $\int_0^1 f_n(x) dx \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. Aucun échange entre limite et intégrale n'est utilisé.

3.b. Pour chaque entier $n \geq 1$, toutes les intégrales définissant $a_1, \dots, a_n$ convergent. On peut donc utiliser la linéarité pour cette somme finie. Les différences se télescopent :

$$\sum_{p=1}^n (f_{2p-2}(x) - f_{2p}(x)) = f_0(x) - f_{2n}(x).$$

Plus précisément, on intègre d'abord cette identité sur $[\varepsilon, 1]$ puis on fait tendre ε vers 0^+ , en utilisant les convergences déjà établies. Il vient

$$S_n = \sum_{p=1}^n a_p = \int_0^1 (f_0(x) - f_{2n}(x)) \, dx = I - \int_0^1 f_{2n}(x) \, dx.$$

La question 3.a, appliquée à l'indice $2n$, donne $0 \leq I - S_n \leq \frac{1}{4n}$. Ainsi $S_n \rightarrow I$, et

$$I = \sum_{p=1}^{+\infty} a_p = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p-1)^2}.$$

On a seulement intégré des sommes finies, puis estimé le reste ; aucun échange d'une somme infinie avec une intégrale n'est nécessaire.

4.a. On sépare les indices pairs et impairs au niveau des sommes finies. Pour tout entier $N \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^{2N} \frac{1}{k^2} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

La première somme de droite converge, car elle vaut

$$\frac{1}{4} \sum_{n=1}^N 1/n^2.$$

La seconde converge d'après 2.b. Le membre de gauche est la sous-suite des sommes partielles d'indices pairs d'une série convergente ; il tend donc vers sa somme. En faisant tendre N vers l'infini dans cette égalité finie, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

4.b. Pour tout $N \geq 1$,

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2}.$$

Le passage à la limite, avec la somme admise dans l'énoncé, donne

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{24}.$$

4.c. D'après 3.b, I est la somme des termes d'indices impairs. Les questions 4.a et 4.b donnent donc

$$I = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{8}.$$

L'intégrale impropre a été justifiée en 1.c et la relation avec la série en 3.b. Le résultat final est

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2 - 1} dx = \frac{\pi^2}{8},$$

où la fonction sous l'intégrale est prolongée par la valeur $\frac{1}{2}$ en 1.

Relevé des adaptations

Problème 2, définition de f_n , partie I, 2.a, 3.a et 4.a : le domaine $\mathbb{R}^*$ imprimé dans le PDF est rectifié en $\mathbb{R}_+^*$, car le logarithme réel n'est défini que pour des arguments strictement positifs.

Problème 2, partie II, 1.b, 1.c et 2.a : les différentiels manquants dans les intégrales sont rétablis en dx .

Problème 2, partie II, 3.a : les prolongements continus en 0 et la convention $x^0 = 1$ en 0 sont explicités pour rendre l'inégalité bien définie à son extrémité.