



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques 1

1980

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Partie I

On fixe $x \geq 0$ et on conserve la convention de l'énoncé, notamment $u_0(0) = 1$.

1. Convergence de $v_n(x)$ et de $w_n(x)$.

Commençons par montrer que $u_n(x) = x^n/n!$ tend vers 0. Si $x = 0$, $u_n(0) = 0$ pour tout $n \geq 1$. Si $x > 0$, choisissons un entier N tel que $N + 1 \geq 2x$. Pour tout $n \geq N$,

$$u_{n+1}(x) = \frac{x}{n+1} u_n(x) \leq \frac{1}{2} u_n(x).$$

Par récurrence, $0 \leq u_{N+r}(x) \leq 2^{-r} u_N(x)$ pour $r \geq 0$. Le majorant géométrique tend vers 0, donc $u_n(x) \rightarrow 0$.

La formule de Maclaurin est la formule de Taylor au point 0. Comme l'exponentielle est de classe C^{n+1} sur $[0, x]$ et que toutes ses dérivées en 0 valent 1, la formule avec reste intégral donne

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n e^t dt.$$

Pour $0 \leq t \leq x$, $e^t \leq e^x$, donc

$$0 \leq e^x - v_n(x) \leq \frac{e^x}{n!} \int_0^x (x-t)^n dt = e^x \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = e^x u_{n+1}(x).$$

Ce majorant tend vers 0, d'où $v_n(x) \rightarrow e^x$. Enfin, $w_n(x) = v_n(x) + u_n(x)$: les opérations sur les limites donnent aussi $w_n(x) \rightarrow e^x$.

Pour $x = 0$, les valeurs sont explicitement $v_n(0) = 1$ pour tout n , $w_0(0) = 2$ et $w_n(0) = 1$ pour $n \geq 1$, en accord avec ces limites.

2. Monotonie des deux suites.

Pour $n \geq 0$,

$$v_{n+1}(x) - v_n(x) = u_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \geq 0.$$

Ainsi $v_n(x)$ est croissante, et elle est strictement croissante si $x > 0$.

Comme $w_n = v_n + u_n$ et $u_{n+1} = xu_n/(n+1)$, on a

$$w_{n+1}(x) - w_n(x) = 2u_{n+1}(x) - u_n(x) = u_n(x) \left(\frac{2x}{n+1} - 1 \right).$$

Pour tout entier n assez grand pour que $n+1 \geq 2x$, cette différence est positive ou nulle multipliée par une quantité négative ou nulle, donc elle est négative ou nulle. La suite $w_n(x)$ est donc décroissante à partir d'un certain rang.

Si $x > 0$ et $n+1 > 2x$, la différence est strictement négative. Si $x = 0$, elle vaut -1 au rang 0, puis 0 aux rangs suivants : la suite est alors déjà décroissante au sens large dès le début.

3. Les deux inégalités d'approximation.

Méthode 1 — Monotonie et reste intégral de Taylor.

Pour l'inégalité (1), fixons $0 < x < \ln 2$. On a aussi $x < 1$. Pour tout $n \geq 1$, $2x/(n+1) \leq x < 1$; d'après 2, la suite $w_n(x)$ est strictement décroissante à partir du rang 1. Sa limite vaut e^x d'après 1, donc $w_n(x) > e^x$ pour chaque $n \geq 1$: en effet, $w_n(x) > w_{n+1}(x) \geq e^x$.

Au rang 0, $w_0(x) = 2$ et $x < \ln 2$ implique $e^x < 2$. Ainsi, pour tous les rangs,

$$e^x < v_n(x) + \frac{x^n}{n!} \quad (0 < x < \ln 2).$$

Pour l'inégalité (2), fixons $0 < x < 1$. Le reste intégral utilisé en 1 donne

$$0 \leq e^x - v_n(x) \leq e^x \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{e}{(n+1)!},$$

car $e^x < e$ et $x^{n+1} < 1$. On obtient $e^x < v_n(x) + e/(n+1)!$, pour tout $n \geq 0$.

Méthode 2 — Majoration des termes du reste de la série exponentielle.

La question 1 a établi

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k/k!.$$

Pour des entiers $r, j \geq 0$,

$$(r+j)! = r! \prod_{\ell=1}^j (r+\ell) \geq r! \prod_{\ell=1}^j \ell = r!j!,$$

avec des produits vides égaux à 1 si $j = 0$. Pour $0 < x < \ln 2$, on en déduit

$$e^x - v_n(x) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{x^{n+j}}{(n+j)!} \leq \frac{x^n}{n!} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{x^j}{j!} = \frac{x^n}{n!} (e^x - 1) < \frac{x^n}{n!}.$$

Cela prouve (1), y compris au rang 0. Pour $0 < x < 1$, écrivons plutôt le reste avec $r = n + 1$:

$$e^x - v_n(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1+j}}{(n+1+j)!} \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^j}{j!} = \frac{x^{n+1}e^x}{(n+1)!} < \frac{e}{(n+1)!}.$$

Cela prouve (2). Les comparaisons portent sur des séries positives convergentes, sans aucun réarrangement de termes. La première méthode exploite la monotonie et Taylor ; la seconde contrôle directement les coefficients du reste.

Partie II

Dans les questions 1 et 2, $a \geq 0$ est quelconque. À partir de la question 3, on suppose $0 < a < \ln 2$.

1. Convergence de $s_n^A(a)$.

Pour toute partie A de $\mathbb{N}$ et tout $n \geq 0$,

$$s_{n+1}^A(a) - s_n^A(a) = \Phi_A(n+1) \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \geq 0.$$

La suite est donc croissante. Comme $0 \leq \Phi_A(k) \leq 1$,

$$0 \leq s_n^A(a) \leq \sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!} = v_n(a) \leq e^a,$$

la dernière inégalité résultant du reste positif de Taylor en I.1. La suite est croissante et majorée, donc converge vers un réel fini par le théorème de la limite monotone.

2. Valeurs élémentaires de m .

Si $A = \emptyset$, tous les coefficients $\Phi_A(k)$ sont nuls, donc $s_n^\emptyset(a) = 0$ et $m(\emptyset) = 0$.

Si $A = \{0\}$, le seul terme présent vaut $a^0/0! = 1$, donc $s_n^{\{0\}}(a) = 1$ pour tout n et $m(\{0\}) = 1$, y compris pour $a = 0$.

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, $s_n^{\{p\}}(a) = 0$ si $n < p$, et $s_n^{\{p\}}(a) = a^p/p!$ si $n \geq p$. Ainsi $m(\{p\}) = a^p/p!$. Si $a = 0$ et $p > 0$, cette valeur est 0.

Enfin, $s_n^{\mathbb{N}}(a) = v_n(a)$, donc I.1 donne $m(\mathbb{N}) = e^a$.

3. a. Croissance par rapport à l'inclusion.

Si $A \subset B$, alors $\Phi_A(k) \leq \Phi_B(k)$ pour chaque entier k . Les poids $a^k/k!$ étant positifs ou nuls, $s_n^A(a) \leq s_n^B(a)$ pour tout n . Les deux suites convergent par II.1 ; le passage à la limite conserve l'ordre, donc $m(A) \leq m(B)$.

b. Valeurs de m dans $[0, 2[$.

La positivité des termes donne $m(A) \geq 0$. Comme $A \subset \mathbb{N}$, II.3.a et II.2 donnent $m(A) \leq m(\mathbb{N}) = e^a$. Or $0 < a < \ln 2$ implique $e^a < 2$. Ainsi $0 \leq m(A) < 2$.

c. Additivité pour deux parties disjointes.

Si $A \cap B = \emptyset$, chaque entier appartient au plus à l'un des deux ensembles. On a donc $\Phi_{A \cup B}(k) = \Phi_A(k) + \Phi_B(k)$ pour tout k . En multipliant par $a^k/k!$ puis en sommant de 0 à n ,

$$s_n^{A \cup B}(a) = s_n^A(a) + s_n^B(a).$$

Toutes les limites sont finies d'après II.1, donc $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$. L'argument porte seulement sur des sommes finies suivies d'un passage à la limite.

4. a. Séparation de deux parties disjointes non vides.

Par définition de $p = \min(A \cup B)$ et parce que $p \notin B$, tout élément de B est strictement supérieur à p . Posons $T_p = \{p+1, p+2, \dots\}$. Alors $B \subset T_p$, donc $m(B) \leq m(T_p)$ par II.3.a.

La décomposition disjointe $\mathbb{N} = \{0, \dots, p\} \cup T_p$ et II.3.c donnent

$$m(T_p) = e^a - \sum_{k=0}^p \frac{a^k}{k!}.$$

En appliquant l'inégalité (1) de I.3 au rang p et au réel $a \in]0, \ln 2[$,

$$m(T_p) < \frac{a^p}{p!}.$$

D'autre part, $p \in A$ implique $\{p\} \subset A$. Par croissance, $a^p/p! = m(\{p\}) \leq m(A)$, avec la même formule au rang $p = 0$ grâce à la convention initiale. Finalement,

$$m(B) < \frac{a^p}{p!} \leq m(A).$$

Le raisonnement couvre aussi le cas où le plus petit élément est 0.

b. Égalité des valeurs de deux parties disjointes.

Supposons $A \cap B = \emptyset$ et $m(A) = m(B)$. Si A et B étaient toutes deux non vides, le plus petit élément de leur union appartiendrait à l'une des deux. La question 4.a, en échangeant leurs noms si nécessaire, donnerait une inégalité stricte entre $m(A)$ et $m(B)$, contradiction.

Il reste le cas où l'une des parties est vide. Si, par exemple, $A = \emptyset$, alors $m(B) = m(A) = 0$. Si B était non vide, un entier $q \in B$ donnerait, par croissance,

$$m(B) \geq m(\{q\}) = \frac{a^q}{q!} > 0,$$

car $a > 0$, y compris pour $q = 0$. C'est impossible. Donc $B = \emptyset$. Le cas où B est d'abord supposée vide est identique. On conclut que les deux parties sont vides.

5. a. Identité sur les différences d'ensembles.

Les décompositions $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ et $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$ sont chacune des unions disjointes. Par II.3.c,

$$m(A) = m(A \setminus B) + m(A \cap B), \quad m(B) = m(B \setminus A) + m(A \cap B).$$

Les valeurs sont des réels finis ; leur soustraction donne

$$m(A) - m(B) = m(A \setminus B) - m(B \setminus A).$$

b. Injectivité de m .

La question II.3.b assure que m prend ses valeurs dans $[0, 2[$. Pour prouver l'injectivité, soient $A, B \subset \mathbb{N}$ tels que $m(A) = m(B)$. La question 5.a donne $m(A \setminus B) = m(B \setminus A)$.

Les deux ensembles $A \setminus B$ et $B \setminus A$ sont disjoints. Par 4.b, ils sont donc tous deux vides. L'égalité $A \setminus B = \emptyset$ implique $A \subset B$, et $B \setminus A = \emptyset$ implique $B \subset A$. Ainsi $A = B$.

L'application $m : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow [0, 2[$ est bien injective. Cette conclusion repose sur les poids particuliers $a^k/k!$ et sur leur séparation stricte établie en 4.a.

Partie III

C est ici l'espace vectoriel réel des fonctions continues sur $[0, 1]$. L'endomorphisme identité de cet espace est noté I .

1. a. Caractère linéaire de U et appartenance à C .

Soit $f \in C$. La continuité de f assure que $U(f) : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ est une primitive de f sur $[0, 1]$, avec les dérivées unilatérales aux extrémités. Elle est en particulier continue, donc $U(f) \in C$.

Pour $f, g \in C$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $x \in [0, 1]$, la linéarité de l'intégrale sur un segment donne

$$U(\alpha f + \beta g)(x) = \int_0^x (\alpha f(t) + \beta g(t)) dt = \alpha U(f)(x) + \beta U(g)(x).$$

Cette égalité vaut pour tout x , donc $U(\alpha f + \beta g) = \alpha U(f) + \beta U(g)$. Ainsi U est une application linéaire de C dans lui-même, c'est-à-dire un endomorphisme de C .

b. Formule des intégrations successives.

Raisonnons par récurrence sur $n \geq 1$, avec la méthode imposée. Pour $n = 1$, la formule est la définition de U , puisque $(x - t)^0/0! = 1$.

Supposons la formule vraie au rang n pour toute fonction de C . Soit $f \in C$ et posons $F = U(f)$. D'après 1.a, $F \in C$; elle est de classe C^1 , $F'(t) = f(t)$ et $F(0) = 0$. Comme $U^{n+1} = U^n \circ U$, l'hypothèse de récurrence appliquée à F donne

$$U^{n+1}(f)(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} F(t) dt.$$

Pour $x \in [0, 1]$ fixé, une primitive par rapport à t du facteur polynomial est $-(x-t)^n/n!$. L'intégration par parties sur $[0, x]$ donne

$$U^{n+1}(f)(x) = \left[-\frac{(x-t)^n}{n!} F(t) \right]_0^x + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} F'(t) dt.$$

Le terme de bord en $t = x$ est nul puisque $n \geq 1$, et celui en $t = 0$ est nul puisque $F(0) = 0$. Ainsi,

$$U^{n+1}(f)(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f(t) dt.$$

L'hérédité est établie. Pour tout $n \geq 1$, tout $f \in C$ et tout $x \in [0, 1]$,

$$U^n(f)(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t) dt.$$

Si $x = 0$, les deux membres valent 0. La preuve n'utilise aucune permutation de deux intégrales.

c. Relations entre V_n et U .

Chaque U^k est un endomorphisme, puisqu'il est une composition d'endomorphismes. Leur somme finie V_n est donc un endomorphisme. Par distributivité de la composition sur une somme finie et par les règles des puissances d'un même endomorphisme,

$$V_n \circ U = \sum_{k=1}^n U^k \circ U = \sum_{k=1}^n U^{k+1} = \sum_{j=2}^{n+1} U^j = V_{n+1} - U.$$

De même,

$$U \circ V_n = \sum_{k=1}^n U \circ U^k = \sum_{k=1}^n U^{k+1} = V_{n+1} - U.$$

Ainsi,

$$V_n \circ U = U \circ V_n = V_{n+1} - U.$$

2. a. Vérification des propriétés de $\|f\|$.

Pour $f \in C$, la fonction $|f|$ est continue sur le segment $[0, 1]$. Elle y atteint un maximum fini, donc $\|f\| = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$ est bien un réel positif ou nul.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, l'égalité $|\alpha f(t)| = |\alpha| |f(t)|$, valable pour chaque t , donne $\|\alpha f\| = |\alpha| \|f\|$, y compris lorsque $\alpha = 0$.

Pour $f, g \in C$ et tout $t \in [0, 1]$, l'inégalité triangulaire réelle donne

$$|f(t) + g(t)| \leq |f(t)| + |g(t)| \leq \|f\| + \|g\|.$$

En prenant le supremum, $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$.

Enfin, si $\|f\| = 0$, alors $0 \leq |f(t)| \leq 0$ pour tout t , donc $f(t) = 0$ en chaque point et $f = 0$. Réciproquement, la fonction nulle a une valeur de $\|f\|$ égale à 0. Les trois propriétés de la définition donnée sont vérifiées : $\|\cdot\|$ est une norme sur C .

b. Majoration de $U(f)$.

Soit $f \in C$. Pour tout $x \in [0, 1]$,

$$|U(f)(x)| = \left| \int_0^x f(t) dt \right| \leq \int_0^x |f(t)| dt \leq x\|f\| \leq \|f\|.$$

Le supremum sur $x \in [0, 1]$ donne $\|U(f)\| \leq \|f\|$.

3. Approximation de V par V_n .

Rectification locale de l'énoncé : la notation $V(f_n)$ du PDF est remplacée par $V_n(f)$.

Aucune suite (f_n) n'est définie dans cette partie, tandis que V_n est la somme d'endomorphismes définie en 1.c. L'estimation porte sur son écart à V .

Vérifions d'abord que V est un endomorphisme de C , ce qui sera utile en 4. Pour $f \in C$,

$$V(f)(x) = e^x \int_0^x e^{-t} f(t) dt.$$

Le produit $t \mapsto e^{-t} f(t)$ est continu ; son intégrale à borne variable est continue, et le produit par e^x reste continu. Ainsi $V(f) \in C$. La linéarité en f résulte de celle de l'intégrale, donc V est bien un endomorphisme.

La formule de 1.b et la linéarité pour une somme finie donnent

$$V_n(f)(x) = \sum_{k=1}^n U^k(f)(x) = \int_0^x \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-t)^j}{j!} \right) f(t) dt.$$

Pour $z \in [0, 1]$, posons

$$R_{n-1}(z) = e^z - \sum_{j=0}^{n-1} z^j / j!.$$

Le reste positif de Taylor en I.1 donne $R_{n-1}(z) \geq 0$. Pour $0 < z < 1$, l'inégalité (2) de I.3, au rang $n-1$, donne $R_{n-1}(z) < e/n!$. La fonction R_{n-1} est continue; ce majorant s'étend donc avec une inégalité large aux extrémités 0 et 1. Ainsi,

$$0 \leq R_{n-1}(z) \leq \frac{e}{n!} \quad \text{pour tout } z \in [0, 1].$$

Si $0 \leq t \leq x \leq 1$, alors $z = x - t \in [0, 1]$. En soustrayant les formules de V et de V_n ,

$$V(f)(x) - V_n(f)(x) = \int_0^x R_{n-1}(x-t)f(t) dt.$$

Il s'ensuit

$$|V(f)(x) - V_n(f)(x)| \leq \int_0^x \frac{e}{n!} |f(t)| dt \leq \frac{e}{n!} x \|f\| \leq \frac{e}{n!} \|f\|.$$

En prenant le supremum sur $[0, 1]$, on obtient exactement

$$\|V(f) - V_n(f)\| \leq \frac{e}{n!} \|f\|.$$

Cette estimation est valable pour tout $f \in C$ et tout $n \geq 1$. Elle utilise seulement une somme finie et une majoration du reste exponentiel.

Résultat admis dans cette version adaptée, conformément à la consigne de l'énoncé :

$$V \circ U = U \circ V = V - U.$$

Ces égalités portent sur les endomorphismes U et V de C définis dans cette partie. Elles seront utilisées en 4.a pour calculer les deux compositions de $I - U$ et de $I + V$.

4. a. Deux isomorphismes réciproques.

Les applications $I - U$ et $I + V$ sont des endomorphismes, puisque I, U, V le sont. Avec la relation admise $U \circ V = V - U$,

$$(I - U) \circ (I + V) = I + V - U - U \circ V = I + V - U - (V - U) = I.$$

Avec l'autre relation admise $V \circ U = V - U$,

$$(I + V) \circ (I - U) = I - U + V - V \circ U = I - U + V - (V - U) = I.$$

Chacune des deux applications est donc un inverse à gauche et à droite de l'autre. Elles sont bijectives et linéaires, donc des isomorphismes de C , avec

$$(I - U)^{-1} = I + V, \quad (I + V)^{-1} = I - U.$$

Aucune hypothèse de dimension finie n'est nécessaire : les deux compositions égales à l'identité établissent directement l'existence des inverses.

b. Résolution de l'équation intégrale.

Méthode 1 — Application de l'inverse construit.

Posons $\varphi(x) = e^{-x}$ sur $[0, 1]$. Cette fonction est continue, donc $\varphi \in C$. L'équation s'écrit $(I - U)(f) = \varphi$. D'après 4.a, elle possède une unique solution dans C , donnée par

$$f = (I - U)^{-1}(\varphi) = (I + V)(\varphi).$$

Pour $x \in [0, 1]$,

$$V(\varphi)(x) = \int_0^x e^{x-t} e^{-t} dt = e^x \int_0^x e^{-2t} dt = \frac{e^x}{2} (1 - e^{-2x}) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Ainsi la solution est

$$f(x) = e^{-x} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Cette expression est continue. Pour vérifier directement l'équation, on calcule

$$\int_0^x f(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^x (e^t + e^{-t}) dt = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

donc $f(x) - \int_0^x f(t) dt = e^{-x}$. L'unicité a déjà été établie par l'inversibilité de $I - U$.

Méthode 2 — Dérivation de l'équation et calcul d'une primitive.

Si $f \in C$ est une solution, alors $f = \varphi + U(f)$. La fonction φ est de classe C^1 , et $U(f)$ est une primitive de la fonction continue f . Donc f est de classe C^1 sur le segment, et on peut dériver l'équation :

$$f'(x) - f(x) = -e^{-x}.$$

À $x = 0$, l'équation initiale donne $f(0) = 1$. En multipliant l'égalité dérivée par e^{-x} et en utilisant la règle de dérivation d'un produit,

$$\frac{d}{dx}(e^{-x}f(x)) = e^{-x}(f'(x) - f(x)) = -e^{-2x}.$$

Une intégration sur $[0, x]$ donne

$$e^{-x}f(x) - f(0) = -\int_0^x e^{-2t} dt = -\frac{1 - e^{-2x}}{2}.$$

Avec $f(0) = 1$, on obtient $e^{-x}f(x) = (1 + e^{-2x})/2$, donc $f(x) = (e^x + e^{-x})/2$. Toute solution est nécessairement cette fonction ; la vérification directe donnée plus haut prouve qu'elle est effectivement solution. Elle est donc unique.

La première méthode utilise les opérateurs inverses construits dans le problème. La seconde ramène cette équation particulière à la dérivation d'un produit et à une primitive, sans supposer un théorème général de résolution d'équations différentielles.

Relevé des adaptations

- III.3 : rectification de $V(f_n)$ en $V_n(f)$ dans l'estimation. La première notation utilise une suite non définie, tandis que la seconde correspond à la somme d'endomorphismes introduite en III.1.c et à l'approximation démontrée par les sommes partielles de l'exponentielle.