



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques

2023

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

On suppose, pour toute l'épreuve, que les bibliothèques NumPy et NumPy Random de Python sont importées ainsi :

Python

```
import numpy as np  
import numpy.random as rd
```

Exercice 1

Partie 1

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et on considère un endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est une matrice M telle que $\text{rg}(M) = 1$.

On note C la première colonne de M et on suppose que C est non nulle.

- 1) Donner la dimension de $\text{Ker}(f)$ et en déduire une valeur propre de f .
- 2) a) Montrer qu'il existe une matrice $L = (1 \ \ell_2 \ \dots \ \ell_n)$ appartenant à $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ telle que $M = CL$.
- 2) b) On rappelle que $\text{Tr}(M)$ désigne la trace de la matrice M . Montrer que $\text{Tr}(M) = LC$.
- 2) c) Établir que l'on a l'égalité :

$$M^2 = \text{Tr}(M)M.$$

- 3) Montrer que $\text{Tr}(M)$ est valeur propre de f .
- 4) On suppose $\text{Tr}(M) = 0$. Montrer que M n'est pas diagonalisable.

- 5) On suppose $\text{Tr}(M) \neq 0$. À l'aide des questions précédentes, déterminer les valeurs propres de f et montrer que f est diagonalisable.

Partie 2

On désigne par a, b, c trois réels non nuls et on considère l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/a & 1/b \\ a & 1 & 1/c \\ b & c & 1 \end{pmatrix}.$$

On suppose que A n'est pas inversible.

- 6) a) En considérant le système $AX = 0$, où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, établir, en raisonnant par

l'absurde, la relation $ac = b$.

- 6) b) En déduire le rang de A .

- 7) a) Conclure que g est diagonalisable et donner ses valeurs propres.

- 7) b) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, A^n appartient à $\text{Vect}(A)$.

Exercice 2

On désigne par c un réel strictement supérieur à 2 et on suppose que toutes les variables aléatoires rencontrées dans cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé.

Partie 1 : étude d'une loi de probabilité

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{x^{c+1}} & \text{si } x \geq 1, \\ 0 & \text{si } x < 1. \end{cases}$$

1) Montrer que f peut être considérée comme une densité.

On considère dans la suite une variable aléatoire X telle que $X(\Omega) = [1, +\infty[$, de densité f , et on note F sa fonction de répartition. On dit que X suit la loi de Pareto de paramètre c .

2) Montrer que X possède une espérance et une variance et les déterminer.

3) Déterminer, pour tout réel x , l'expression de $F(x)$ en fonction de x et c .

4) On pose $Y = \ln X$ et on admet que Y est une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que X . On note G sa fonction de répartition.

4) a) Pour tout réel x , exprimer $G(x)$ à l'aide de la fonction F .

4) b) En déduire que Y suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

4) c) Écrire une fonction Python d'en-tête `def simulX(c)` utilisant `rd.exponential` et permettant de simuler X .

Partie 2 : produit de deux variables suivant la loi de Pareto de paramètre c

On considère deux variables aléatoires X_1 et X_2 indépendantes et suivant toutes les deux la loi de Pareto de paramètre c . On pose $Y_1 = \ln X_1$, $Y_2 = \ln X_2$ et $Z = X_1 X_2$.

- 5) Écrire une fonction Python d'en-tête `def simulZ(c)` utilisant la fonction `simulX(c)` et permettant de simuler Z .
- 6) Déterminer l'espérance et le moment d'ordre 2 de Z puis vérifier que sa variance est donnée par :

$$V(Z) = \frac{c^2(2c^2 - 4c + 1)}{(c - 2)^2(c - 1)^4}.$$
- 7) a) Donner la loi commune suivie par cY_1 et cY_2 .
- 7) b) En déduire la loi de $cY_1 + cY_2$.
- 8) a) Soit H la fonction de répartition de $Y_1 + Y_2$ et K celle de $cY_1 + cY_2$. Pour tout réel x , exprimer $H(x)$ à l'aide de K , puis vérifier qu'une densité de $Y_1 + Y_2$ est la fonction h définie par :

$$h(x) = \begin{cases} c^2 x e^{-cx} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

- 8) b) Soit F_Z la fonction de répartition de Z . Exprimer, pour tout réel x , $F_Z(x)$ à l'aide de H . En déduire qu'une densité f_Z de Z est donnée par :

$$f_Z(x) = \begin{cases} \frac{c^2 \ln x}{x^{c+1}} & \text{si } x \geq 1, \\ 0 & \text{si } x < 1. \end{cases}$$

- 9) a) Pour tout réel α strictement supérieur à 1, montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} dx$ converge et donner sa valeur.
- 9) b) Retrouver alors les valeurs de $E(Z)$ et $V(Z)$ déterminées à la question 6).

Exercice 3

On effectue des lancers indépendants d'une pièce donnant « pile » avec la probabilité $p \in]0, 1[$ et « face » avec la probabilité $q = 1 - p$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note F_k l'événement « obtenir face au k -ième lancer » et on pose $P_k = \overline{F_k}$.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de faces obtenues avant le premier pile.

- 1) a) Utiliser les événements F_k et P_k pour déterminer la loi de X que l'on note désormais $BN(p)$.
- 1) b) Calculer l'espérance et la variance de X .
- 2) Selon le principe de la division euclidienne dans $\mathbb{N}$, on admet qu'il existe deux variables aléatoires Q et R , définies sur le même espace probabilisé que X , telles que $X = 3Q + R$, avec $Q(\Omega) = \mathbb{N}$ et $R(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.

Par exemple, si X prend la valeur 5, alors Q prend la valeur 1 et R prend la valeur 2.

- 2) a) Écrire, pour tout entier naturel k , l'événement $(Q = k)$ à l'aide de la variable X .
- 2) b) En déduire que Q suit la loi $BN(1 - q^3)$.

3) Montrer que :

$$P(R = 0) = \frac{1}{1 + q + q^2}, \quad P(R = 1) = \frac{q}{1 + q + q^2}, \quad P(R = 2) = \frac{q^2}{1 + q + q^2}.$$

4) Vérifier que les variables Q et R sont indépendantes.

5) Simulation des variables X , Q et R .

5) a) Expliquer pourquoi la fonction suivante renvoie la valeur prise par X lors de l'expérience décrite en début d'exercice.

Python

```
def simulX(p):
    X = rd.geometric(p) - 1
    return X
```

5) b) Compléter la fonction Python suivante afin qu'elle renvoie les valeurs prises respectivement par X , Q et R .

Python

```
def div(p):
    X = simulX(p)
    Q = ...
    R = ...
    return (X, Q, R)
```

Problème

Rappel de quelques formules trigonométriques utiles dans ce problème :

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

$$\cos(2a) = 2 \cos^2 a - 1.$$

$$\cos(2a) = 1 - 2 \sin^2 a.$$

On note $\mathbb{Z}$ l'ensemble des nombres entiers, positifs ou négatifs, et $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels. On admet que l'ensemble E des applications de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$, muni des opérations usuelles (somme de deux applications et produit d'une application par un réel), est un espace vectoriel.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3 et $I_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$.

On rappelle qu'une application f de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$ est dite n -périodique, ou de période n , si :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad f(k+n) = f(k).$$

On note F_n l'ensemble des applications n -périodiques de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$.

1) Soit h l'application de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad h(k) = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right).$$

Vérifier que h est élément de F_n .

2) Montrer que F_n est un sous-espace vectoriel de E .

3) Soit k un entier quelconque. On admet qu'il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z} \times I_n$ tel que $k = nq + r$. Montrer alors que, pour toute fonction f de F_n , on a l'égalité $f(k) = f(r)$.

4) Pour tout $i \in I_n$, on considère la fonction n -périodique e_i de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$, qui est donc élément de F_n , dont la restriction à I_n est donnée par :

$$\forall k \in I_n, \quad e_i(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

4) a) Utiliser la question 3) pour montrer que, pour tout élément f de F_n , on a :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad f(k) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i) e_i(k).$$

4) b) En déduire que la famille $B_n = (e_0, e_1, \dots, e_{n-1})$ est une base de F_n .

4) c) Quelles sont les coordonnées d'un élément quelconque f de F_n dans la base B_n ?

5) Pour tout couple $(f, g) \in F_n^2$, on pose :

$$\langle f, g \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} f(k) g(k).$$

5) a) Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur F_n . On note $\| \cdot \|$ la norme associée.

5) b) Montrer que la base B_n est orthonormale pour ce produit scalaire.

5) c) On admet, pour tout couple (a, b) de réels, avec $b \in]0, 2\pi[$ et pour tout entier k , que :

$$2 \sin\left(\frac{b}{2}\right) \cos(a + kb) = \sin\left(a + \frac{(2k+1)b}{2}\right) - \sin\left(a + \frac{(2k-1)b}{2}\right).$$

Montrer la relation :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos(a + kb) = \frac{\sin\left(a + \frac{(2n-1)b}{2}\right) - \sin\left(a - \frac{b}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{b}{2}\right)}.$$

5) d) En déduire les égalités :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{4k\pi}{n}\right) = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(4k+2)\pi}{n}\right) = 0.$$

5) e) Déterminer la norme $\|h\|$ de l'application h présentée à la question 1).

6) On considère l'application notée D qui, à tout élément f de F_n , associe l'application $D(f)$, que l'on pourra noter Df s'il n'y a pas de confusion possible, définie par :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad Df(k) = f(k+1) - f(k).$$

6) a) Vérifier que, pour tout $f \in F_n$, Df est élément de F_n .

6) b) Montrer que l'application $D : f \mapsto D(f)$ est un endomorphisme de F_n .

6) c) Vérifier que l'application Dh est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad Dh(k) = -2 \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \sin\left(\frac{\pi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right).$$

6) d) En déduire, à l'aide de la deuxième des égalités de la question 5) d), que :

$$\|Dh\| = \sqrt{2n} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

7) On considère l'application notée Δ qui, à tout élément f de F_n , associe l'application $\Delta(f)$, que l'on pourra noter Δf s'il n'y a pas de confusion possible, définie par :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \Delta f(k) = f(k+1) - 2f(k) + f(k-1).$$

On admet que Δ est un endomorphisme de F_n .

7) a) Montrer que :

$$\forall (f, g) \in F_n^2, \quad \langle f, \Delta g \rangle = -\langle Df, Dg \rangle.$$

7) b) En déduire que Δ est un endomorphisme symétrique de l'espace euclidien F_n .

7) c) Montrer que les valeurs propres de Δ sont négatives ou nulles.

8) On note ε_0 l'application constante de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$ égale à 1.

8) a) Vérifier que $\varepsilon_0 \in \text{Ker}(\Delta)$.

8) b) Montrer alors que $\text{Ker}(\Delta) = \text{Vect}(\varepsilon_0)$.

9) On pose $c = \min\{|\lambda| : \lambda \in \text{Sp}(\Delta) \setminus \{0\}\}$, où $\text{Sp}(\Delta)$ désigne l'ensemble des valeurs propres de Δ .

On considère un élément f de F_n tel que $\langle f, \varepsilon_0 \rangle = 0$.

9) a) Justifier l'existence d'une base orthonormale de F_n , formée de vecteurs propres de Δ , de la forme $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}\right)$, puis montrer qu'il existe $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ tel que :

$$f = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \varepsilon_i.$$

9) b) Montrer enfin que $\|Df\|^2 \geq c\|f\|^2$.

10) Dans cette question, on prend $n = 3$ et on note A la matrice de Δ dans la base B_3 de F_3 .

10) a) Vérifier que la première colonne de A est $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On admet, pour la suite, que l'on a :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

- 10) b) Déterminer un polynôme annulateur de A qui soit de degré 2. En déduire les valeurs propres de Δ . Comment s'écrit l'inégalité obtenue à la question 9) b) dans ce cas ?
- 10) c) Que peut-on déduire du cas de l'application h ?