



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques

2026

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

On suppose, pour toute l'épreuve, que les bibliothèques Python sont importées par les commandes suivantes :

Python

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
```

Exercice 1

On considère deux variables aléatoires X_1 et X_2 indépendantes, telles que $X_1(\Omega) = X_2(\Omega) =]0, 1]$ et suivant toutes les deux la loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose $Y_1 = \ln(X_1)$, $Y_2 = \ln(X_2)$, $Z = X_1 X_2$ et on admet que Y_1 , Y_2 et Z sont des variables aléatoires à densité définies sur le même espace probabilisé que X_1 et X_2 .

- 1) Écrire en Python une fonction `simulZ` permettant de simuler Z .
- 2) Justifier l'existence de l'espérance et de la variance de Z puis les déterminer.
- 3) On note F la fonction de répartition commune à Y_1 et Y_2 .
 - a) Déterminer $F(x)$ pour tout réel x .
 - b) En déduire une densité f commune à Y_1 et Y_2 .
- 4) a) Vérifier que la fonction h , définie par
$$h(x) = \begin{cases} -xe^x & \text{si } x \leq 0, \\ 0 & \text{si } x > 0, \end{cases}$$
 est une densité de $Y_1 + Y_2$.
 - b) En déduire la fonction de répartition H de $Y_1 + Y_2$.
 - c) Déterminer la fonction de répartition F_Z de Z puis vérifier qu'une densité f_Z de Z est donnée par :

$$f_Z(x) = \begin{cases} -\ln(x) & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

5) a) Pour tout entier naturel n , montrer que l'intégrale $\int_0^1 x^n \ln(x) dx$ converge et donner sa valeur.

b) Retrouver alors les valeurs de $E(Z)$ et $V(Z)$ déterminées à la question 2).

Exercice 2

Dans cet exercice, on pourra utiliser sans démonstration les formules

$$\cos(2a) = 2 \cos^2(a) - 1 \text{ et } \sin(2a) = 2 \sin(a) \cos(a).$$

On rappelle le développement limité à l'ordre cinq de la fonction sinus au voisinage de zéro :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \quad (x \rightarrow 0).$$

1) Montrer que l'on définit parfaitement deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ en posant $u_1 = 0, v_1 = 2$ et, pour tout entier naturel n non nul :

$$u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{v_n}{u_{n+1}}.$$

2) Compléter la fonction Python suivante afin qu'elle renvoie v_n .

Python

```
def suite_v(n):  
    u = 0  
    v = 2
```

```
for k in range(2, n + 1):
    ...
    ...
return v
```

- 3) a) Montrer qu'il existe une unique suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dont les éléments appartiennent à $[0, \frac{\pi}{2}]$ et telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \cos(\alpha_n).$$

- b) Expliciter α_n en fonction de n , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $v_n = 2^n \sin(\frac{\pi}{2^n})$ puis donner la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

- 4) Déterminer les constantes réelles a , b et c telles que :

$$v_n = a + \frac{b}{4^n} + \frac{c}{4^{2n}} + o\left(\frac{1}{4^{2n}}\right) \quad (n \rightarrow +\infty).$$

- 5) Accélération de convergence par la méthode de Richardson.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = \frac{4v_{n+1} - v_n}{3}$.

- a) Écrire en Python une fonction `suite_w` utilisant la fonction `suite_v` et qui renvoie w_n .
- b) Donner la limite de w_n .
- c) Montrer que :

$$w_n = \pi - \frac{\pi^5}{480 \times 4^{2n}} + o\left(\frac{1}{4^{2n}}\right) \quad (n \rightarrow +\infty),$$

puis déterminer un équivalent de $\frac{w_n - \pi}{v_n - \pi}$ lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

d) Dans le cadre de la recherche d'une valeur approchée de π , quel intérêt y a-t-il à utiliser la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ plutôt que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$?

6) Généralisation de la méthode de Richardson.

Étant donnés deux réels q et r de $]0, 1[$ tels que $q > r$, on considère une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifiant :

$$\exists (a, b, c) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*, \quad x_n = a + bq^n + cr^n + o(r^n) \quad (n \rightarrow +\infty).$$

a) Définir une suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dont le terme général est combinaison linéaire de x_n et x_{n+1} , qui vérifie $y_n = a + dq^n + o(r^n)$, où d est une constante à déterminer en fonction de c, q et r .

b) Montrer que $x_n = a + bq^n + o(q^n)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

c) En déduire que la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers a plus rapidement que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 3

On suppose que toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Partie 1

Un mobile se déplace aléatoirement sur un axe dont l'origine est le point O d'abscisse zéro. Au départ, à l'instant zéro, le mobile est situé sur le point O .

Le mobile se déplace selon la règle suivante : à chaque instant $k \in \mathbb{N}^*$, il se place de façon équiprobable sur l'un des points d'abscisses $0, 1, \dots, k$.

Pour tout entier naturel k , on note X_k la variable aléatoire égale à l'abscisse de ce point à l'instant k ; on a donc $X_0 = 0$.

On admet que $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

- 1) a) Déterminer, pour tout entier naturel k non nul, la loi de X_k .
- b) Montrer que, pour tout entier naturel k non nul, X_k possède une espérance et une variance, puis calculer $E(X_k)$ et $V(X_k)$.
- 2) On note Y la variable aléatoire égale au rang du premier retour à l'origine du mobile, sans prendre en compte son positionnement au départ, et on pose $Y = 0$ s'il n'y a aucun retour à l'origine.
 - a) Pour tout entier naturel n non nul, exprimer l'événement $(Y = n)$ à l'aide des variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$.
 - b) En déduire que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(Y = n) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

- c) Déterminer par le calcul la valeur de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(Y = n).$$

En déduire $P(Y = 0)$.

- d) La variable Y admet-elle une espérance ?

Partie 2

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à un et on considère une variable aléatoire U_n telle que $U_n(\Omega) = \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ et qui suit la loi uniforme sur $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on considère également une variable aléatoire Z_n dont la loi, conditionnellement à l'événement $(U_n = k)$, est la loi géométrique de paramètre $1 - \frac{k}{n}$. La loi géométrique est prise sur $\mathbb{N}^*$; pour le paramètre un, elle est concentrée en un.

3) Simulation informatique de Z_n .

Compléter la fonction suivante afin qu'elle simule U_n et Z_n et renvoie la valeur prise par Z_n .

Python

```
def var_Z(n):
    U = ...
    Z = ...
    return Z
```

4) a) Montrer que, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on a l'égalité :

$$P(Z_n = i) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^{i-1} - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^i.$$

Lorsque $i = 1$, le terme de puissance zéro vaut un, y compris pour $k = 0$.

b) En déduire la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(Z_n = i)$.

c) Conclure quant à la convergence en loi de la suite $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

5) Espérance de Z_n .

Justifier que l'on peut utiliser la formule de l'espérance totale puis établir que l'espérance de Z_n est donnée par :

$$E(Z_n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

6) Équivalent de $E(Z_n)$ lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}.$$

b) Établir, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à deux, l'encadrement :

$$\ln(n) + \frac{1}{n} \leq E(Z_n) \leq \ln(n) + 1.$$

c) En déduire un équivalent de $E(Z_n)$.

Problème

On désigne par n un entier naturel non nul et on note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On note $S_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices symétriques et on dit qu'une matrice $M \in S_n(\mathbb{R})$ est positive lorsque l'on a :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad {}^tXMX \geq 0.$$

On note $S_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives.

Partie 1 : caractérisation des matrices symétriques positives

On désigne par A une matrice de $S_n(\mathbb{R})$ et on se propose de montrer que $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ si, et seulement si, ses valeurs propres sont positives.

1) On suppose que A est positive et on considère une valeur propre λ de A .

a) Montrer qu'il existe un vecteur X non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $\lambda = \frac{{}^tXAX}{{}^tXX}$.

b) En déduire que $\lambda \geq 0$.

2) a) Justifier l'existence d'une matrice orthogonale $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et d'une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = PD^tP$.

On pose

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

et on suppose que les réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont tous positifs, non nécessairement distincts.

b) Pour tout vecteur $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on pose $Y = {}^tPX$. Montrer que ${}^tXAX = {}^tYDY$.

c) En déduire que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tXAX \geq 0$.

3) Conclure quant à l'objectif annoncé.

Partie 2 : « racine carrée » d'une matrice symétrique positive

Dans cette partie, A désigne une matrice de $S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = PD^tP$, les matrices P et D étant celles présentées dans la partie 1.

4) a) Justifier que la matrice

$$\Delta = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix},$$

élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, est correctement définie.

b) Vérifier que la matrice $B = P\Delta^tP$ est élément de $S_n^+(\mathbb{R})$ et vérifie $B^2 = A$.

5) On note $\mu_1, \dots, \mu_p$ les valeurs propres distinctes de A , avec $1 \leq p \leq n$, ce qui fait que $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont éléments de $\{\mu_1, \dots, \mu_p\}$.

Pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad L_i(x) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^p \frac{x - \mu_k}{\mu_i - \mu_k}.$$

Un produit vide vaut un.

Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$, justifier que l'on a $L_i(\mu_i) = 1$ et $L_i(\mu_j) = 0$ si $i \neq j$.

6) On note S le polynôme défini par

$$S = \sum_{i=1}^p \sqrt{\mu_i} L_i.$$

- a) Montrer que $S(\mu_k) = \sqrt{\mu_k}$ pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ et en déduire $S(\lambda_i)$, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
- b) Établir, pour tout entier naturel k , la relation $A^k = PD^{kt}P$.
- c) En déduire que $S(A) = PS(D)^tP$ puis établir finalement que $B = S(A)$.

Partie 3 : unicité de la « racine carrée » d'une matrice symétrique positive

Dans cette partie, A désigne toujours une matrice de $S_n^+(\mathbb{R})$.

On se propose de montrer que la matrice B trouvée dans la partie précédente est la seule matrice symétrique positive à vérifier $B^2 = A$. Pour ce faire, on raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe une autre matrice $C \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $C^2 = A$.

- 7) a) Montrer que C et A commutent, c'est-à-dire que $AC = CA$.
- b) En déduire que, pour tout entier naturel k , on a $A^k C = CA^k$, puis utiliser la question 6)c) pour en déduire que B et C commutent.

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique pour laquelle on note $\langle u, v \rangle$ le produit scalaire des vecteurs u et v de $\mathbb{R}^n$.

On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^n$, b l'endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à B et c l'endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à C .

On note toujours $\mu_1, \dots, \mu_p$, avec $p \leq n$, les valeurs propres distinctes de A , et pour tout

$i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on pose $E_i = \text{Ker}(b - \sqrt{\mu_i} \text{Id})$.

8) a) Justifier rapidement que $b \circ c = c \circ b$.

b) Montrer que E_i est stable par c , c'est-à-dire que, si $x \in E_i$, alors $c(x) \in E_i$.

c) On note alors c_i l'endomorphisme induit par c sur E_i , défini par
 $c_i : E_i \rightarrow E_i, \quad x \mapsto c_i(x) = c(x)$. Justifier que c_i est symétrique.

d) En déduire qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B}_i$ de E_i formée de vecteurs propres, à la fois de c_i et de b .

e) Expliquer comment construire une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle les matrices de b et c sont diagonales.

f) Montrer alors que $C = B$.

Grâce à l'unicité, on note maintenant $B = A^{1/2}$ et B est appelée la « racine carrée » de A .

Partie 4 : un résultat sur l'inversibilité et la positivité

On dit qu'une matrice $M \in S_n(\mathbb{R})$ est définie positive lorsque l'on a :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \quad {}^tXMX > 0.$$

9) En s'inspirant des questions 1) et 2), mais sans refaire les calculs déjà faits, montrer qu'une matrice $A \in S_n(\mathbb{R})$ est définie positive si, et seulement si, ses valeurs propres sont strictement positives.

10) Soit $M \in S_n(\mathbb{R})$. On note $\text{Sp}(M)$ l'ensemble des valeurs propres de M . On pose $N = M - I_n$.

a) Montrer que N est symétrique.

On suppose dans la suite de cette question que N est positive.

b) Montrer que $\text{Sp}(M) \subset [1, +\infty[$ et en déduire que M est inversible. Établir que $I_n - M^{-1}$ est positive.

11) Soit S_1 et S_2 deux matrices de $S_n(\mathbb{R})$, avec S_1 définie positive.

On admet sans démonstration que $S_2 - S_1$ est symétrique et on suppose que $S_2 - S_1$ est positive.

a) Montrer que S_2 est définie positive.

b) Justifier que $S_1^{1/2}$ est inversible puis développer et simplifier le produit $S_1^{-1/2}(S_2 - S_1)S_1^{-1/2}$, où $S_1^{-1/2}$ désigne l'inverse de $S_1^{1/2}$.

c) On pose $L = S_1^{-1/2}S_2S_1^{-1/2}$. Vérifier que L est symétrique et que $L - I_n$ est symétrique, puis montrer, en considérant, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le réel ${}^tX(L - I_n)X$, que $L - I_n$ est positive.

d) Justifier que L est inversible et que $I_n - L^{-1}$ est positive.

e) Établir finalement que $S_1^{1/2}(S_1^{-1} - S_2^{-1})S_1^{1/2}$ est positive et conclure que $S_1^{-1} - S_2^{-1}$ est positive.