



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques

1984

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

PARTIE I

La notation $\arccos$ désigne ici la réciproque du cosinus restreint à $[0, \pi]$. Ses propriétés nécessaires seront obtenues avec le théorème de la bijection et la dérivation d'une réciproque.

1. a. Continuité et dérivabilité de Q_n

Fixons $n \in \mathbb{N}$. Sur $]0, \pi[$, le sinus ne s'annule pas. Le quotient définissant Q_n est donc de classe C^∞ sur cet intervalle, en particulier continu et dérivable.

Au voisinage de 0, la limite usuelle $\sin u/u \rightarrow 1$ donne :

$$\frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin \theta} = (n+1) \frac{\sin((n+1)\theta)}{(n+1)\theta} \frac{\theta}{\sin \theta} \rightarrow n+1 = Q_n(0).$$

Pour étudier l'autre extrémité, posons $u = \pi - \theta$. Alors $u \rightarrow 0^+$ lorsque $\theta \rightarrow \pi^-$. Les formules d'addition et les valeurs du sinus et du cosinus aux multiples entiers de π donnent :

$$\sin \theta = \sin u, \quad \sin((n+1)\theta) = \sin((n+1)\pi - (n+1)u) = (-1)^n \sin((n+1)u).$$

Par conséquent, $Q_n(\theta) \rightarrow (-1)^n(n+1) = Q_n(\pi)$.

Q_n est continue sur $[0, \pi]$ et dérivable sur $]0, \pi[$.

Pour $0 < \theta < \pi$, sa dérivée vaut :

$$Q'_n(\theta) = \frac{(n+1) \cos((n+1)\theta) \sin \theta - \sin((n+1)\theta) \cos \theta}{\sin^2 \theta}.$$

1. b. Continuité et dérivabilité de P_n

Le cosinus est continu sur $[0, \pi]$, strictement décroissant puisque sa dérivée est $-\sin \theta < 0$ sur $]0, \pi[$, et prend les valeurs 1 et -1 aux extrémités. Il réalise donc une

bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$. Le théorème de la bijection assure la continuité de sa réciproque arccos sur $[-1, 1]$.

La composition $P_n = Q_n \circ \arccos$ est ainsi continue sur $[-1, 1]$.

Pour $x \in]-1, 1[$, l'angle $\theta = \arccos x$ appartient à $]0, \pi[$, où la dérivée du cosinus est non nulle. La dérivation d'une réciproque donne :

$$(\arccos)'(x) = -\frac{1}{\sin \theta} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

La racine est positive car $\sin \theta > 0$ et $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - x^2$. La dérivation d'une composée fournit alors :

$$P'_n(x) = -\frac{Q'_n(\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

P_n est continue sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $] - 1, 1[$.

2. a. Valeurs en $-1, 0$ et 1

Comme $\arccos(-1) = \pi$, $\arccos(0) = \pi/2$ et $\arccos(1) = 0$, on obtient :

$$P_n(-1) = (-1)^n(n+1), \quad P_n(1) = n+1.$$

À l'origine :

$$P_n(0) = \sin\left(\frac{(n+1)\pi}{2}\right).$$

En distinguant les indices pairs et impairs, cela s'écrit :

$$P_{2k}(0) = (-1)^k, \quad P_{2k+1}(0) = 0 \quad (k \in \mathbb{N}).$$

2. b. Dérivée à l'origine

La formule de 1. b. donne $P'_n(0) = -Q'_n(\pi/2)$. Dans l'expression de Q'_n établie en 1. a., on utilise $\sin(\pi/2) = 1$ et $\cos(\pi/2) = 0$:

$$Q'_n(\pi/2) = (n+1) \cos\left(\frac{(n+1)\pi}{2}\right).$$

Par la formule d'addition $\cos(u + \pi/2) = -\sin u$, on en déduit :

$$P'_n(0) = (n+1) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

Donc :

$$P'_{2k}(0) = 0, \quad P'_{2k+1}(0) = (-1)^k(2k+2) \quad (k \in \mathbb{N}).$$

3. a. Les trois premières fonctions

Pour $x \in]-1, 1[$, posons $\theta = \arccos x$. On a $\cos \theta = x$ et $\sin \theta > 0$.

La définition donne immédiatement $P_0(x) = 1$. La formule d'addition donne $\sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta$, d'où $P_1(x) = 2x$.

Pour le troisième terme, établissons l'identité nécessaire avec les formules d'addition :

$$\sin(3\theta) = \sin(2\theta) \cos \theta + \cos(2\theta) \sin \theta.$$

Or $\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1$, donc :

$$\sin(3\theta) = \sin \theta(2 \cos^2 \theta + 2 \cos^2 \theta - 1) = \sin \theta(4 \cos^2 \theta - 1).$$

Il en résulte $P_2(x) = 4x^2 - 1$. Ces expressions se prolongent aux extrémités par continuité ; elles prennent bien les valeurs données en 2. a.

$$\forall x \in [-1, 1], \quad P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = 2x, \quad P_2(x) = 4x^2 - 1.$$

3. b. Relation de récurrence

Les formules d'addition donnent, pour tous réels u, v :

$$\sin(u+v) + \sin(u-v) = 2 \sin u \cos v.$$

On les applique avec $u = (n+2)\theta$ et $v = \theta$:

$$\sin((n+3)\theta) + \sin((n+1)\theta) = 2 \cos \theta \sin((n+2)\theta).$$

Pour $0 < \theta < \pi$, la division par $\sin \theta$ est licite et donne $Q_{n+2}(\theta) + Q_n(\theta) = 2 \cos \theta Q_{n+1}(\theta)$.

En posant $\theta = \arccos x$, on obtient la relation pour $x \in]-1, 1[$. Les deux membres étant continus sur $[-1, 1]$, elle reste vraie en $x = -1$ et $x = 1$ par passage aux limites.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-1, 1], P_{n+2}(x) = 2xP_{n+1}(x) - P_n(x)}.$$

3. c. Caractère polynomial, degré et parité

La récurrence précédente, avec $P_0 = 1$ et $P_1 = 2x$, construit des polynômes réels dont les restrictions à $[-1, 1]$ sont les fonctions P_n .

Montrons par récurrence que le polynôme associé à P_n est de degré n , de coefficient dominant 2^n , et vérifie $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$. Ces trois propriétés sont vraies pour les indices 0 et 1.

Supposons-les vraies aux indices n et $n + 1$. Le terme $2xP_{n+1}(x)$ est de degré $n + 2$ et de coefficient dominant $2 \cdot 2^{n+1} = 2^{n+2}$; le polynôme P_n est de degré n , donc sa soustraction ne modifie pas le terme de degré $n + 2$.

Pour la parité, la récurrence donne :

$$P_{n+2}(-x) = 2(-x)(-1)^{n+1}P_{n+1}(x) - (-1)^n P_n(x) = (-1)^{n+2}P_{n+2}(x).$$

Les propriétés sont donc établies à tous les indices.

$$\boxed{\deg P_n = n, \quad \text{coefficient dominant } 2^n, \quad P_n \text{ paire si } n \text{ est pair et impaire si } n \text{ est impair}}.$$

4. a. Existence de l'intégrale trigonométrique

Pour $a \in]0, \pi]$, l'intégrande coïncide avec Q_n aux points où le quotient est défini. D'après

1. a., il possède un prolongement continu sur $[0, a]$.

Si $a < \pi$, la seule extrémité à traiter est 0. Pour $\varepsilon \in]0, a[$, on a :

$$\int_{\varepsilon}^a \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin \theta} d\theta = \int_{\varepsilon}^a Q_n(\theta) d\theta \longrightarrow \int_0^a Q_n(\theta) d\theta.$$

Si $a = \pi$, le même raisonnement s'applique aux deux extrémités, car Q_n est continue sur $[0, \pi]$. Il suffit de scinder l'intégrale en un point intérieur, par exemple $\pi/2$.

La fonction continue Q_n est bornée sur ce segment ; le même argument appliqué à $|Q_n|$ prouve la convergence absolue.

$$\forall a \in]0, \pi], \int_0^a \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin \theta} d\theta \text{ existe et vaut } \int_0^a Q_n(\theta) d\theta.$$

4. b. Intégrale pondérée et changement de variable

Question adaptée au programme actuel : le changement de variable non affine $x = \cos \theta$ est indiqué dans le sujet.

Tout d'abord, P_n est continue sur $[0, 1]$, donc il existe $M_n \geq 0$ tel que $|P_n(x)| \leq M_n$ sur ce segment. Pour $0 \leq x < 1$, on a $1 - x^2 = (1 - x)(1 + x) \geq 1 - x$, donc :

$$\frac{|P_n(x)|}{\sqrt{1 - x^2}} \leq \frac{M_n}{\sqrt{1 - x}}.$$

La fonction $(1 - x)^{-1/2}$ est intégrable au voisinage de 1, puisque sa primitive est $-2\sqrt{1 - x}$. L'intégrale demandée converge donc absolument par comparaison ; l'intégrande est continue au voisinage de 0.

Pour $b \in]0, 1[$, on utilise le changement de variable $x = \cos \theta$ sur le segment $[\arccos b, \pi/2]$. Il est de classe C^1 , et $\sin \theta > 0$ sur ce segment. On a $dx = -\sin \theta d\theta$ et $\sqrt{1 - x^2} = \sin \theta$, d'où :

$$\int_0^b \frac{P_n(x)}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \int_{\arccos b}^{\pi/2} Q_n(\theta) d\theta.$$

Lorsque $b \rightarrow 1^-$, $\arccos b \rightarrow 0$. La continuité de Q_n et la convergence de l'intégrale de

gauche justifient le passage à la limite :

$$\boxed{\int_0^1 \frac{P_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^{\pi/2} Q_n(\theta) d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin \theta} d\theta.}$$

PARTIE II

1. Limite d'une intégrale oscillante

Fixons $a < b$ et f de classe C^1 sur $[a, b]$. Pour $n \geq 1$, une intégration par parties sur le segment $[a, b]$ donne :

$$\int_a^b f(x) \sin(nx) dx = \left[-\frac{f(x) \cos(nx)}{n} \right]_a^b + \frac{1}{n} \int_a^b f'(x) \cos(nx) dx.$$

Puisque f' est continue sur le segment, l'intégrale de $|f'|$ est finie. Comme $|\cos(nx)| \leq 1$, on obtient :

$$\left| \int_a^b f(x) \sin(nx) dx \right| \leq \frac{|f(a)| + |f(b)| + \int_a^b |f'(x)| dx}{n}.$$

Le numérateur est une constante indépendante de n et le membre de droite tend vers 0. Par encadrement :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \sin(nx) dx = 0.}$$

La valeur du terme d'indice 0, égale à 0, ne modifie pas la limite. Ce résultat est démontré ici uniquement pour une fonction de classe C^1 sur un segment, ce qui suffira à toutes ses utilisations.

2. a. Continuité de g

Pour $x \neq 0$ dans $[-\pi/2, \pi/2]$, les dénominateurs x et $\sin x$ sont non nuls, donc g est continue. Il reste à vérifier le point 0.

Le développement limité usuel du sinus en 0 donne $\sin x = x - x^3/6 + o(x^3)$. On écrit la différence sous forme d'un seul quotient :

$$g(x) = \frac{\sin x - x}{x \sin x}.$$

Ainsi, pour $x \neq 0$ tendant vers 0 :

$$\frac{g(x)}{x} = \frac{(\sin x - x)/x^3}{\sin x/x} \rightarrow -\frac{1}{6}.$$

Il en résulte $g(x) = -x/6 + o(x)$, donc $g(x) \rightarrow 0 = g(0)$.

g est continue sur $[-\pi/2, \pi/2]$.

2. b. Dérivabilité et continuité de la dérivée

Le calcul précédent fournit directement :

$$g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = -\frac{1}{6}.$$

Pour $x \neq 0$, la dérivation des quotients donne :

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{\cos x}{\sin^2 x} = \frac{x^2 \cos x - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x}.$$

Cette expression est continue aux points non nuls. Pour déterminer sa limite à l'origine, utilisons les développements limités usuels :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

Par multiplication de développements limités :

$$x^2 \cos x = x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4), \quad \sin^2 x = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4).$$

Donc $x^2 \cos x - \sin^2 x = -x^4/6 + o(x^4)$, tandis que $x^2 \sin^2 x = x^4(1 + o(1))$. Ainsi $g'(x) \rightarrow -1/6 = g'(0)$.

$$g \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } [-\pi/2, \pi/2], \quad g'(0) = -\frac{1}{6}.$$

Aux extrémités du segment, la dérivabilité se comprend à sens unique. On peut aussi considérer la même définition sur $] -\pi, \pi[$: le raisonnement y donne un prolongement de classe C^1 sur un ouvert contenant le segment.

PARTIE III

Résultat admis dans cette version adaptée : pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $a \in]0, \pi/2]$, l'intégrale $\int_0^a \frac{\sin(nx)}{\sin x} dx$ existe. Cette hypothèse assure notamment que les intégrales I_n et celles de III. 2. e. sont définies. Les quotients en 0 se comprennent par prolongement continu, ou comme des intégrales impropres convergentes.

1. a. Continuité de φ_n

Si $n = 0$, la fonction φ_0 est identiquement nulle et donc continue sur $\mathbb{R}$.

Pour $n \geq 1$, le quotient $\sin(nx)/x$ est continu sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Au voisinage de 0 :

$$\frac{\sin(nx)}{x} = n \frac{\sin(nx)}{nx} \rightarrow n = \varphi_n(0).$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \varphi_n \text{ est continue sur } \mathbb{R}.$$

1. b. Convergence de l'intégrale de Dirichlet et absence de convergence absolue

Au voisinage de l'origine, le quotient $\sin x/x$ se prolonge par la valeur 1 et coïncide alors avec la fonction continue φ_1 . Ainsi $\int_0^1 \sin x/x dx$ converge, même absolument, puisque φ_1 est bornée sur $[0, 1]$.

Pour traiter l'infini, on effectue une intégration par parties sur $[1, A]$, où $A > 1$, avec $u(x) = 1/x$ et $v'(x) = \sin x$:

$$\int_1^A \frac{\sin x}{x} dx = \left[-\frac{\cos x}{x} \right]_1^A - \int_1^A \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

Le terme $-\cos A/A$ tend vers 0. De plus, $|\cos x/x^2| \leq 1/x^2$, et l'intégrale de $1/x^2$ sur $[1, +\infty[$ converge. L'intégrale du dernier terme converge donc absolument.

Ainsi $\int_1^{+\infty} \sin x/x dx$ converge et $\boxed{L = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \text{ existe}}.$

Méthode 1 — Non-convergence absolue par comparaison à $\sin^2 x$

L'indication est valable car $0 \leq |\sin x| \leq 1$, donc $|\sin x| \geq |\sin x|^2 = \sin^2 x$. En utilisant la formule d'addition $\cos(2x) = 1 - 2 \sin^2 x$, on obtient, pour $A > 1$:

$$\int_1^A \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \frac{1}{2} \int_1^A \frac{1}{x} dx - \frac{1}{2} \int_1^A \frac{\cos(2x)}{x} dx.$$

L'intégrale oscillante de droite possède une limite finie. En effet, sur $[1, A]$, une intégration par parties donne :

$$\int_1^A \frac{\cos(2x)}{x} dx = \left[\frac{\sin(2x)}{2x} \right]_1^A + \frac{1}{2} \int_1^A \frac{\sin(2x)}{x^2} dx.$$

Le terme en A tend vers 0 et la dernière intégrale converge absolument par domination par $1/x^2$. En revanche, $\int_1^A 1/x dx = \ln A \rightarrow +\infty$.

La minoration entraîne donc $\int_1^A |\sin x|/x dx \rightarrow +\infty$. Ainsi

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \text{ n'est pas absolument convergente}}.$$

Méthode 2 — Non-convergence absolue sur des intervalles successifs

Pour tout entier $k \geq 1$, et tout $x \in [k\pi + \pi/6, k\pi + 5\pi/6]$, on a $|\sin x| \geq 1/2$. De plus

$x \leq (k+1)\pi$, donc :

$$\int_{k\pi+\pi/6}^{k\pi+5\pi/6} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \frac{1}{2(k+1)\pi} \left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{3(k+1)}.$$

Ces intervalles sont disjoints et contenus dans $[1, +\infty[$. En additionnant les minoration pour $k = 1, \dots, N$, on obtient :

$$\int_1^{(N+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k+1} \rightarrow +\infty,$$

car la série harmonique diverge. Cette méthode confirme l'absence de convergence absolue. La première exploite la décomposition en un terme logarithmique et un terme oscillant ; la seconde compare la contribution de chaque période à une série de Riemann.

2. a. Les premières valeurs de I_n

Pour $x \in]0, \pi/2]$, les intégrandes sont respectivement 0, 1 et $2 \cos x$, cette dernière identité résultant de $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$. Les prolongements en 0 ne changent pas les intégrales.

$$I_0 = 0, \quad I_1 = \frac{\pi}{2}, \quad I_2 = 2 \int_0^{\pi/2} \cos x dx = 2.$$

2. b. Récurrence et valeurs exactes

Méthode 1 — Différence de deux intégrales

Les formules d'addition fournissent $\sin(u+v) - \sin(u-v) = 2 \cos u \sin v$. Avec $u = (n+1)x$ et $v = x$, on obtient :

$$\sin((n+2)x) - \sin(nx) = 2 \cos((n+1)x) \sin x.$$

En divisant pour $x > 0$, puis en intégrant sur $[0, \pi/2]$ par prolongement continu en 0 :

$$I_{n+2} - I_n = 2 \int_0^{\pi/2} \cos((n+1)x) dx = \frac{2}{n+1} \sin\left(\frac{(n+1)\pi}{2}\right).$$

Ainsi :

$$I_{2k+2} - I_{2k} = \frac{2(-1)^k}{2k+1}, \quad I_{2k+3} - I_{2k+1} = 0 \quad (k \in \mathbb{N}).$$

La suite $K_n = I_{2n+1}$ est constante et son premier terme est I_1 :

$$\forall n \in \mathbb{N}, K_n = \frac{\pi}{2}.$$

Pour les indices pairs, $J_0 = I_0 = 0$ et $J_{k+1} - J_k = 2(-1)^k/(2k+1)$. La somme télescopique donne, pour $n \geq 1$:

$$J_n = 2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

Cette formule établit en particulier la demande pour $n > 1$; à $n = 1$, elle donne bien $J_1 = 2$.

Méthode 2 — Décompositions trigonométriques finies

Pour $n \geq 1$, l'identité $2 \sin x \cos((2k+1)x) = \sin((2k+2)x) - \sin(2kx)$ se déduit des formules d'addition. En la sommant pour $k = 0, \dots, n-1$, les termes intermédiaires

s'annulent :

$$\frac{\sin(2nx)}{\sin x} = 2 \sum_{k=0}^{n-1} \cos((2k+1)x) \quad (0 < x \leq \pi/2).$$

L'intégration de cette somme finie donne directement :

$$J_n = 2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin((2k+1)\pi/2)}{2k+1} = 2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

De même, pour $n \geq 1$, les identités $2 \sin x \cos(2kx) = \sin((2k+1)x) - \sin((2k-1)x)$ donnent, par télescopage :

$$\frac{\sin((2n+1)x)}{\sin x} = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(2kx).$$

Les intégrales des termes $\cos(2kx)$ sur $[0, \pi/2]$ sont nulles, puisque $\sin(k\pi) = 0$. Ainsi $K_n = \pi/2$, avec la même valeur pour $n = 0$. Cette approche donne en outre des expressions explicites des intégrandes ; la première méthode est plus directe pour obtenir la récurrence demandée.

Enfin, le changement de variable établi en I. 4. b. donne :

$$\int_0^1 \frac{P_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = I_{n+1}.$$

Si $n = 2m$ est pair, cette intégrale vaut $I_{2m+1} = K_m = \pi/2$. Si $n = 2m+1$ est impair, elle vaut $I_{2m+2} = J_{m+1}$. Donc :

$$\boxed{\int_0^1 \frac{P_{2m}(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{2} \quad (m \in \mathbb{N})}.$$

$$\boxed{\int_0^1 \frac{P_{2m+1}(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = 2 \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{2k+1} \quad (m \in \mathbb{N})}.$$

2. c. Différence entre les sous-suites paire et impaire

Pour $n > 1$ et $0 < x \leq \pi/2$, la formule d'addition donne :

$$\frac{\sin(2nx) - \sin((2n+1)x)}{\sin x} = \sin(2nx) \frac{1 - \cos x}{\sin x} - \cos(2nx).$$

Les formules de duplication, obtenues par addition, donnent $1 - \cos x = 2 \sin^2(x/2)$ et $\sin x = 2 \sin(x/2) \cos(x/2)$. Comme $\cos(x/2) > 0$, on en déduit $(1 - \cos x)/\sin x = \tan(x/2)$.

L'intégrale de $\cos(2nx)$ sur $[0, \pi/2]$ vaut $\sin(n\pi)/(2n) = 0$. En intégrant l'égalité précédente, on obtient :

$$J_n - K_n = \int_0^{\pi/2} \sin(2nx) \tan\left(\frac{x}{2}\right) dx.$$

La fonction $f(x) = \tan(x/2)$ est de classe C^1 sur $[0, \pi/2]$, car $\cos(x/2)$ n'y est jamais nulle. Sa dérivée est $f'(x) = 1/(2 \cos^2(x/2))$, continue sur le segment.

La partie II. 1., appliquée aux indices $2n$, montre que l'intégrale de droite tend vers 0. Plus explicitement, la majoration qui y a été démontrée vaut :

$$\left| \int_0^{\pi/2} f(x) \sin(2nx) dx \right| \leq \frac{|f(0)| + |f(\pi/2)| + \int_0^{\pi/2} |f'(x)| dx}{2n} \rightarrow 0.$$

$$J_n - K_n \rightarrow 0.$$

2. d. Convergence de (I_n)

La suite impaire vérifie $I_{2n+1} = K_n = \pi/2$. D'après 2. c., $J_n - K_n \rightarrow 0$, donc $I_{2n} = J_n \rightarrow \pi/2$ également.

Pour justifier la réunion des deux cas, fixons $\varepsilon > 0$. Il existe N tel que $|I_{2n} - \pi/2| < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$. Tout indice $m \geq 2N$ est soit pair, auquel cas cette majoration s'applique, soit impair, auquel cas $I_m = \pi/2$ exactement.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \frac{\pi}{2}.$$

2. e. Remplacement de la borne supérieure

Fixons $a \in]0, \pi/2]$. Si $a = \pi/2$, l'intégrale considérée est I_n et la conclusion est immédiate par 2. d.

Si $a < \pi/2$, la relation de Chasles donne :

$$I_n - \int_0^a \frac{\sin(nx)}{\sin x} dx = \int_a^{\pi/2} \frac{1}{\sin x} \sin(nx) dx.$$

La fonction $f(x) = 1/\sin x$ est de classe C^1 sur $[a, \pi/2]$, car $\sin x > 0$ sur ce segment. Sa dérivée $-\cos x/\sin^2 x$ est continue. Le résultat II. 1. s'applique et montre que le membre de droite tend vers 0.

Puisque $I_n \rightarrow \pi/2$, on conclut :

$$\forall a \in]0, \pi/2], \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^a \frac{\sin(nx)}{\sin x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

3. a. Existence de l'intégrale avec dénominateur x

Pour tout $a > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction φ_n est continue sur le segment $[0, a]$, d'après III.

1. a. Elle est donc intégrable sur ce segment.

Le quotient $\sin(nx)/x$ est sa restriction aux points non nuls. Ainsi :

$$\int_0^a \frac{\sin(nx)}{x} dx \text{ converge et vaut } \int_0^a \varphi_n(x) dx.$$

L'intégrale est même absolument convergente sur ce segment, puisqu'un prolongement continu y est borné.

3. b. Limite pour $0 < a \leq \pi/2$

Pour $0 < x \leq a$, la différence des intégrandes vaut $g(x) \sin(nx)$, où g est la fonction étudiée dans II. 2. Les deux intégrales convergent, et le prolongement en 0 est cohérent : la différence des deux quotients prolongés y est $n - n = 0$, tandis que $g(0) \sin 0 = 0$.

Par linéarité :

$$\int_0^a \frac{\sin(nx)}{x} dx - \int_0^a \frac{\sin(nx)}{\sin x} dx = \int_0^a g(x) \sin(nx) dx.$$

D'après II. 2., g est de classe C^1 sur $[0, a]$. La partie II. 1. assure donc que le membre de droite tend vers 0.

La seconde intégrale du membre de gauche tend vers $\pi/2$, d'après III. 2. e. Il en résulte :

$$\forall a \in]0, \pi/2], \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^a \varphi_n(x) dx = \frac{\pi}{2}.$$

3. c. Limite pour $a > \pi/2$

Fixons $a > \pi/2$. La fonction $f(x) = 1/x$ est de classe C^1 sur le segment $[\pi/2, a]$, avec $f'(x) = -1/x^2$. La partie II. 1. donne :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\pi/2}^a \varphi_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\pi/2}^a \frac{1}{x} \sin(nx) dx = 0.$$

La relation de Chasles et la question 3. b. appliquée à $\pi/2$ donnent alors :

$$\int_0^a \varphi_n(x) dx = \int_0^{\pi/2} \varphi_n(x) dx + \int_{\pi/2}^a \varphi_n(x) dx \longrightarrow \frac{\pi}{2}.$$

En réunissant 3. b. et 3. c., on obtient bien :

$$\forall a > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^a \varphi_n(x) dx = \frac{\pi}{2}.$$

4. Valeur de l'intégrale de Dirichlet

L'existence de L a déjà été démontrée dans III. 1. b. Fixons un réel $a > 0$, par exemple $a = 1$. Pour $n \geq 1$, le changement de variable affine $u = nx$ donne :

$$\int_0^a \varphi_n(x) dx = \int_0^{na} \frac{\sin u}{u} du.$$

On peut effectuer ce changement de variable sur un segment commençant en $\varepsilon > 0$, puis faire tendre ε vers 0, ou utiliser directement les prolongements continus des quotients à l'origine.

Lorsque $n \rightarrow +\infty$, la borne na tend vers $+\infty$. Par la définition de l'intégrale impropre convergente, le membre de droite tend vers L . D'après III. 3., le membre de gauche tend vers $\pi/2$. L'unicité de la limite donne :

$$L = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

La convergence est conditionnelle : l'intégrale existe, tandis que celle de la valeur absolue diverge, comme démontré en III. 1. b.

Relevé des adaptations

- Préambule de I et I. 1. b. : définition explicite d'arccos comme réciproque du cosinus restreint à $[0, \pi]$; ses propriétés sont établies avec les théorèmes autorisés, sans supposer cette fonction connue.
- I. 4. b. : ajout de l'indication $x = \cos \theta$, conformément à l'obligation de préciser les changements de variable non affines.
- Préambule de III : précision du domaine $0 < a \leq \pi/2$ du résultat admis utilisé dans cette partie, afin d'explicitier ses hypothèses.

Les demandes mathématiques manuscrites de III. 1. b. sont intégralement conservées et corrigées.