



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques

2022

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Exercice 1

On désigne par a un réel et on considère une variable aléatoire X , de densité f strictement positive et continue sur $\mathbb{R}$, dont la fonction de répartition est notée F .

On pose :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{F(a)} & \text{si } x \leq a, \\ 0 & \text{si } x > a. \end{cases}$$

1) Montrer que g est bien définie et peut être considérée comme densité d'une certaine variable aléatoire Y .

2) On note G la fonction de répartition de Y .

2) a) Exprimer, pour tout réel x , $G(x)$ à l'aide de F .

2) b) Vérifier que l'on a, pour tout réel x :

$$G(x) = P_{(X \leq a)}(X \leq x).$$

Dans la suite, on considère une suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes, et suivant toutes la même loi que Y .

3) Pour tout entier naturel n non nul, on pose $M_n = \max(Y_1, \dots, Y_n)$ et on admet que M_n est une variable aléatoire à densité dont on note G_n la fonction de répartition.

3) a) Exprimer $G_n(x)$ à l'aide de G , puis à l'aide de F .

3) b) Montrer que la suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire que l'on précisera.

4) On pose $Z_n = n(a - M_n)$ et on note H_n la fonction de répartition de Z_n .

4) a) Vérifier que l'on a :

$$H_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - \left[\frac{F\left(a - \frac{x}{n}\right)}{F(a)} \right]^n & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

4) b) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{F\left(a - \frac{x}{n}\right)}{F(a)} = 1 - \frac{f(a)}{F(a)} \frac{x}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n \rightarrow +\infty).$$

4) c) En déduire que la suite $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire Z dont on reconnaîtra la loi.

Exercice 2

On se place dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique défini par :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^3)^2, \quad x = (x_1, x_2, x_3), \quad y = (y_1, y_2, y_3), \quad \langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3.$$

La norme du vecteur x est définie par $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on rappelle que $\mathcal{B}$ est orthonormale pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$.

On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$.

On se propose d'étudier l'ensemble F des endomorphismes f de $\mathbb{R}^3$ tels qu'il existe un réel k de $[0, 1[$ pour lequel on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \quad \|f(x)\| \leq k\|x\|.$$

1) Déterminer les endomorphismes qui satisfont cette inégalité avec $k = 0$.

2) Un premier exemple.

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$A = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} -1 & 8 & -4 \\ 8 & -1 & -4 \\ -4 & -4 & -7 \end{pmatrix}.$$

2) a) Calculer A^2 puis en déduire les deux valeurs propres possibles λ et μ de A .

2) b) Vérifier que A est diagonalisable et en déduire que λ et μ sont bien valeurs propres de A .

2) c) Justifier, sans les déterminer, que les sous-espaces propres de f sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathbb{R}^3$.

2) d) Utiliser ce résultat pour montrer que f appartient à F . On pourra écrire un vecteur x quelconque de $\mathbb{R}^3$ sous la forme $x = y + z$, avec $y \in \text{Ker}(f - \lambda \text{Id})$ et $z \in \text{Ker}(f - \mu \text{Id})$.

3) Quelques propriétés générales de l'ensemble F .

3) a) Vérifier que Id n'appartient pas à F .

- 3) b) Montrer que F n'est pas un espace vectoriel.
- 3) c) Montrer que F est stable par la loi de composition des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$.
- 3) d) Montrer que si f est un automorphisme de F , alors f^{-1} n'appartient pas à F .
- 4) a) Montrer que F ne contient pas de projecteurs autres que le projecteur nul.
- 4) b) F contient-il des symétries, c'est-à-dire des endomorphismes s tels que $s^2 = \text{Id}$?
- 5) Soit f un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^3$.

- 5) a) Montrer qu'en posant $k = \max\{|\lambda| : \lambda \in \text{Sp}(f)\}$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \quad \|f(x)\| \leq k\|x\|.$$

- 5) b) En déduire que f appartient à F si et seulement si les valeurs propres de f appartiennent toutes à $] -1, 1[$.

- 6) Un deuxième exemple.

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 6) a) Déterminer un polynôme annulateur de A qui soit de degré 3 et donner les valeurs propres possibles de f .

6) b) Montrer que f appartient à F , puis donner un réel k de $[0, 1[$ pour lequel on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \quad \|f(x)\| \leq k\|x\|.$$

6) c) Compléter le script Python suivant pour qu'il permette d'afficher la valeur du réel k défini à la question 5) a).

La commande `eig(A)` renvoie deux tableaux : le premier contient les valeurs propres de A , le second contient des vecteurs propres en colonnes. L'expression `eig(A)[0]` sélectionne le premier tableau.

Python

```
import numpy as np

from numpy.linalg import eig

A = np.array([[0, -2, 2], [-2, -1, 0], [2, 0, 1]]) / 6
k = ...

print(k)
```

Exercice 3

On désigne par p un réel de $]0, 1[$ et on pose $q = 1 - p$.

On suppose dans ce problème que toutes les variables aléatoires sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p .

On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires prenant leurs valeurs dans $\{0, 1\}$, mutuellement indépendantes et suivant toutes la même loi que X .

On considère aussi une variable aléatoire N telle que $N(\Omega) = \mathbb{N}^*$, indépendante de la famille $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$, et possédant une espérance.

On pose

$$S = \sum_{i=1}^N X_i,$$

c'est-à-dire que, pour tout ω de Ω , on a

$$S(\omega) = \sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega).$$

On admet que S est une variable aléatoire définie elle aussi sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1) a) Montrer que $S(\Omega) \subset \mathbb{N}$. Si $P(N = n) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $S(\Omega) = \mathbb{N}$.

1) b) Montrer, sans la calculer, que S possède une espérance.

2) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i.$$

Donner la loi de S_n ainsi que son espérance.

3) Établir l'égalité :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(S = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} P(S_n = k)P(N = n).$$

4) Étude d'un exemple : on suppose dans cette question que N est une variable aléatoire telle que $N - 1$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

4) a) Déterminer la loi de N .

4) b) Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(S = k) = \frac{p^k \lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n(\lambda q)^{n-k}}{(n-k)!}.$$

En déduire :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(S = k) = \frac{p^k \lambda^{k-1}}{k!} (\lambda q + k) e^{-\lambda p}.$$

4) c) Donner, grâce à $S(\Omega)$, l'expression de $P(S = 0)$ en fonction de λ , p et q .

4) d) On se propose de calculer l'espérance de S grâce à la formule de l'espérance totale que l'on pourra utiliser sans aucune justification.

Donner la valeur de l'espérance conditionnelle $E(S \mid [N = n])$, puis exprimer l'espérance de S en fonction de λ et p et vérifier que : $E(S) = E(X)E(N)$.

5) On rappelle que la commande `poisson(lam)` permet de simuler une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ , où `lam` représente λ . La commande `binomial(n, p)` simule une variable suivant la loi binomiale de paramètres n et p . Compléter la fonction Python suivante pour qu'elle permette de calculer la valeur prise par S lorsque la loi de N est celle décrite à la question précédente :

Python

```
from numpy.random import poisson, binomial
```

```
def S(lam, p):
```

```
    N = ...
```

```
    y = ...
```

```
    return y
```

Problème

1) Question préliminaire.

Soit f une fonction définie et strictement positive sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) \sim_{x \rightarrow 0^+} x$.

Montrer que $\ln(f(x)) \sim_{x \rightarrow 0^+} \ln x$.

Partie 1 : deux nouvelles fonctions

On définit les fonctions, appelées « sinus hyperbolique » et « cosinus hyperbolique », notées respectivement sh et ch , en posant, pour tout réel x :

$$\text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

2) a) Étudier la parité de la fonction sh .

2) b) Dresser le tableau de variations de la fonction sh .

2) c) Déterminer un équivalent en 0 de $\text{sh}(x)$.

3) a) Étudier la parité de la fonction ch .

3) b) Dresser le tableau de variations de la fonction ch .

4) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\text{ch}(x))^2 - (\text{sh}(x))^2 = 1.$$

Partie 2 : une troisième fonction

- 5) a) Montrer que l'on définit bien une fonction, appelée « tangente hyperbolique » et notée th , en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{th}(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}.$$

- 5) b) Vérifier que la fonction th est impaire.
- 5) c) En s'aidant éventuellement des relations $\text{ch}' = \text{sh}$ et $\text{sh}' = \text{ch}$, déterminer les variations de la fonction th .
- 5) d) Dresser le tableau de variations, limites comprises, de la fonction th .

- 6) a) Trouver les constantes a et b telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \frac{1}{\text{sh}(x)} = \frac{ae^{-x}}{1 - e^{-x}} + \frac{be^{-x}}{1 + e^{-x}}.$$

- 6) b) En déduire, à l'aide de la fonction th , une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction qui à x associe $\frac{1}{\text{sh}(x)}$.

- 7) Montrer que $\ln\left(\text{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right) \sim_{x \rightarrow 0^+} \ln x$.

Partie 3 : une série convergente

Dans cette partie, on désigne par x un réel strictement positif.

- 8) a) Soit k un entier naturel non nul. Montrer que :

$$\frac{1}{\text{sh}((k+1)x)} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{\text{sh}(tx)} dt \leq \frac{1}{\text{sh}(kx)}.$$

8) b) En déduire l'encadrement, valable pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{\text{sh}(tx)} dt \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\text{sh}(kx)} \leq \int_1^n \frac{1}{\text{sh}(tx)} dt + \frac{1}{\text{sh}(x)}.$$

9) a) Montrer que la série de terme général $\frac{1}{\text{sh}(nx)}$, $n \in \mathbb{N}^*$, est convergente.

9) b) Établir, pour tout réel x strictement positif, l'encadrement suivant :

$$-\frac{1}{x} \ln \left(\text{th} \left(\frac{x}{2} \right) \right) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\text{sh}(kx)} \leq -\frac{1}{x} \ln \left(\text{th} \left(\frac{x}{2} \right) \right) + \frac{1}{\text{sh}(x)}.$$

9) c) En déduire, en utilisant certains résultats des parties précédentes, l'équivalent suivant :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\text{sh}(nx)} \sim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{\ln x}{x}.$$

10) Compléter le script Python suivant pour qu'il permette d'afficher la valeur de

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\text{sh}(kx)}$$

lorsque n et x sont entrés par l'utilisateur.

On suppose que l'utilisateur saisit un entier $n \geq 1$ et un réel $x > 0$. La commande `input` renvoie la saisie sous forme de chaîne ; `int` et `float` la convertissent respectivement en entier et en réel.

Python

```
from numpy import exp

n = int(input("Entrez une valeur pour n : "))
x = float(input("Entrez une valeur strictement positive pour x : "))
S = 0.0
for k in range(1, n + 1):
    S = ...
print(S)
```