



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EMLYON — 1986

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

PROBLÈME 1

Partie I

1. On remonte les équations à partir de la dernière, en conservant u comme paramètre.

Aucune division par s n'est nécessaire, ce qui permet de traiter aussi $s = 0$.

La dernière équation donne $t = su$. La quatrième donne alors

$$z = st - u = (s^2 - 1)u.$$

La troisième conduit à

$$y = sz - t = (s(s^2 - 1) - s)u = (s^3 - 2s)u.$$

Enfin, la deuxième donne

$$x = sy - z = (s(s^3 - 2s) - (s^2 - 1))u = (s^4 - 3s^2 + 1)u.$$

Ces quatre équations sont donc équivalentes à

$$(x, y, z, t, u) = u(s^4 - 3s^2 + 1, s^3 - 2s, s^2 - 1, s, 1).$$

Il reste à imposer la première équation :

$$-sx + y = (-s^5 + 4s^3 - 3s)u = -s(s^2 - 1)(s^2 - 3)u = 0.$$

Lorsque $s \notin \{0, -1, 1, -\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$, cette égalité impose $u = 0$; la seule solution est donc $(0, 0, 0, 0, 0)$.

Lorsque $s \in \{0, -1, 1, -\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$, elle est satisfaite pour tout $u \in \mathbb{R}$. L'ensemble des solutions est alors

$$\{u(s^4 - 3s^2 + 1, s^3 - 2s, s^2 - 1, s, 1) : u \in \mathbb{R}\}.$$

La remontée des quatre dernières équations et la vérification de la première établissent à la fois la nécessité et la suffisance de cette description.

2. Une solution de la forme précédente est non nulle si et seulement si $u \neq 0$, puisque sa dernière coordonnée est u . Ainsi,

$$\text{le système admet une solution non nulle} \iff s(s^2 - 1)(s^2 - 3) = 0.$$

La condition cherchée est donc $s \in \{0, -1, 1, -\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$.

Partie II

1. Comme dans la partie I, on exprime successivement les coordonnées en fonction de la dernière.

La dernière équation donne $x_{n-1} = sx_n$: on pose donc $A_1(s) = s$. La précédente donne

$$x_{n-2} = sx_{n-1} - x_n = (s^2 - 1)x_n,$$

d'où $A_2(s) = s^2 - 1$.

Supposons que, pour un entier $p \in \{1, \dots, n-3\}$, on ait déjà obtenu $x_{n-p} = A_p(s)x_n$ et $x_{n-p-1} = A_{p+1}(s)x_n$. L'équation située au rang $n-p-1$ est

$$x_{n-p-2} - sx_{n-p-1} + x_{n-p} = 0.$$

Elle donne

$$x_{n-p-2} = (sA_{p+1}(s) - A_p(s))x_n.$$

On peut donc définir A_{p+2} par

$$A_{p+2}(s) = sA_{p+1}(s) - A_p(s).$$

Une somme et un produit de polynômes étant des polynômes, cette construction donne bien $A_1, \dots, A_{n-1}$. Par récurrence, toutes les coordonnées d'une solution vérifient

$$\forall p \in \{1, \dots, n-1\}, \quad x_{n-p} = A_p(s)x_n.$$

Pour la suite, il est commode de poser aussi $A_0(s) = 1$. La même relation de récurrence est alors valable à partir de A_0, A_1 .

2. La première équation devient, grâce à la question précédente,

$$-sx_1 + x_2 = (-sA_{n-1}(s) + A_{n-2}(s))x_n = -A_n(s)x_n = 0.$$

Si une solution est non nulle, sa dernière coordonnée est nécessairement non nulle : en effet, $x_n = 0$ entraînerait $x_{n-p} = 0$ pour tout p . On peut donc déduire de $A_n(s)x_n = 0$ que $A_n(s) = 0$.

Réciproquement, supposons $A_n(s) = 0$ et choisissons $r \in \mathbb{R}$. Définissons

$$x_n = r, \quad x_{n-p} = A_p(s)r \quad (1 \leq p \leq n-1).$$

La dernière équation est satisfaite puisque $A_1(s) = s$. Chaque équation intermédiaire est satisfaite par la relation

$$A_{p+2}(s) - sA_{p+1}(s) + A_p(s) = 0.$$

La première équation est satisfaite puisque son membre de gauche vaut $-A_n(s)r = 0$. En choisissant $r = 1$, on obtient une solution non nulle.

Ainsi,

$$\text{le système (II) admet une solution non nulle} \iff A_n(s) = 0.$$

Plus précisément, si $A_n(s) = 0$, les solutions sont tous les multiples réels de $(A_{n-1}(s), A_{n-2}(s), \dots, A_1(s), 1)$; sinon, la seule solution est le vecteur nul.

3. a. On utilise la récurrence avec les valeurs initiales $A_0 = 1$ et $A_1(s) = s$.

Supposons $\deg A_k = k$ et $\deg A_{k+1} = k+1$. Alors $sA_{k+1}(s)$ a le degré $k+2$, tandis que A_k a un degré strictement inférieur. Leur différence ne peut donc pas perdre son terme de degré $k+2$.

Par récurrence, $\deg A_k = k$ pour tout $k \geq 0$, et en particulier

$$\deg A_n = n.$$

3. b. Les polynômes A_0 et A_1 ont leur coefficient dominant égal à 1.

Si A_{k+1} a son coefficient dominant égal à 1, alors sA_{k+1} a le même coefficient dominant.

La soustraction de A_k , de degré $k < k+2$, ne modifie pas ce coefficient dans A_{k+2} .

Tous les A_k sont donc unitaires : le coefficient de s^n dans $A_n(s)$ vaut 1.

3. c. Notons $c_k = A_k(0)$ le coefficient constant de A_k . En évaluant la récurrence en 0, on obtient

$$c_0 = 1, \quad c_1 = 0, \quad c_{k+2} = -c_k.$$

Il en résulte, par récurrence sur m ,

$$c_{2m} = (-1)^m, \quad c_{2m+1} = 0.$$

Le terme de degré zéro de A_n est donc $(-1)^{n/2}$ si n est pair, et 0 si n est impair.

3. d. Montrons par récurrence que $A_k(-s) = (-1)^k A_k(s)$ pour tout réel s .

Cette identité est vraie pour $k = 0$ et $k = 1$. Si elle est vraie aux rangs k et $k + 1$, alors

$$\begin{aligned} A_{k+2}(-s) &= (-s)A_{k+1}(-s) - A_k(-s) \\ &= (-1)^{k+2}sA_{k+1}(s) - (-1)^k A_k(s) \\ &= (-1)^{k+2}(sA_{k+1}(s) - A_k(s)) \\ &= (-1)^{k+2}A_{k+2}(s). \end{aligned}$$

Ainsi, A_n est pair lorsque n est pair et impair lorsque n est impair.

3. e. Pour $k \geq 2$, notons d_k le coefficient de s^{k-2} dans $A_k(s)$. Puisque $A_2(s) = s^2 - 1$, on a $d_2 = -1$.

Pour $k \geq 3$, la relation $A_k = sA_{k-1} - A_{k-2}$ montre que le coefficient de s^{k-2} dans A_k est celui de s^{k-3} dans A_{k-1} , diminué du coefficient dominant de A_{k-2} :

$$d_k = d_{k-1} - 1.$$

Par récurrence, $d_k = -(k - 1)$. Le coefficient demandé est donc

$$-(n - 1).$$

Pour $n = 5$, cela donne bien $A_5(s) = s^5 - 4s^3 + 3s$, conformément au calcul de la partie I.

PROBLÈME 2

Partie I

1. a. Étude des fonctions P_1, P_2, P_3 .

Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, la fonction P_i est continue sur $\mathbb{R}_+$, vaut 1 en 0 et vaut 0 sur $[i, +\infty[$. Sur $[0, i[$, sa dérivée, comprise à droite en 0, est

$$P'_i(x) = -\left(1 - \frac{x}{i}\right)^{i-1}.$$

Cette dérivée est strictement négative avant i . Ainsi, P_i décroît strictement de 1 à 0 sur $[0, i]$, puis reste nulle.

Les expressions à utiliser pour le tracé sont :

Fonction	Expression sur $[0, i]$	Zéro à partir de
P_1	$1 - x$	$x = 1$
P_2	$(1 - x/2)^2$	$x = 2$
P_3	$(1 - x/3)^3$	$x = 3$

Au point $x = 1$, P_1 a une dérivée à gauche égale à -1 et une dérivée à droite égale à 0 : sa courbe présente un angle. Les courbes de P_2 et P_3 se raccordent à l'axe des abscisses avec une tangente horizontale, car leur dérivée à gauche en leur point d'annulation tend vers 0 .

Pour $i = 2, 3$ et $0 < x < i$,

$$P_i''(x) = \frac{i-1}{i} \left(1 - \frac{x}{i}\right)^{i-2} > 0.$$

Leurs courbes sont donc convexes avant le raccordement. Pour P_1 , la première portion est un segment ; dans les trois cas, la pente est croissante jusqu'à devenir nulle, et P_i est convexe sur $\mathbb{R}_+$.

Étude des fonctions Q_1, Q_2, Q_3 .

Elles sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$ et

$$Q_i'(x) = -\left(1 + \frac{x}{i}\right)^{-i-1} < 0, \quad Q_i''(x) = \frac{i+1}{i} \left(1 + \frac{x}{i}\right)^{-i-2} > 0.$$

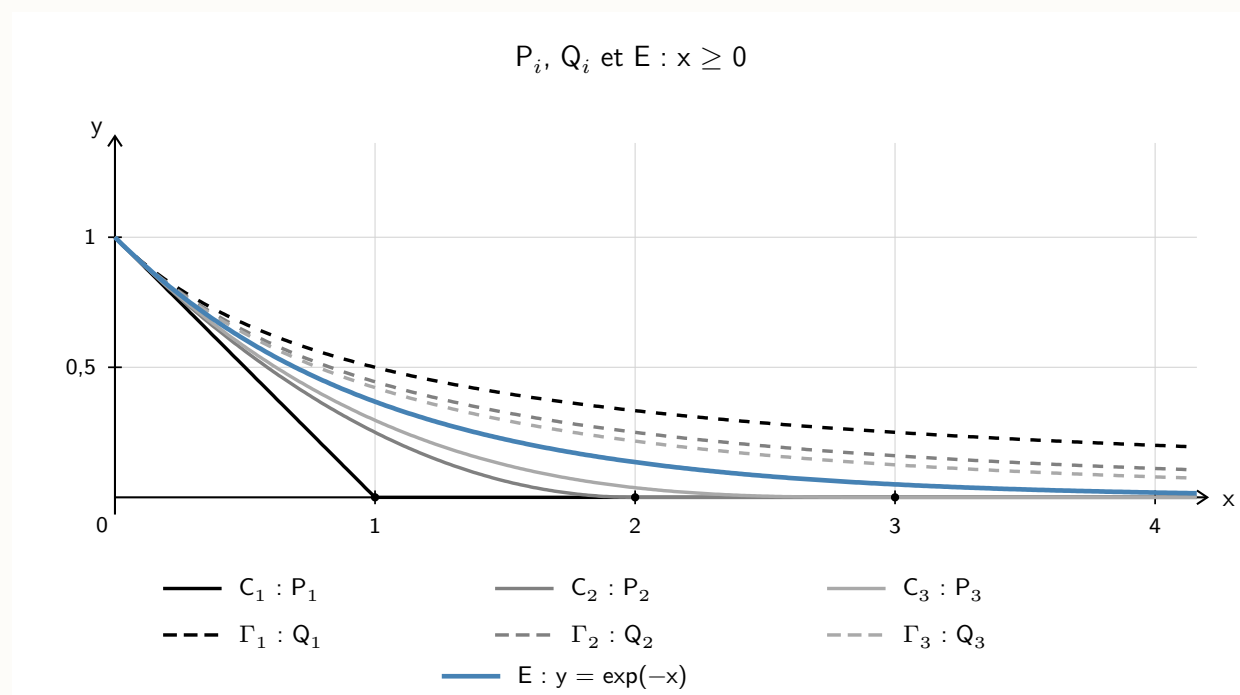
Chaque Q_i décroît strictement de $Q_i(0) = 1$ vers 0 , reste strictement positive et est strictement convexe. L'axe des abscisses est une asymptote en $+\infty$.

Fonction	Expression
Q_1	$(1+x)^{-1}$
Q_2	$(1+x/2)^{-2}$
Q_3	$(1+x/3)^{-3}$

Les six courbes passent par $(0, 1)$ et ont en ce point la même demi-tangente $y = 1 - x$, puisque $P_i'(0) = Q_i'(0) = -1$.

Enfin, $x \mapsto e^{-x}$ est strictement décroissante, strictement convexe, vaut 1 en 0 , a aussi cette demi-tangente et tend vers 0 en $+\infty$.

Le graphique ci-dessous utilise la même échelle sur les deux axes. Pour un tracé sur papier, on conserve l'unité de 4 cm demandée. Les portions nulles des trois courbes C_i se superposent à l'axe des abscisses.



1. b. Rectification locale : au point $x = n$, la dérivée d'ordre n n'existe pas. La demande de calcul de cette dérivée s'entend donc aux points où elle existe.

Pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$ et $0 \leq x < n$, la dérivation du polynôme donne

$$P_n^{(k)}(x) = (-1)^k \frac{n!}{(n-k)! n^k} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-k}.$$

Pour $x > n$, toutes les dérivées sont nulles. Vérifions le raccordement en n , sans supposer d'avance la dérivabilité en ce point.

Au rang 0, les deux expressions de P_n se raccordent continûment à la valeur 0. Supposons qu'une dérivée d'ordre $k \leq n-2$ ait été construite et vaille 0 en n . Pour $h < 0$ assez petit,

$$\frac{P_n^{(k)}(n+h) - P_n^{(k)}(n)}{h} = (-1)^k \frac{n!}{(n-k)! n^k} \frac{(-h/n)^{n-k}}{h}.$$

Cette expression tend vers 0 puisque $n - k - 1 \geq 1$. Pour $h > 0$, le même quotient est nul. La dérivée d'ordre $k + 1$ existe donc en n , vaut 0 et est continue en ce point, car son expression à gauche contient une puissance positive de $1 - x/n$.

Cela établit par récurrence que $P_n \in \mathcal{C}^{n-1}(\mathbb{R}_+)$ et que $P_n^{(k)}(n) = 0$ pour $0 \leq k \leq n - 1$. Pour $n = 1$, cette affirmation se réduit à la continuité, déjà vérifiée.

Aux points distincts de n ,

$$P_n^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^n \frac{n!}{n^n} & \text{si } 0 \leq x < n, \\ 0 & \text{si } x > n. \end{cases}$$

En revanche, le quotient différentiel de $P_n^{(n-1)}$ en n a pour limite à gauche $(-1)^n n! / n^n$ et pour limite à droite 0. Ces limites sont différentes. Ainsi, $P_n^{(n)}(n)$ n'existe pas et

$$P_n \notin \mathcal{C}^n(\mathbb{R}_+).$$

2. a. Méthode 1 — Étude des dérivées.

La fonction φ_1 est continue sur $[0, 1[$, vaut 0 en 0 et vérifie

$$\varphi_1'(t) = -\frac{1}{1-t} + \frac{1}{(1-t)^2} = \frac{t}{(1-t)^2}.$$

Elle est strictement croissante sur $]0, 1[$, car sa dérivée est strictement positive sur $]0, 1[$. Par conséquent, $\varphi_1(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, 1[$, avec égalité seulement en 0.

Pour $t \in]0, 1[$, on dérive le quotient définissant Ψ_1 :

$$\Psi_1'(t) = \frac{-t/(1-t) - \ln(1-t)}{t^2} = -\frac{\varphi_1(t)}{t^2} < 0.$$

La fonction Ψ_1 est donc strictement décroissante. La dérivabilité du logarithme en 1 donne

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1-t)}{t} = -1,$$

tandis que $\ln(1-t) \rightarrow -\infty$ lorsque $t \rightarrow 1^-$ et $t \rightarrow 1$. Ainsi, Ψ_1 décroît de la limite -1 vers $-\infty$; en particulier, $\Psi_1(t) < -1$ pour $t > 0$.

Méthode 2 — Concavité du logarithme.

La fonction $\ln$ est strictement concave sur $]0, +\infty[$, puisque sa dérivée seconde vaut $-1/x^2 < 0$. Sa courbe est située sous chacune de ses tangentes. Pour $t \in]0, 1[$, la tangente au point d'abscisse $1-t$, évaluée en 1, donne

$$0 = \ln 1 < \ln(1-t) + \frac{t}{1-t} = \varphi_1(t).$$

En $t = 0$, on retrouve l'égalité.

Considérons maintenant $h(t) = \ln(1-t)$ sur $[0, 1[$. Cette fonction est strictement concave et $h(0) = 0$. Pour $0 < a < b < 1$, la concavité stricte appliquée à $a = (a/b)b + (1-a/b)0$ donne

$$h(a) > \frac{a}{b}h(b).$$

En divisant par $a > 0$, on obtient $\Psi_1(a) > \Psi_1(b)$. Cela prouve à nouveau la décroissance stricte. Les limites sont celles calculées précédemment.

La première méthode prépare directement la question 3; la seconde explique la monotonie par les pentes des cordes d'une fonction concave.

2. b. Rectification locale : la formule $-\ln(1+t)/t$ n'est pas définie en 0. On commence donc sur $]0, +\infty[$ et on prolonge ensuite par continuité.

Méthode 1 — Étude des dérivées.

La fonction φ_2 est continue sur $\mathbb{R}_+$, $\varphi_2(0) = 0$, et

$$\varphi_2'(t) = \frac{1}{1+t} - \frac{1}{(1+t)^2} = \frac{t}{(1+t)^2}.$$

Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$; elle est donc positive ou nulle, avec égalité seulement en 0.

Pour $t > 0$,

$$\Psi_2'(t) = \frac{\ln(1+t) - t/(1+t)}{t^2} = \frac{\varphi_2(t)}{t^2} > 0.$$

La fonction Ψ_2 est strictement croissante. La dérivabilité du logarithme en 1 donne $\ln(1+t)/t \rightarrow 1$ lorsque $t \rightarrow 0^+$: le prolongement continu est défini par

$$\Psi_2(0) = -1.$$

En $+\infty$, les croissances comparées donnent $\ln(1+t)/t \rightarrow 0$, donc $\Psi_2(t) \rightarrow 0$. Le prolongement est strictement croissant sur $\mathbb{R}_+$, de -1 vers la limite 0. En particulier, $-1 < \Psi_2(t) < 0$ pour $t > 0$.

Méthode 2 — Concavité du logarithme.

Pour $t > 0$, la tangente au logarithme au point $1+t$, évaluée en 1, donne

$$0 = \ln 1 < \ln(1+t) - \frac{t}{1+t} = \varphi_2(t).$$

À nouveau, l'égalité a lieu en $t = 0$.

La fonction $h(t) = \ln(1+t)$ est strictement concave sur $\mathbb{R}_+$ et $h(0) = 0$. Pour $0 < a < b$, la concavité stricte donne

$$h(a) > \frac{a}{b}h(b), \quad \text{donc} \quad -\frac{h(a)}{a} < -\frac{h(b)}{b}.$$

Ainsi, $\Psi_2(a) < \Psi_2(b)$. Les limites précédentes assurent le prolongement et ses variations jusqu'à 0.

Cette approche géométrique complète le calcul de dérivée en reliant la monotonie à celle des pentes des cordes.

3. Fixons $x \geq 0$ et $n \geq 1$. Si $x = 0$, tous les termes de la chaîne valent 1.

Supposons désormais $x > 0$. Pour comparer P_n et P_{n+1} , on distingue les domaines de leurs expressions.

Si $x \geq n$, alors $P_n(x) = 0 \leq P_{n+1}(x)$, car P_{n+1} est positive ou nulle.

Si $0 < x < n$, alors $0 < x/(n+1) < x/n < 1$. La décroissance de Ψ_1 entraîne

$$\ln P_n(x) = x\Psi_1(x/n) \leq x\Psi_1(x/(n+1)) = \ln P_{n+1}(x).$$

L'exponentielle étant croissante, $P_n(x) \leq P_{n+1}(x)$.

Pour comparer $P_{n+1}(x)$ à e^{-x} , si $x \geq n+1$, le premier terme est nul. Sinon, $\Psi_1(x/(n+1)) \leq -1$ donne

$$\ln P_{n+1}(x) = x\Psi_1(x/(n+1)) \leq -x.$$

On a donc, dans tous les cas, $P_{n+1}(x) \leq e^{-x}$.

Enfin, pour tout $x > 0$,

$$\ln Q_n(x) = x\Psi_2(x/n).$$

Comme $\Psi_2(t) \geq -1$ et que Ψ_2 est croissante,

$$-x \leq x\Psi_2(x/(n+1)) \leq x\Psi_2(x/n).$$

En exponentiant, $e^{-x} \leq Q_{n+1}(x) \leq Q_n(x)$. On a ainsi établi toute la chaîne :

$$P_n(x) \leq P_{n+1}(x) \leq e^{-x} \leq Q_{n+1}(x) \leq Q_n(x).$$

4. a. Méthode 1 — Limites des logarithmes.

Pour $x = 0$, les deux suites sont constantes égales à $1 = e^0$. Pour $x > 0$, lorsque $n > x$, on peut écrire

$$\ln P_n(x) = x \frac{\ln(1 - x/n)}{x/n}, \quad \ln Q_n(x) = -x \frac{\ln(1 + x/n)}{x/n}.$$

Puisque $x/n \rightarrow 0$ et que les quotients ont respectivement pour limites -1 et 1 , les deux logarithmes tendent vers $-x$. La continuité de l'exponentielle entraîne

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n(x) = e^{-x}.$$

Méthode 2 — Encadrements issus des intégrales du logarithme.

Pour $0 < t < 1$, on a

$$-\ln(1-t) = \int_0^t \frac{du}{1-u}, \quad t \leq -\ln(1-t) \leq \frac{t}{1-t}.$$

Pour $t > 0$, de même,

$$\ln(1+t) = \int_0^t \frac{du}{1+u}, \quad \frac{t}{1+t} \leq \ln(1+t) \leq t.$$

En prenant $t = x/n$, pour $n > x$, il vient

$$-\frac{x}{1-x/n} \leq \ln P_n(x) \leq -x, \quad -x \leq \ln Q_n(x) \leq -\frac{x}{1+x/n}.$$

Les deux bornes de chaque encadrement tendent vers $-x$. Le théorème d'encadrement puis la continuité de l'exponentielle donnent les mêmes limites. Cette méthode fournit en plus des bornes explicites pour chaque n .

4. b. La fonction P_n est continue et nulle sur $[n, +\infty[$. Son intégrale impropre converge donc et se réduit à une intégrale sur un segment :

$$I_n = \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx.$$

Le changement de variable affine $t = 1 - x/n$ donne

$$I_n = n \int_0^1 t^n dt = \frac{n}{n+1}.$$

Pour Q_n , on commence par intégrer sur $[0, R]$, avec $R > 0$. Lorsque $n > 1$, une primitive donne

$$\int_0^R Q_n(x) dx = \frac{n}{n-1} \left[1 - \left(1 + \frac{R}{n} \right)^{1-n} \right].$$

Le terme de puissance tend vers 0 quand $R \rightarrow +\infty$. L'intégrale converge et

$$J_n = \frac{n}{n-1} \quad (n \geq 2).$$

Pour $n = 1$, on a

$$\int_0^R Q_1(x) dx = \int_0^R \frac{dx}{1+x} = \ln(1+R) \rightarrow +\infty.$$

Ainsi, J_1 n'est pas défini comme intégrale convergente. Enfin,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 1, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty, n \geq 2} J_n = 1.$$

Ces limites résultent des expressions exactes ; aucun échange entre limite et intégrale n'est utilisé.

Partie II

1. Rectification locale : $g(4)$ n'existe pas puisque le logarithme aurait pour argument 0. Le domaine de g est $[0, 4[$.

La fonction g est continue sur ce domaine et dérivable sur $]0, 4[$. Sa dérivée vaut

$$g'(x) = 1 - \frac{3}{4-x} = \frac{1-x}{4-x}.$$

Le dénominateur est strictement positif. La dérivée est donc positive pour $0 < x < 1$, nulle en 1, puis négative pour $1 < x < 4$.

Par conséquent, g est strictement croissante sur $[0, 1]$, puis strictement décroissante sur $[1, 4[$. On a

$$g(0) = 0, \quad g(1) = 1 + 3 \ln(3/4) > 0, \quad \lim_{x \rightarrow 4^-} g(x) = -\infty.$$

L'inégalité $g(1) > 0$ résulte aussi directement de la croissance stricte entre 0 et 1.

2. La fonction g est continue et strictement décroissante sur $[1, 4[$. Sa valeur en 1 est strictement positive et sa limite en 4 est $-\infty$.

Il existe donc $b \in]1, 4[$ tel que $g(b) < 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires, appliqué sur le segment $[1, b]$, donne un zéro $\alpha \in]1, b[$. La décroissance stricte sur $[1, 4[$ assure son unicité dans $]1, 4[$.

Compte tenu de la première question et de $g(0) = 0$, le signe de g est

$$g(x) > 0 \quad (0 < x < \alpha), \quad g(\alpha) = 0, \quad g(x) < 0 \quad (\alpha < x < 4).$$

3. Sur $[0, 4]$, on a $P_4(x) = (1 - x/4)^4$. Pour $0 < x < 4$,

$$f'(x) = -e^{-x} + \left(1 - \frac{x}{4}\right)^3.$$

L'identité $e^{g(x)} = e^x(1 - x/4)^3$, valable pour $x < 4$, donne

$$f'(x) = e^{-x}(e^{g(x)} - 1).$$

Comme $e^{-x} > 0$ et que $e^{g(x)} - 1$ a le signe de $g(x)$, f' est strictement positive sur $]0, \alpha[$, nulle en α , puis strictement négative sur $] \alpha, 4[$.

Ainsi, f croît strictement sur $[0, \alpha]$ et décroît strictement sur $[\alpha, 4]$. Ses valeurs aux bornes sont

$$f(0) = 0, \quad f(4) = e^{-4}.$$

La fonction f est continue sur le segment $[0, 4]$ et atteint son maximum global en α . La partie I donne aussi $f(x) = e^{-x} - P_4(x) \geq 0$ sur ce segment.

4. a. Puisque g est strictement décroissante sur $[1, 4]$, il suffit de vérifier $g(1, 8) > 0$ et $g(1, 9) < 0$.

La première inégalité s'écrit

$$g(1, 8) = \frac{9}{5} + 3 \ln \frac{11}{20} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{3/5} > \frac{20}{11}.$$

La série exponentielle a des termes positifs. Sa somme partielle jusqu'au rang 4 donne

$$e^{3/5} > 1 + \frac{3}{5} + \frac{(3/5)^2}{2} + \frac{(3/5)^3}{6} + \frac{(3/5)^4}{24} = 1,8214 > \frac{20}{11}.$$

La deuxième inégalité s'écrit

$$g(1, 9) = \frac{19}{10} + 3 \ln \frac{21}{40} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{19/30} < \frac{40}{21}.$$

Posons $z = 19/30$. À partir du terme de rang 4 de la série exponentielle, le quotient de deux termes successifs est au plus $z/5 < 1$. Une comparaison avec une série géométrique donne donc

$$e^z \leq 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24(1 - z/5)} = \frac{159920881}{84888000} < \frac{40}{21}.$$

Les deux signes sont ainsi établis par des bornes explicites. Comme $g(\alpha) = 0$, on conclut

$$1,8 < \alpha < 1,9.$$

4. b. L'équation $g(\alpha) = 0$ donne

$$e^{-\alpha} = \left(1 - \frac{\alpha}{4}\right)^3.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= e^{-\alpha} - \left(1 - \frac{\alpha}{4}\right)^4 \\ &= e^{-\alpha} \left[1 - \left(1 - \frac{\alpha}{4}\right)\right] \\ &= \frac{\alpha}{4} e^{-\alpha}. \end{aligned}$$

La fonction $q(x) = xe^{-x}/4$ a pour dérivée $q'(x) = (1-x)e^{-x}/4$; elle est donc strictement décroissante sur $]1, +\infty[$. L'encadrement de α donne

$$\frac{1,9}{4} e^{-1,9} < f(\alpha) < \frac{1,8}{4} e^{-1,8}.$$

Les deux bornes valent respectivement environ 0,07105 et 0,07438. Pour certifier la précision sans dépendre des seuls arrondis, on peut utiliser les encadrements suivants.

D'une part, $e^{1,9} < e^2 \leq 67/9$. En effet, dans la série de e^2 , la somme des termes de rang 0 à 3 vaut $19/3$, et le reste à partir du rang 4 est au plus

$$\frac{2^4}{4!} \frac{1}{1 - 2/5} = \frac{10}{9},$$

de sorte que $e^2 \leq 67/9$. On a donc $f(\alpha) > (1,9/4) \cdot (9/67) = 171/2680 > 0,0638$.

D'autre part,

$$e^{1,8} > 1 + 1,8 + \frac{1,8^2}{2} + \frac{1,8^3}{6} + \frac{1,8^4}{24} = 5,8294 > \frac{45}{8}.$$

Cela donne $f(\alpha) < (1,8/4)/(45/8) = 0,08$. Ainsi,

$$0,0638 < f(\alpha) < 0,08.$$

Cet encadrement suffit déjà à certifier $|f(\alpha) - 0,07| < 0,01$. Une valeur décimale approchée à 10^{-2} près est donc

$$f(\alpha) \approx 0,07.$$

Une évaluation plus précise donne $\alpha \approx 1,81758$ et $f(\alpha) \approx 0,073802$. La borne rigoureuse $f(\alpha) < 0,08$ sera utilisée dans la partie III ; une approximation à 10^{-2} près, prise isolément, ne suffirait pas à prouver cette borne.

Partie III

1. La fonction $x \mapsto e^{-x^4}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$. Son intégrale sur $[0, 1]$ existe donc.

Pour $x \geq 1$, on a $x^4 \geq x$, d'où

$$0 \leq e^{-x^4} \leq e^{-x}.$$

Or $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx = e^{-1} < +\infty$. Le théorème de comparaison pour les intégrales de

fonctions positives assure la convergence de $\int_1^{+\infty} e^{-x^4} dx$, donc celle de I .

Pour tout $T > \sqrt{2}$, la relation de Chasles sur un segment donne

$$\int_0^T e^{-x^4} dx = \int_0^{\sqrt{2}} e^{-x^4} dx + \int_{\sqrt{2}}^T e^{-x^4} dx.$$

En passant à la limite lorsque $T \rightarrow +\infty$, ce qui est licite puisque les intégrales impropres convergent, on obtient

$$I = \int_0^{\sqrt{2}} e^{-x^4} dx + \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} e^{-x^4} dx.$$

2. a. Pour $x \in [0, \sqrt{2}]$, on a $x^4 \in [0, 4]$. La partie II a montré que, sur ce dernier segment, f est positive ou nulle et que son maximum est $f(\alpha) < 0,08$.

En appliquant ces résultats à x^4 , on obtient

$$0 \leq e^{-x^4} - P_4(x^4) = f(x^4) \leq f(\alpha) < 0,08.$$

L'encadrement demandé, avec une inégalité large à droite, est donc établi.

2. b. Notons $B = \int_0^{\sqrt{2}} P_4(x^4) dx$. L'intégrande est continu sur le segment, donc cette intégrale existe.

Puisque $x^4 \leq 4$ sur l'intervalle d'intégration,

$$B = \int_0^{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{x^4}{4}\right)^4 dx.$$

Méthode 1 — Développement du polynôme.

Avec le changement de variable affine indiqué $u = x/\sqrt{2}$, on a $x = \sqrt{2}u$, $dx = \sqrt{2} du$ et $x^4/4 = u^4$. Ainsi,

$$B = \sqrt{2} \int_0^1 (1 - u^4)^4 du.$$

La formule du binôme donne

$$(1 - u^4)^4 = 1 - 4u^4 + 6u^8 - 4u^{12} + u^{16}.$$

On intègre chaque terme de cette somme finie :

$$B = \sqrt{2} \left(1 - \frac{4}{5} + \frac{6}{9} - \frac{4}{13} + \frac{1}{17} \right) = \frac{2048\sqrt{2}}{3315}.$$

Méthode 2 — Récurrence par intégration par parties.

Après le même changement de variable, posons, pour $m \in \{0, \dots, 4\}$,

$$H_m = \int_0^1 (1 - u^4)^m du.$$

On a $H_0 = 1$ et $B = \sqrt{2}H_4$. Pour $m \geq 1$, l'intégration par parties sur le segment $[0, 1]$, avec la primitive u de 1, donne

$$H_m = [u(1 - u^4)^m]_0^1 + 4m \int_0^1 u^4(1 - u^4)^{m-1} du.$$

Le terme aux bornes est nul. Comme $u^4 = 1 - (1 - u^4)$,

$$H_m = 4m(H_{m-1} - H_m), \quad H_m = \frac{4m}{4m+1}H_{m-1}.$$

Ainsi,

$$H_4 = \frac{4}{5} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{12}{13} \cdot \frac{16}{17} = \frac{2048}{3315},$$

et l'on retrouve $B = 2048\sqrt{2}/3315$. La première méthode est immédiate pour une faible puissance ; la seconde évite de développer et se réutilise pour des puissances plus élevées.

Numériquement,

$$0,87369 < B < 0,87371.$$

Ces bornes se vérifient par exemple en utilisant $1,4142135 < \sqrt{2} < 1,4142136$, dont la validité se contrôle en élevant les deux nombres positifs au carré.

La valeur 0,87 constitue donc une approximation de B à 10^{-2} près.

2. c. Notons $A = \int_0^{\sqrt{2}} e^{-x^4} dx$. En intégrant l'encadrement de la question 2. a sur un segment, la positivité et la croissance de l'intégrale donnent

$$0 \leq A - B \leq 0,08\sqrt{2}.$$

On en déduit

$$\frac{2048\sqrt{2}}{3315} \leq A \leq \left(\frac{2048}{3315} + \frac{2}{25} \right) \sqrt{2}.$$

La borne inférieure est supérieure à 0,87, d'après la question précédente. La borne supérieure est inférieure à 0,987, en utilisant $\sqrt{2} < 1,4142136$; elle est donc inférieure à 1.

Ainsi, l'encadrement demandé est vérifié :

$$0,87 \leq A \leq 1.$$

3. a. Le changement de variable non affine $y = x^4$ est celui indiqué dans l'énoncé. On l'effectue d'abord sur $[\sqrt{2}, T]$, où $T > \sqrt{2}$.

L'application $x \mapsto x^4$ est de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissante, et sa dérivée $4x^3$ ne s'annule pas sur ce segment. Son inverse est $x = y^{1/4}$ et $dx = \frac{1}{4}y^{-3/4} dy$. Par conséquent,

$$\int_{\sqrt{2}}^T e^{-x^4} dx = \frac{1}{4} \int_4^{T^4} e^{-y} y^{-3/4} dy.$$

Pour $y \geq 4$, la fonction $y \mapsto y^{-3/4}$ est décroissante, donc $y^{-3/4} \leq 4^{-3/4}$. Par croissance de l'intégrale,

$$0 \leq \int_{\sqrt{2}}^T e^{-x^4} dx \leq \frac{1}{4^{7/4}} \int_4^{T^4} e^{-y} dy.$$

Les intégrales impropres des deux côtés convergent : celle de gauche par la question 1, celle de droite par intégrabilité de l'exponentielle. Le passage à la limite donne

$$\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} e^{-x^4} dx \leq \frac{1}{4^{7/4}} \int_4^{+\infty} e^{-y} dy.$$

3. b. Notons $T_0 = \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} e^{-x^4} dx$. Comme l'intégrande est strictement positif,

$$0 < T_0 \leq \frac{e^{-4}}{4^{7/4}}.$$

La borne supérieure vaut environ 0,001619. Elle est en particulier inférieure à 0,01. On peut aussi certifier cette dernière inégalité sans arrondi : la série exponentielle donne $e^4 > 1 + 4 + 4^2/2 = 13$, et $4^{7/4} = 8\sqrt{2} > 8$, donc

$$\frac{e^{-4}}{4^{7/4}} < \frac{1}{13 \cdot 8} < 0,01.$$

Ainsi, $|T_0 - 0| < 0,01$. Une valeur décimale approchée à 10^{-2} près est donc 0,00. L'intégrale est strictement positive ; c'est son approximation à cette précision qui vaut zéro.

4. La décomposition $I = A + T_0$ et les bornes précédentes donnent

$$\frac{2048\sqrt{2}}{3315} < I \leq \left(\frac{2048}{3315} + \frac{2}{25} \right) \sqrt{2} + \frac{e^{-4}}{4^{7/4}}.$$

Pour une vérification numérique de la dernière borne, la série exponentielle donne

$$e^4 > \sum_{k=0}^8 \frac{4^k}{k!} > 53.$$

Avec $1,4142 < \sqrt{2} < 1,4142136$, il en résulte

$$\frac{e^{-4}}{4^{7/4}} < \frac{1}{53 \cdot 8 \cdot 1,4142} < 0,00167.$$

Comme la borne de A est inférieure à 0,987, la borne supérieure de I est inférieure à 0,99. On peut donc conclure

$$0,87 < I < 0,99.$$

La valeur 0,93 approche ainsi I avec une erreur strictement inférieure à 0,06. Les

estimations demandées dans le sujet ne garantissent pas, à elles seules, une approximation de I à 10^{-2} près.

Pour obtenir une précision supplémentaire, on peut utiliser des rectangles, avec un contrôle élémentaire de l'erreur. Posons $w(x) = e^{-x^4}$, $h = 2/1000 = 0,002$ et

$$R = h \sum_{k=1}^{1000} w(kh).$$

La fonction w est décroissante sur $[0, 2]$. Sur chaque intervalle $[(k-1)h, kh]$,

$$h w(kh) \leq \int_{(k-1)h}^{kh} w(x) dx \leq h w((k-1)h).$$

En sommant ces inégalités finies, on obtient

$$R \leq \int_0^2 w(x) dx \leq R + h(1 - e^{-16}).$$

Comme dans la question 3. a, le changement de variable $y = x^4$, d'abord sur $[2, b]$ puis par passage à la limite, donne

$$0 \leq \int_2^{+\infty} w(x) dx \leq \frac{e^{-16}}{4 \cdot 16^{3/4}} = \frac{e^{-16}}{32}.$$

Par conséquent,

$$R \leq I \leq R + 0,002(1 - e^{-16}) + \frac{e^{-16}}{32}.$$

L'évaluation de cette somme finie donne $R \approx 0,90540247$, et la borne supérieure vaut environ $0,90740248$. Pour rendre ces évaluations certifiables, chaque terme e^{-z} , avec

$0 \leq z \leq 16$, peut être évalué par le polynôme de Taylor de l'exponentielle à l'ordre 100. L'inégalité de Taylor-Lagrange sur $[-16, 0]$ donne

$$\left| e^{-z} - \sum_{j=0}^{100} \frac{(-z)^j}{j!} \right| \leq \frac{16^{101}}{101!} < 7 \cdot 10^{-39}.$$

Tous les $z = (kh)^4$ sont rationnels ; les sommes polynomiales peuvent donc être calculées exactement. L'erreur sur R est au plus $2 \cdot 7 \cdot 10^{-39}$. Ce contrôle, appliqué aussi à e^{-16} , permet notamment de retenir l'encadrement

$$0,9054 < I < 0,9075.$$

Il fournit, si l'on souhaite affiner la conclusion, l'approximation $I \approx 0,91$ avec une erreur inférieure à 10^{-2} .

Relevé des adaptations

- Problème 2, partie I, question 1. b : le calcul de $P_n^{(n)}$ est demandé aux points où la dérivée existe ; au point n , les dérivées unilatérales de $P_n^{(n-1)}$ sont différentes.
- Problème 2, partie I, question 2. b : la formule de Ψ_2 est définie sur $]0, +\infty[$, puis prolongée par continuité en 0, pour corriger la division par zéro présente dans la définition originale sur $\mathbb{R}_+$.
- Problème 2, partie II, définition de g et question 1 : le domaine est remplacé par $[0, 4[$, car $\ln(1 - x/4)$ n'est pas défini en $x = 4$.