



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques 1

1982

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

PROBLÈME 1

Les deux problèmes sont indépendants.

On se propose d'étudier l'application F définie sur $\mathbb{R}_+ = [0; +\infty[$ par :

$$F(x) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} e^{-x \sin t} dt.$$

1. a. Justifier l'existence de $F(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+$.

1. b. Montrer que F est décroissante et que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq F(x) \leq \frac{\pi}{4}$.

2. a. Montrer que, pour tout $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$, $\frac{2}{\pi}t \leq \sin t$.

2. b. En déduire successivement que, pour tout $x > 0$, $F(x) \leq \frac{\pi}{4x}(1 - e^{-x})$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$.

3. a. Montrer que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}_+^2$, $|e^{-a} - e^{-b}| \leq |a - b|$.

3. b. En déduire que, pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2$, $|F(x_1) - F(x_2)| \leq \frac{1}{2}|x_1 - x_2|$, et que F est continue sur $\mathbb{R}_+$.

4. a. Pour $x_0 \in \mathbb{R}_+$, justifier l'existence de

$$H(x_0) = -\frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} e^{-x_0 \sin t} \sin t dt.$$

4. b. En utilisant par exemple l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}_+^2$:

$$|e^{-a} - e^{-b} + (a - b)e^{-b}| \leq \frac{|a - b|^2}{2}.$$

En déduire l'inégalité :

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}_+, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{x_0\}, \quad \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - H(x_0) \right| \leq \frac{\pi}{8} |x - x_0|.$$

Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et déterminer $F'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+$. En 0, la dérivée s'entend à droite.

5. À tout $\alpha \in \mathbb{R}_+$, on associe la suite définie par $u_0 = \alpha$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = F(u_n).$$

5. a. En utilisant 3.b, montrer qu'il existe $m \in [0; 1[$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$|u_{k+1} - u_k| \leq m^k |u_1 - u_0|.$$

5. b. En déduire que, pour $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ avec $p > q$:

$$|u_p - u_q| \leq \frac{m^q}{1 - m} |u_1 - u_0|.$$

À l'aide de la convergence absolue de la série

$$\sum_{k \geq 0} (u_{k+1} - u_k),$$

montrer que, quel que soit α , la suite associée converge vers une limite $\ell(\alpha)$ vérifiant $F(\ell(\alpha)) = \ell(\alpha)$.

5. c. Montrer qu'il existe un seul $x \in \mathbb{R}_+$ vérifiant $F(x) = x$. Que peut-on en conclure pour les suites construites précédemment ?

PROBLÈME 2

Soit E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des polynômes à une indéterminée X , à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 2. On appelle $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base de E .

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, le polynôme F_α est défini par $F_\alpha = \alpha + X + X^2$. On désigne par φ_α l'application qui, à un polynôme $P \in E$, associe le polynôme $R \in E$, reste de la division euclidienne du produit $F_\alpha P$ par le polynôme $X^3 - X$.

$\varphi_\alpha(P)$ est donc le seul polynôme R pour lequel il existe un polynôme Q vérifiant :

$$F_\alpha P = (X^3 - X)Q + R, \quad R = 0 \text{ ou } \deg R < 3.$$

1. a. Déterminer les polynômes $\varphi_\alpha(1)$, $\varphi_\alpha(X)$ et $\varphi_\alpha(X^2)$.
1. b. Montrer que φ_α est une application linéaire de E dans E .
1. c. Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\varphi_\alpha - \lambda I_E = \varphi_{\alpha-\lambda}$, où I_E désigne l'application identique de E dans E .
2. Déterminer la matrice M_α de φ_α relativement à la base $\mathcal{B}$.
3. a. En résolvant un système linéaire, discuter la bijectivité de φ_α en fonction du paramètre α .
3. b. Calculer la matrice inverse M_α^{-1} lorsque M_α est inversible.
4. a. Montrer que $\text{Ker } \varphi_0$ est l'ensemble des polynômes de E admettant 1 pour racine. Déterminer $\text{Im } \varphi_0$.
4. b. Montrer que $\text{Ker } \varphi_{-2} = \text{Im } \varphi_0$ et que $\text{Im } \varphi_{-2} = \text{Ker } \varphi_0$.
5. a. Calculer les valeurs propres de M_α .

5. b. Déterminer les sous-espaces propres de φ_α ; on pourra utiliser 1.c.

L'endomorphisme φ_α est-il diagonalisable ?

5. c. Construire une matrice T telle que

$$M_\alpha = T \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha + 2 \end{pmatrix} T^{-1}.$$

6. a. Montrer que, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha$.

6. b. Calculer $\varphi_{-2} \circ \varphi_0$. Le résultat obtenu peut-il être déduit sans calcul de 4.b ?

6. c. Calculer $(M_\alpha)^k$ pour $k \in \mathbb{N}$ et en déduire, pour $\alpha \neq -1$:

$$(\varphi_\alpha)^k = \frac{(\alpha + 2)^k - \alpha^k}{2} \varphi_\gamma \quad (k \in \mathbb{N}^*), \quad \gamma = \frac{2\alpha^k}{(\alpha + 2)^k - \alpha^k}.$$

Exprimer $(\varphi_{-1})^k$ en fonction de k .