



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques

2024

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

On suppose, pour toute l'épreuve, que la bibliothèque NumPy de Python est importée avec `import numpy as np` et que sa bibliothèque de simulation est importée avec `import numpy.random as rd`.

Exercice 1

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et J_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments valent 1.

- 1) a) Déterminer le rang de J_n . En déduire que 0 est valeur propre de J_n et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.
- b) Vérifier que le vecteur V_n , élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, dont toutes les composantes sont égales à 1, est un vecteur propre de J_n .
- c) À l'aide des questions précédentes, donner les valeurs propres de J_n .

Dans toute la suite, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad f_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right)^2.$$

- 2) Montrer que f_n est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$.
- 3) a) Déterminer, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et pour tout $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, l'expression de $\partial_i f_n(x)$ en fonction de $x_1, x_2, \dots, x_n$ et de n .
- b) En déduire que les points critiques de f_n sont les points de la forme $(a, a, \dots, a) \in \mathbb{R}^n$.
- 4) a) Déterminer les dérivées partielles d'ordre 2 de f_n .

- b) Vérifier que la hessienne de f_n en chaque point critique est :

$$\nabla^2 f_n(a, a, \dots, a) = \frac{2}{n^2}(nI_n - J_n).$$

- c) Compléter les commandes Python suivantes afin qu'elles permettent de calculer et d'afficher $\nabla^2 f_n(a, a, \dots, a)$ pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

Python

```
n = int(input('entrez la valeur de n:'))
I = ...
J = ...
Hessienne = ...
print(Hessienne)
```

- d) À l'aide de la première question, donner les valeurs propres de $\nabla^2 f_n(a, a, \dots, a)$ et expliquer pourquoi cette méthode ne permet pas de savoir si f_n possède un extremum local.
- 5) a) En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à deux vecteurs bien choisis de $\mathbb{R}^n$, muni de son produit scalaire canonique, montrer que :

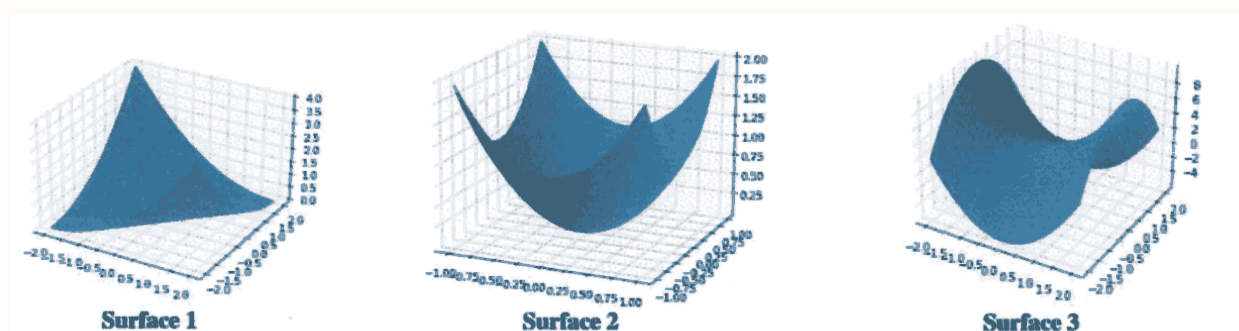
$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2 \leq n \sum_{k=1}^n x_k^2.$$

- b) En déduire que f_n admet un minimum global sur $\mathbb{R}^n$ et que ce minimum est atteint en chaque point critique de f_n .
- 6) Étude du cas $n = 2$.
- a) Compléter la deuxième ligne de la fonction Python suivante afin de définir la fonction f_2 .

Python

```
def f_2(x, y):
    z = ...
    return z
```

- b) Certaines commandes Python utilisant la fonction précédente permettent de tracer la surface représentant f_2 . Laquelle est-ce ? Justifier la réponse.



Exercice 2

- 1) Question préliminaire. On rappelle que la fonction arctangente, notée Arctan , est la bijection réciproque de la restriction de la fonction tangente à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et qu'elle est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

- a) Rappeler l'expression, pour tout réel x , de $\text{Arctan}'(x)$.

- b) Montrer que, pour tout réel strictement positif x , on a :

$$\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

- c) Justifier l'équivalent suivant :

$$\text{Arctan}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x.$$

2) On considère la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{2}{\pi(e^x + e^{-x})}.$$

a) Vérifier que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ converge.

b) Montrer que f peut être considérée comme une densité.

Dans la suite, on s'intéresse à une variable aléatoire X , définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, admettant f pour densité.

3) Montrer que la fonction de répartition F de X est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \frac{2}{\pi} \operatorname{Arctan}(e^x).$$

4) Simulation.

On pose $U = F(X)$ et on admet que U est une variable aléatoire, elle aussi définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

a) Montrer que F est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0, 1[$.

b) Reconnaître la loi de U .

c) Déterminer $F^{-1}(x)$ pour tout $x \in]0, 1[$ puis, en admettant que la commande `np.tan(y)` renvoie la valeur de la fonction tangente en y , écrire un script Python permettant de simuler X .

5) a) Montrer que X admet une espérance et la déterminer.

b) Montrer que X^2 admet une espérance.

6) Dans cette question, on se propose de déterminer la variance de X .

On pose $I = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{e^t + e^{-t}} dt$.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, établir que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-nt} dt$ converge et que :

$$\int_0^{+\infty} t^2 e^{-nt} dt = \frac{2}{n^3}.$$

b) Pour tout entier naturel p , établir l'égalité :

$$\sum_{k=0}^p (-1)^k \int_0^{+\infty} t^2 e^{-(2k+1)t} dt = I + (-1)^p \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-(2p+3)t}}{1 + e^{-2t}} dt.$$

c) Montrer, par encadrement, que :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-(2p+3)t}}{1 + e^{-2t}} dt = 0.$$

d) Dédire des questions précédentes l'expression de $V(X)$ sous forme d'une somme de série.

En admettant que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = \frac{\pi^3}{32},$$

donner la valeur de $V(X)$.

- 7) On pose $Y = e^X$ et on admet que Y est une variable aléatoire, définie elle aussi sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- a) Déterminer explicitement la fonction de répartition G de Y puis en déduire que Y est une variable aléatoire à densité.
- b) On considère une suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires, toutes définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant la même loi que Y .

On pose $M_n = \max(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ et on admet que M_n est une variable aléatoire à densité, définie elle aussi sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Montrer que la fonction de répartition G_n de M_n est définie par :

$$G_n(x) = \begin{cases} \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{Arctan}(x) \right)^n & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

- c) Utiliser la question 1) pour montrer que la suite de variables aléatoires $\left(\frac{n}{M_n} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

Exercice 3

Dans cet exercice, E est un espace euclidien tel que $\dim E \geq 2$ et p désigne un entier naturel non nul et strictement inférieur à $\dim E$.

Le produit scalaire des vecteurs a et b de E est noté $\langle a, b \rangle$ et la norme du vecteur a est notée $\|a\|$.

On considère p réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, tous différents de 0, ainsi qu'une famille orthonormale $(u_1, \dots, u_p)$ de p vecteurs de E , et enfin on pose $U = \operatorname{Vect}(u_1, \dots, u_p)$.

On se propose d'étudier l'application f qui, à tout vecteur x de E , associe :

$$f(x) = \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle u_i, x \rangle u_i.$$

Partie 1 : étude de f

1) Montrer que f est un endomorphisme symétrique de E .

2) Caractériser f lorsque $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont tous égaux à 1.

On revient au cas général pour toute la suite.

3) a) Déterminer $\text{Ker}(f)$ et préciser sa dimension en fonction de $\dim E$ et de p .

b) En déduire le rang de f puis déterminer $\text{Im}(f)$.

4) Montrer que les réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont valeurs propres de f et donner un vecteur propre associé à chacune d'entre elles.

Partie 2 : convergence d'une suite de vecteurs de E

5) On dit qu'une suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de vecteurs de E converge vers le vecteur y de E lorsque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|y_n - y\| = 0$. Montrer que le vecteur y est unique.

On pose

$$K = \sqrt{\sum_{i=1}^p \lambda_i^2}$$

et on suppose que K est strictement inférieur à 1.

- 6) Calculer $\|f(x)\|^2$ pour tout $x \in E$ et en déduire que l'on a $\|f(x)\| \leq K\|x\|$.
- 7) On considère une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de vecteurs de E définie par la donnée du vecteur x_0 et par la relation $x_{n+1} = f(x_n)$, valable pour tout entier naturel n .
- a) Montrer que, pour tout entier naturel n , on a $\|x_n\| \leq K^n \|x_0\|$.
- b) Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Vers quel vecteur ?
- c) Donner la nature de la série

$$\sum_{n \geq 0} \|x_n\|.$$

Problème

Partie 1

Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$. On a donc $u_0 = 1$.

- 1) a) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et positive.
- b) En déduire la convergence de la suite (u_n) .
- 2) a) Montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$, on a l'inégalité $e^{x/2} \leq 1 + x$.
- b) En déduire, pour tout entier naturel n , l'inégalité :

$$u_n \leq \int_0^1 e^{-nt^2/2} dt.$$

- c) Donner la valeur, pour tout entier naturel n non nul, de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nt^2/2} dt$.
- d) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Partie 2

- 3) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$ est convergente.

Pour toute la suite, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$I_n = \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt.$$

- 4) a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq I_n \leq \frac{1}{2n-1}.$$

- b) En déduire la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

- c) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n$.

- 5) a) Montrer, grâce à une intégration par parties effectuée dans J_n , que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad J_n = 2n(J_n - J_{n+1}).$$

- b) Déterminer J_1 .

- c) Montrer que la série de terme général $\frac{J_n}{n}$ est convergente et que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{J_n}{n} = \pi.$$

- d) Utiliser la relation de la question 5) a) pour compléter la fonction Python suivante afin qu'elle renvoie la valeur de J_n .

Python

```
def suiteJ(n):
    J = ...
    for k in range(2, n + 1):
        J = ...
    return J
```

- 6) Montrer que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad J_{n+1} = \frac{\pi}{2} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}.$$

Partie 3

On désigne par n un entier naturel non nul et on note X_n (respectivement Y_n) le nombre de « piles » (respectivement « faces ») obtenus lors des $2n$ premiers lancers supposés indépendants d'une pièce équilibrée.

- 7) a) Donner, en justifiant, la loi de X_n .

- b) Montrer que $P(X_n = Y_n) = \frac{2}{\pi} J_{n+1}$ et en déduire la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = Y_n)$.

- c) Justifier sans calcul l'égalité $P(X_n < Y_n) = P(X_n > Y_n)$.

- d) Montrer que la probabilité d'obtenir strictement moins de « piles » que de « faces » lors de l'expérience décrite plus haut tend vers $\frac{1}{2}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
- 8) Pour tout entier naturel k non nul, on considère la variable aléatoire Z_k qui vaut 1 si l'on a obtenu « pile » au k -ième lancer et 0 sinon.
- a) Vérifier que l'on a

$$\sum_{k=1}^{2n} Z_k = X_n.$$

- b) En appliquant le théorème limite central à la suite $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$, montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n \leq Y_n) = \frac{1}{2}.$$

- c) Retrouver le résultat établi à la question 7) d).