



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques

2025

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Exercice 1.

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 1 et on considère la fonction f_n définie sur $]n, +\infty[$ par :

$$\forall x \in]n, +\infty[, \quad f_n(x) = (x - n) \ln(x) - x \ln(x - n).$$

On considère aussi une fonction g définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g(x) = \frac{\ln(x)}{x}.$$

1. (a) Dresser le tableau de variations de g , limites comprises.

1. (b) En déduire que la suite $\left(\frac{\ln(k)}{k}\right)_{k \geq 3}$ est décroissante puis que :

$$\forall k \geq 4, \quad \frac{\ln(k)}{k} \leq \frac{\ln(2)}{2}.$$

2. (a) Justifier que f_n est dérivable sur $]n, +\infty[$ et donner l'expression de $f'_n(x)$ pour tout réel $x > n$.

2. (b) Montrer que pour tout réel $t > 0$, $\ln(t) \leq t - 1$.

En déduire que f_n est strictement décroissante sur $]n, +\infty[$.

2. (c) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à deux.

Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$, d'inconnue $x \in [n + 1, n + 2]$, admet une unique solution, que l'on note x_n .

3. Montrer l'équivalent suivant : $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$.

4. (a) Justifier que :

$$\forall n \geq 2, \quad \ln(x_n - n) = (x_n - n) \frac{\ln(x_n)}{x_n}.$$

4. (b) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x_n)}{x_n}$ et en déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - n) = 1$.

5. On considère la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ définie par : $\forall n \geq 2, u_n = x_n - n - 1$.

5. (a) Justifier que :

$$\ln(1 + u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n \quad \text{et} \quad \ln(1 + n + u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n).$$

5. (b) Avec la question 4. (a), montrer alors que :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}.$$

6. Déterminer la nature des séries de termes généraux u_n et u_n^2 .

Exercice 2.

Soit E un espace euclidien.

Le produit scalaire de deux vecteurs x et y de E est noté $\langle x, y \rangle$ et la norme de x est notée $\|x\|$.

On rappelle le résultat de cours suivant : si p est un projecteur de E , alors p est un projecteur orthogonal de E si et seulement si c'est un endomorphisme symétrique de E .

Dans la suite de l'exercice, les sous-espaces vectoriels considérés de E seront non triviaux (différents de E et ne contenant pas uniquement le vecteur nul).

1. Soit F un sous-espace vectoriel de E et p la projection orthogonale sur F .

1. (a) Montrer l'inclusion suivante :

$$F \subset \{x \in E, \|p(x)\| = \|x\|\}.$$

1. (b) Montrer que pour tout $x \in E$, $\|x\|^2 = \|x - p(x)\|^2 + \|p(x)\|^2$.

1. (c) En déduire que :

$$F = \{x \in E, \|p(x)\| = \|x\|\}$$

et que pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$.

Dans la suite de l'exercice, on considère F_1 , F_2 et F_3 trois sous-espaces vectoriels de E et pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on note p_i la projection orthogonale sur F_i .

2. On suppose dans cette question que $p_1 \circ p_2 = p_3$.

2. (a) Montrer que $F_1 \cap F_2 \subset F_3$.

2. (b) Soit x un vecteur de F_3 . En utilisant la question 1. (c), montrer que :

$$\|x\| \leq \|p_2(x)\|.$$

En déduire que x appartient à F_2 puis montrer que x appartient à F_1 .

2. (c) Qu'en déduit-on pour les sous-espaces vectoriels $F_1 \cap F_2$ et F_3 ?

2. (d) Justifier que pour tout $(x, y) \in E^2$,

$$\langle p_3(x), y \rangle = \langle x, p_3(y) \rangle$$

et en déduire l'égalité suivante :

$$\langle (p_1 \circ p_2)(x), y \rangle = \langle (p_2 \circ p_1)(x), y \rangle.$$

2. (e) Montrer alors que $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1$.
3. On suppose dans cette question que $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1$ et on pose $p = p_1 \circ p_2$.
 3. (a) Montrer que p est un projecteur de E .
 3. (b) Montrer que p est un endomorphisme symétrique de E .
 3. (c) En déduire que $p_1 \circ p_2$ est une projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel à préciser.
4. Énoncer précisément le résultat démontré dans les questions 2 et 3.

Exercice 3.

On suppose que toutes les variables aléatoires rencontrées dans cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On définit la fonction f par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} -2xe^{-x^2} & \text{si } x \leq 0, \\ 0 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Partie 1. Étude d'une variable aléatoire.

1. Montrer que f peut être considérée comme une densité.

On considère dans la suite une variable aléatoire X telle que $X(\Omega) =]-\infty, 0]$, de densité f , et on note F sa fonction de répartition.

2. Déterminer, pour tout réel x , l'expression de $F(x)$.

3. Rappeler l'expression d'une densité d'une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(0, \frac{1}{2})$.

4. En déduire que X admet une espérance et calculer celle-ci.

On pose $Z = X^2$ et on admet que Z est une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que X . On note G sa fonction de répartition.

5. Pour tout réel positif x , exprimer $G(x)$ en fonction de F et de x .

En déduire que Z suit une loi exponentielle de paramètre 1.

6. En déduire que X admet une variance et donner sa valeur.

7. On souhaite dans cette question simuler la variable X à l'aide de Python.

On considère importées les bibliothèques `numpy` et `numpy.random` de la manière suivante :

Python

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
```

On rappelle que l'instruction `rd.exponential(1)` permet de simuler la réalisation d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1.

Compléter le code suivant afin qu'il simule n réalisations de la variable X (la fonction renvoie alors un tableau de longueur n constitué de ces réalisations).

Python

```
def simulX(n):
    M = np.zeros(n) # Tableau de longueur n constitué de 0
    for i in range(n):
        ...
    return M
```

Écrire alors une fonction Python nommée `EsperanceX`, prenant en entrée un entier naturel $n \geq 1$, et qui renvoie une valeur approchée de l'espérance de X , en utilisant le résultat de `simulX(n)` (et sans aucune fonction venant d'une bibliothèque particulière).

Partie 2. Étude d'une convergence en loi.

On définit une fonction h par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 2(1-x) & \text{si } x \in [0, 1], \\ 0 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

8. Montrer que h peut être considérée comme une densité.

On considère dans la suite une variable aléatoire Y telle que $Y(\Omega) = [0, 1]$, de densité h , et on note H sa fonction de répartition.

9. Déterminer pour tout réel x l'expression de $H(x)$.

On considère maintenant une suite $(Y_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires, toutes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes et qui suivent toutes la même loi que Y .

On définit alors, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $M_n = \max\{Y_1, \dots, Y_n\}$ et on admet que M_n est elle aussi une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On pose pour finir $T_n = \sqrt{n}(M_n - 1)$.

10. On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, F_n la fonction de répartition de T_n . Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_n(x) = \left[H \left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}} \right) \right]^n.$$

11. Déterminer, pour tout réel y , $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{y}{n} \right)^n$.

12. En déduire que la suite de variables aléatoires $(T_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers X .

Problème

On considère la suite $(B_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad B_n = \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}.$$

Le problème est décomposé en quatre parties. Dans la partie 1, on utilise l'algorithmique pour coder les termes de la suite $(B_n)_{n \geq 0}$. Dans la partie 2, on obtient des estimations de la suite $(B_n)_{n \geq 0}$. Dans la partie 3, à l'aide de la partie 2, on étudie une variable aléatoire. Dans la partie 4, à l'aide de la partie 2, on étudie une fonction dont l'expression est donnée par une somme.

Les parties 3 et 4 sont totalement indépendantes.

On rappelle que pour une suite $(a_k)_{k \geq 0}$,

$$\prod_{k=1}^0 a_k = 1$$

par convention.

On rappelle aussi que si p, q sont deux entiers naturels tels que $p < q$, $\llbracket p, q \rrbracket$ désigne l'ensemble des entiers naturels compris entre p (inclus) et q (inclus).

Partie 1.

1. Justifier que pour tout entier naturel n ,

$$B_n = \prod_{k=1}^n \frac{k+n}{4k}.$$

Compléter alors le code de la fonction Python `B`, prenant en entrée un entier naturel n , et qui renvoie la valeur de B_n .

Python

```
def B(n):
    P = ...
    for k in range(...):
        P = ...
    return P
```

Partie 2.

On pose pour tout entier naturel n , $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin(t)^n dt$.

2. Calculer W_0 et W_1 .

3. Montrer que $(W_n)_{n \geq 0}$ est décroissante.

4. Montrer que pour tout entier naturel n , $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$.

5. En déduire que pour tout entier naturel n , on a :

$$W_{2n} = \frac{\pi}{2} B_n \quad \text{et} \quad W_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)B_n}.$$

6. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $W_{2n-1} = \frac{1}{2nB_n}$.

7. En déduire que pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{1}{(2n+1)B_n} \leq \frac{\pi}{2} B_n \leq \frac{1}{2nB_n},$$

puis :

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n+1}} \leq B_n \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}.$$

8. En déduire un équivalent de B_n quand n tend vers $+\infty$.

Partie 3.

On considère dans cette section du problème une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \geq 1}$, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes, à valeurs dans $\{-1, 1\}$ et telles que :

$$\forall n \geq 1, \quad P(X_n = 1) = P(X_n = -1).$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k.$$

9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

9. (a) Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}^*$, la loi de la variable aléatoire Y_k définie par :

$$Y_k = \frac{X_k + 1}{2}.$$

On précisera son espérance et sa variance.

9. (b) En déduire la loi de la variable T_n définie par :

$$T_n = \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n X_k.$$

9. (c) Montrer que $S_n(\Omega) = \{2j - n, j \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$ et déterminer la loi de S_n .

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On définit la variable aléatoire R_n comme étant le cardinal de l'ensemble $\{k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket, S_k = 0\}$.

Autrement dit, pour $\omega \in \Omega$, $R_n(\omega)$ est égal au nombre d'entiers $k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket$ tels que $S_k(\omega) = 0$.

10. (a) Justifier que :

$$R_n = \text{Card}(\{k \in \llbracket 1, n \rrbracket, S_{2k} = 0\}).$$

10. (b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $P(S_{2k} = 0) = B_k$.

10. (c) On rappelle que si A est un événement, la fonction indicatrice de A , notée $\mathbf{1}_A$, définie de Ω dans $\mathbb{R}$, est définie par $\mathbf{1}_A(\omega) = 1$ si $\omega \in A$ et $\mathbf{1}_A(\omega) = 0$ sinon.

On pose pour tout entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $A_k = (S_{2k} = 0)$. Donner une expression de R_n à l'aide des fonctions indicatrices des événements A_k .

10. (d) En déduire que l'espérance de R_n est donnée par la formule :

$$E(R_n) = \sum_{k=1}^n B_k.$$

11. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}).$$

12. En déduire alors, à l'aide de la partie 2, puis par sommation, un équivalent de l'espérance de R_n quand n tend vers $+\infty$.

Partie 4.

13. (a) Montrer que :

$$\frac{1}{\binom{2n}{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n\pi}}{4^n}.$$

13. (b) En déduire que pour tout réel $x \in [0, 4[$, la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{\binom{2n}{n}}$$

converge.

Soit f la fonction définie sur $[0, 4[$ par :

$$\forall x \in [0, 4[, \quad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\binom{2n}{n}}.$$

14. Justifier que f est croissante sur $[0, 4[$.

On admet dans la suite que f est continue sur $]0, 4[$.

15. (a) Montrer que pour tout $x \in [0, 4[$ et tout entier naturel $n \geq 1$,

$$\sqrt{\pi} \left(\frac{x}{4}\right)^n \leq \frac{x^n}{\binom{2n}{n}} \leq \sqrt{\pi}(n+1) \left(\frac{x}{4}\right)^n.$$

15. (b) En déduire que :

$$\forall x \in [0, 4[, \quad \sqrt{\pi} \frac{x}{4-x} \leq f(x) \leq \sqrt{\pi} \left(\frac{x}{4} \frac{1}{(1-x/4)^2} + \frac{x}{4-x} \right).$$

Déterminer alors les limites de f en 0^+ et 4^- . Qu'en déduit-on pour f en 0 ?

16. Montrer que pour tout réel $x \in [0, 4[$, $f(x) \geq \frac{x}{2}$.

17. On admet que :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x}{2} + o(x).$$

En utilisant tous les résultats précédents, tracer l'allure précise de la courbe de la fonction f .