



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques 1

1981

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Les trois parties sont indépendantes.

Partie I

On considère la fonction numérique de variable réelle f définie sur $] -1, +\infty[$ par :

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{e}(1+t)^{\frac{1}{t} + \frac{1}{2}} & \text{si } t \neq 0, \\ 1 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

1. a. Établir le développement limité de $\ln(1+t)$ à l'ordre 2 au voisinage de 0. En déduire que la fonction f possède un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0.

1. b. Montrer que f est continue et dérivable en 0.

2. Soit φ la fonction définie sur $] -1, +\infty[$ par :

$$\varphi(t) = \frac{1}{2} \left(1 + t - \frac{1}{1+t} \right) - \ln(1+t).$$

2. a. Établir, pour $t \neq 0$, l'égalité : $f'(t) = \frac{1}{t^2} \varphi(t) f(t)$.

2. b. En déduire que f' est continue sur $] -1, +\infty[$.

2. c. Étudier le signe de $\varphi(t)$ pour $t \in] -1, +\infty[$.

2. d. En déduire : $\forall t \in] -1, +\infty[, \quad f(t) \geq 1$.

3. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on considère la série de terme général $u_n(x) = \frac{(nx)^n n^{1/2}}{n!}$, pour $n \geq 1$.

3. a. Vérifier, pour $x > 0$, l'égalité $\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = e x f\left(\frac{1}{n}\right)$.

3. b. Étudier la convergence de cette série suivant les valeurs de $x \in \mathbb{R}_+$.

3. c. En déduire les limites des deux suites :

$$v_n = \left(\frac{n}{3}\right)^n \frac{n^{1/2}}{n!}, \quad w_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{2}\right)^k \frac{k^{1/2}}{k!}.$$

3. d. Établir successivement les inégalités suivantes, pour $t \in \mathbb{R}_+$:

$$\ln(1+t) \leq t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}, \quad \ln(f(t)) \leq \frac{t^2}{12} + \frac{t^3}{6}.$$

3. e. En utilisant 3.a, établir la majoration :

$$\forall n \geq 2, \quad \ln\left(u_n\left(\frac{1}{e}\right)\right) \leq -1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{12k^2} + \frac{1}{6k^3}\right),$$

et en déduire que la suite $(u_n(\frac{1}{e}))_{n \geq 1}$ est majorée.

3. f. En déduire la limite de la suite $(\frac{n^n e^{-n}}{n!})_{n \geq 1}$.

Partie II

On définit une suite de polynômes réels par :

$$Q_0(X) = 1, \quad Q_1(X) = 2X, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad Q_{n+2}(X) = 2XQ_{n+1}(X) - (X^2 + 1)Q_n(X).$$

Pour tout réel θ tel que $\sin \theta \neq 0$, on note $\cotan \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$. Les sommes vides valent 0 et les produits vides valent 1.

1. Déterminer le degré de Q_n .
2. Pour tout entier naturel r , montrer que :

$$Q_{2r}(X) = \sum_{p=0}^r (-1)^p \binom{2r+1}{2p+1} X^{2r-2p}.$$

(1)

3. a. Déterminer les racines réelles de Q_n . On pourra calculer $Q_n(\cotan \theta)$ par récurrence, pour $0 < \theta < \pi$.
3. b. En déduire la décomposition de Q_n en produit de polynômes du premier degré.
4. Pour tout entier naturel r , montrer que :

$$Q_{2r}(X) = (2r+1) \prod_{k=1}^r \left(X^2 - \cotan^2 \left(\frac{k\pi}{2r+1} \right) \right).$$

(2)

5. En utilisant (1) et (2), établir, pour tout entier naturel r , l'égalité :

$$\sum_{k=1}^r \cotan^2 \left(\frac{k\pi}{2r+1} \right) = \frac{r(2r-1)}{3}.$$

Pour $r \geq 1$, on calculera de deux façons le coefficient de X^{2r-2} dans Q_{2r} . Le cas $r = 0$ sera vérifié séparément.

En déduire l'égalité :

$$\sum_{k=1}^r \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2r+1}\right)} = \frac{2r(r+1)}{3}.$$

6. a. Pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, établir les inégalités :

$$\cotan^2 x < \frac{1}{x^2} < \frac{1}{\sin^2 x}.$$

6. b. En déduire, pour $r \geq 1$, un encadrement de

$$\sum_{k=1}^r \frac{1}{\left(\frac{k\pi}{2r+1}\right)^2}.$$

6. c. Montrer que la série de terme général $\frac{1}{k^2}$ est convergente et calculer

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Partie III

Pour tout entier naturel n et tout réel x strictement supérieur à -1 , on pose :

$$F_n(x) = \int_0^x \frac{t^n}{(1+t)^{n+1}} dt.$$

- Montrer que F_n est définie et continue sur $] -1, +\infty[$. Étudier son sens de variation.
Montrer que F_n admet des limites en -1 et $+\infty$ et calculer ces limites.
- Soit x fixé, avec $x > 0$. Montrer que :

$$\forall t \in [0, x], \quad \frac{t^n}{(1+t)^{n+1}} \leq \frac{x^n}{(1+x)^n}.$$

On pourra comparer d'abord $\frac{t}{1+t}$ et $\frac{x}{1+x}$.

En déduire que la suite $(F_n(x))_{n \geq 0}$ est convergente et déterminer sa limite.

3. Soit x fixé, avec $-\frac{1}{2} < x < 0$. Montrer que :

$$\forall t \in [x, 0], \quad \left| \frac{t^n}{(1+t)^{n+1}} \right| \leq \frac{1}{1+x} \left| \frac{x}{1+x} \right|^n.$$

En déduire que la suite $(F_n(x))_{n \geq 0}$ est convergente et déterminer sa limite.